DOI:10.13656/j.cnki.gxkx.2005.03.010
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(3):191~193

基于 Drucker 公设的双剪准则理论推导*

The Deduction of Double Shearing Yield Criterion Based on Drucker Postulation

谢肖礼, 谭洪河, 周继辉, 朱参军, 王　波
Xie Xiaoli, Tan Honghe, Zhou Jihui, Zhu Canjun, Wang Bo

(广西大学土木建筑工程学院, 广西南宁　530004)
(Coll. of Architecture & Civil Engi., Guangxi Univ., Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要: 基于 Drucker 公设, 利用塑性体应变增量、等效塑性应变增量等塑性指标, 假定金属材料的塑性体应变增量为零, 设材料屈服时的 $\overline{d\varepsilon^p}$ 与应力状态无关, 通过严密的数学导出双剪准则, 并在数学上解释双剪准则.
关键词: 双剪准则　Drucker 公设　流动法则　塑性体应变增量
中图法分类号: TU452　　文献标识码: A　　文章编号: 1005-9164(2005)03-0191-03

Abstract: Double shearing criterion and most of other yield criteria for metal were set up on the base of researching results. By using the two plastic indexes, i.e. the plastic volumetric-strain increment and the equivalent plastic strain increment under yield condition, the double shearing yield criterion is strictly deduced on the basis of plastic flow rule drawn from plastic flow rule of Drucker postulation. A mathematical explanation is given to the double shearing yield criterion.
Key words: double shearing yield criterion, Drucker postulation, plastic flow rule, plastic volumetric-strain increment

固体力学在研究材料的塑性性质时首先要确定材料的屈服点, 特别是在复杂应力条件下的屈服, 因此屈服准则或屈服条件的确立极为重要.

关于塑性屈服面, 历史上曾提出过不同的假设[1], 第一个假设是 G. Galileo 在 17 世纪提出的, 他认为当材料的最大拉应力达到 σ_s 时材料进入塑性状态. 这一假设已经被试验否定. 第二个假设是圣维南提出的最大正应变理论, 该假设也一样被实验否定. 在此之后 E. Beltrami 提出当弹性能达到一定值时, 材料开始屈服, 这个假设与试验也不符[2]. 直到 1864 年 H. Tresca 提出第一个正确的屈服条件 Tresca 准则, 之后又出现了各种基于实验的屈服准则[3~10].

对于金属材料来说, Tresca 准则、Mises 准则是 2 个常用的屈服准则: Tresca 发表了关于金属挤压的实验报告, 指出金属在最大剪应力达到某一量值时材料即发生塑性流动, 从此产生了关于金属材料的第一个屈服准则, 它适用于剪切屈服极限和拉压屈服极限之间的关系, 满足 $\tau_s = \frac{1}{2}\sigma_s$ 的材料. 之后, Mises (1913 年) 使用应力的第二不变量 $J_2 = c$ 来拟合试验点, 适用于剪切屈服极限和拉压屈服极限之间的关系为 $\tau_s = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_s$ 的材料[11]. 后来的力学工作者也多从试验的角度得出不同的屈服准则, 其实质是根据大量的试验数据采用经验的方法, 以某种函数来拟合试验数据[12]. 因此得出的屈服条件都经受住了实践的考验, 但也导致了其只是对其试验过的材料能很好适用. 我国学者在塑性力学的研究中提出了一些观点[13~14]. 1961 年, 俞茂宏提出了双剪应力屈服准则, 并使之满足 Drucker 公设的屈服面的外凸性条件[12]. 但所有这些准则, 从未见有人给出严格的数学推理和解释. Drucker 公设[15] 是所有金属材料都满足的基本公设, 由该公设可以得出 2 个重要结论: 屈服面外突和正交流动法则 $d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$. 本文从 Drucker 公设得出的流动法则出发, 利用 2 个塑性指标的特性, 从理论上

收稿日期: 2004-12-07
修回日期: 2005-03-02
作者简介: 谢肖礼 (1963-), 男, 教授, 博士后, 主要从事屈服准则、岩土及边坡稳定等研究。
*广西自然科学基金 (0339017), 中国博士后研究基金, 广西教育厅科研基金 (桂教科研字 2002 第 316 号) 资助项目。

对我国学者俞茂宏先生提出的双剪应力屈服准则作以解释.

1 双剪屈服准则[1]

各向同性材料的屈服准则,可以表述为 3 个独立的应力不变量或 3 个主剪应力函数, 即:

$f(\sigma_i) = f(I_1, I_2, I_3)$,

$f(\sigma_i) = f(J_2, J_3)$ 或 $f(\sigma_i) = f(\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31})$,

式中, I_1, I_2, I_3 为应力张量不变量; J_2, J_3 为应力偏量不变量; τ_{12}, τ_{23} 和 τ_{31} 为 3 个主剪应力.

俞茂宏于 1961 年提出了双剪应力屈服准则(双剪准则), 满足 Drucker 公设的屈服面的外凸性条件. 双剪应力屈服准则认为材料的屈服决定于 2 个较大的主剪应力: 最大剪应力 τ_{13} 和中间主应力 τ_{12} 或 τ_{23}, 它的数学表达式为:

$$\begin{cases} f = \tau_{13} + \tau_{12} = \sigma_1 - \dfrac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) = c, & \tau_{12} \geqslant \tau_{23}, \\ f' = \tau_{13} + \tau_{23} = \dfrac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 = c, & \tau_{12} \leqslant \tau_{23}. \end{cases}$$

在实际使用时可以根据 $\tau_{12} \geqslant \tau_{23}$ 或 $\tau_{12} \leqslant \tau_{23}$ 选用 f 或 f'. 双剪应力屈服准则的菱形十二体剪切模型如图 1 所示.

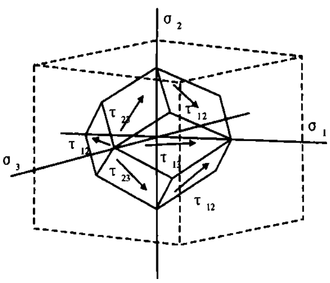

图 1 双剪应力屈服准则的菱形十二体剪切模型

Fig. 1 Twelve-plane body and principal shear stress model of double shearing yield criterion

2 双剪准则的导出

设屈服函数的形式为 $f = f(I_1, \sqrt{J_2}, \theta_\sigma) = 0$, 在主应力空间中, 由 Drucker 公设所得的正交流动法则可得:

$$d\varepsilon_i^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_i}, \tag{1}$$

其中, $i = 1, 2, 3$; $d\lambda$ 为比例系数; I_1、J_2、θ_σ 分别为应力的第一不变量、应力偏量的第二不变量、洛德角.

由(1) 式得:

$$d\varepsilon_1^p = d\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial I_1} + \frac{s_1}{2\sqrt{J_2}}\frac{\partial f}{\partial\sqrt{J_2}} + \cos^2\theta_\sigma \frac{\partial f}{\partial \theta_\sigma}\frac{\partial \tan\theta_\sigma}{\partial \sigma_1}\right) = d\lambda\left(a + \frac{s_1}{2\sqrt{J_2}}b + \cos^2\theta_\sigma \frac{\partial \tan\theta_\sigma}{\partial \sigma_1}c\right) = d\lambda\left\{a + \frac{s_1}{2\sqrt{J_2}}b - \frac{\cos^2\theta_\sigma}{\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sigma_1 - \sigma_3} + \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}\right]c\right\}, \tag{2}$$

$$d\varepsilon_2^p = d\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial I_1} + \frac{s_2}{2\sqrt{J_2}}\frac{\partial f}{\partial\sqrt{J_2}} + \cos^2\theta_\sigma \frac{\partial f}{\partial \theta_\sigma}\frac{\partial \tan\theta_\sigma}{\partial \sigma_2}\right) = d\lambda\left(a + \frac{s_2}{2\sqrt{J_2}}b + \cos^2\theta_\sigma \frac{\partial \tan\theta_\sigma}{\partial \sigma_2}c\right) = d\lambda\left(a + \frac{s_2}{2\sqrt{J_2}}b + \frac{\cos^2\theta_\sigma}{\sqrt{3}}\frac{2}{\sigma_1 - \sigma_3}c\right), \tag{3}$$

$$d\varepsilon_3^p = d\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial I_1} + \frac{s_3}{2\sqrt{J_2}}\frac{\partial f}{\partial\sqrt{J_2}} + \cos^2\theta_\sigma \frac{\partial f}{\partial \theta_\sigma}\frac{\partial \tan\theta_\sigma}{\partial \sigma_3}\right) = d\lambda\left(a + \frac{s_3}{2\sqrt{J_2}}b + \cos^2\theta_\sigma \frac{\partial \tan\theta_\sigma}{\partial \sigma_3}c\right) = d\lambda\left\{a + \frac{s_1}{2\sqrt{J_2}}b + \frac{\cos^2\theta_\sigma}{\sqrt{3}}\left[\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)^2} - \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_3}\right]c\right\}, \tag{4}$$

其中, $a = \dfrac{\partial f}{\partial I_1}$; $b = \dfrac{\partial f}{\partial\sqrt{J_2}}$; $c = \dfrac{\partial f}{\partial \theta_\sigma}$; $\tan\theta_\sigma = \dfrac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)}$; s_i 为主偏应力; $i = 1, 2, 3$ 且 $s_1 + s_2 + s_3 = 0$.

由(2) ~ (4)式可得体应变塑性增量表达式如下:

$$d\varepsilon_v^p = d\varepsilon_1^p + d\varepsilon_2^p + d\varepsilon_3^p = 3d\lambda\frac{\partial f}{\partial I_1} = 3a\,d\lambda. \tag{5}$$

对于金属材料, 试验表明在塑性变形阶段可认为材料的体积是不可压缩的, 则可假设

$$d\varepsilon_v^p = 0, \tag{6}$$

由(6) 式得 $a = \dfrac{\partial f}{\partial I_1} = 0$, 可见屈服函数 f 与 I_1 无关.

由(2) ~ (4)、(6) 式可得:

$$(\overline{d\varepsilon^p})^2 = \frac{2}{3}d\varepsilon_i^p \cdot d\varepsilon_i^p = \frac{2}{3}(d\lambda)^2\left(\frac{1}{2}b^2 + \frac{8J_2\cos^2\theta_\sigma}{(\sigma_1 - \sigma_3)^4}c^2 + 2\cos\theta_\sigma bc\left(s_1(\sigma_3 - \sigma_2) + s_2(\sigma_1 - \sigma_3) + s_3(\sigma_2 - \sigma_1)\right)/\left(\sqrt{3J_2}(\sigma_1 - \sigma_3)^2\right)\right) = \frac{2}{3}(d\lambda)^2\left[\frac{1}{2}b^2 + \frac{c^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}\right], \tag{7}$$

其中, $\overline{d\varepsilon^p}$ 为等效塑性应变增量.

假设材料屈服时的 $\overline{d\varepsilon^p}$ 与应力状态无关, 且对洛德角不敏感, 不妨取 $c = \dfrac{\partial f}{\partial \theta_\sigma} = 0$(即 f 与 θ_σ 无关), b 为常数, 则由(7) 式得:

$$b^2=\left(\frac{\partial f}{\partial\sqrt{J_2}}\right)^2=k_1, \tag{8}$$

其中,k_1 为大于 0 的常数.

即有$\frac{\partial f}{\partial\sqrt{J_2}}=\sqrt{k_1}$. (9)

(9) 式两端对 $\sqrt{J_2}$ 进行积分得:

$$f=\sqrt{k_1}\sqrt{J_2}+k_2=0, \tag{10}$$

其中,k_2 为不为 0 的常数.

以上屈服函数可以写成

$$f=\sqrt{J_2}+k=0, \tag{11}$$

其中,k 为常数.

利用 Drucker 公设得出的流动法则,结合(11)式计算可得:

$$d\varepsilon_i^p=d\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}=d\lambda\frac{s_i}{\sqrt{2r}}, \tag{12}$$

其中,$r=\sqrt{2J_2}$.

由功能原理,塑性功增量为

$$d\omega^p=\sigma_{ij}d\varepsilon_{ij}^p=\sigma_i d\varepsilon_i^p, \tag{13}$$

把(12)式代入(13)式,有

$$d\omega^p=\sigma_i d\varepsilon_i^p=\frac{s_i s_i}{\sqrt{2r}}d\lambda=\sqrt{J_2}d\lambda. \tag{14}$$

由(11)式及(14)式,可知$\frac{dw^p}{d\lambda}$为一常数,不难看出

$$dw^p=(\sigma_1 s_1+\sigma_2 s_2+\sigma_3 s_3)\frac{d\lambda}{\sqrt{2r}}=s_1(\sigma_1+\sigma_2\frac{s_2}{s_1}+\sigma_3\frac{s_3}{s_1})\frac{d\lambda}{\sqrt{2r}}, \tag{15}$$

当 $s_2=-\frac{1}{2}s_1$, $s_3=-\frac{1}{2}s_1$ 时,则上式变为

$$dw^p=(\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3))\frac{s_1}{\sqrt{2r}}d\lambda, \tag{16}$$

并有 $\tan\theta_\sigma=\frac{2s_2-s_1-s_3}{\sqrt{3}(s_1-s_3)}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\theta_\sigma=-\frac{\pi}{6}$. 因为

$$\cos(\theta_\sigma+\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_\sigma-\frac{1}{2}\sin\theta_\sigma=\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_1-\sigma_3)/r-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}(2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3)/r=\frac{\sqrt{6}s_1}{2r}, \tag{17}$$

所以 $\frac{s_1}{r}=\frac{2}{\sqrt{6}}\cos(\theta_\sigma+\frac{\pi}{6})$. (18)

把(18)式代入(14)式,得

$$dw^p=(\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3))\frac{1}{\sqrt{3}}\cos(\theta_\sigma+\frac{\pi}{6})d\lambda,$$

故 $\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)=\sqrt{3}\frac{dw^p}{d\lambda}=k$,

即 $\sigma_1-\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)=k$.

此式即为俞茂宏 1961 年提出的双剪屈服准则.

3 结束语

本文基于 Drucker 公设,利用塑性体应变增量、等效塑性应变增量等塑性指标的特性,假定金属材料的塑性体应变增量为零,假设材料屈服时的$\overline{d\varepsilon^p}$与应力状态无关,通过严密的数学推导,导出了双剪准则,对该准则作了数学上的解释.在理论上加深了对屈服准则的理解,使得双剪准则具有了更坚实的理论依据.

参考文献:

[1] 余同希. 塑性力学[M]. 北京:高等教育出版社,1989.

[2] 王 仁,黄克志,朱兆祥. 塑性力学进展[M]. 北京:中国铁道出版社,1988.

[3] Freudenthal A M, et al. Second order effects in the theory of plasticity[J]. Acta Mechanics, 1969, 8: 34-52.

[4] Lubliner J. Plasticity theory macmillan publishing company: an historical perspective of yield surface investigations for metals[J]. J Non-Linear Mech, 1972, 11: 59-82.

[5] Hodge P G. 结构塑性分析[M]. 蒋咏秋,熊祝华译. 北京:科学出版社,1965.

[6] 张泽华. 塑性本构关系的实验研究[M]. 见:王 仁等编. 塑性力学进展. 北京:中国铁道出版社,1988.

[7] Paul B. Macroscopic Criteria for Plastic Flow and Brittle Fracture[M]. New York: Academic Press, 1968.

[8] Hecker S S. Experimental investigation of corners in the yield surfaces[J]. Acta Mechanical, 1972, 3: 69-86.

[9] Lin T H, et al. A new slip theory of plasticity[J]. J App Mech, 1974, (1): 9.

[10] Ohashi Y, et al. Effect of third stress deviator on plastic deformation of mild steel[J]. J Mech Phys Solids, 1975, 23: 295-332.

[11] 俞茂宏. 广义双剪应力屈服准则及其推广[J]. 科学通报. 1992, 37(2): 182-185.

[12] 俞茂宏,何丽南,宋凌宇. 双剪应力强度理论及其推广[J]. 中国科学(A), 1985, 28(12): 1174-1183.

[13] 俞茂宏. 古典强度理论及其发展[J]. 力学与实践, 1980, 2(2): 20-25.

[14] 谢肖礼. 双圆锥屈服准则理论及其工程应用[J]. 广西科学, 2004, 11(3): 201-206, 211.

[15] Drucker D C. Proc 1st U S[J]. Nat Congr Appl Mech, 1952, 481-491.

(责任编辑:黎贞崇)