DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.04.002
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(4): 246~248

范畴中态射集左(右)加权星型序的刻画*

Characterizations of the Left (Right) Weighted Star Partial Orderings of Morphism Set in Category

刘晓冀
Liu Xiaoji

(广西民族大学计算机与信息学院,广西南宁 530006)
(College of Computer and Information Science, Guangxi University for Nationaliteis, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要:利用态射的加权广义逆定义态射集的左(右)加权星型序,给出它的等价刻画,以及特殊范畴中进一步的等价刻画,当加权态射分别为单位态射时,得到文献[1~3]的相应结论.
关键词:范畴 态射 星型序
中图法分类号: O153 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)04-0246-03

Abstract Some characterizations of the left (right) weighted star partial orderings of morphism in category are given, the further results are given for some special category. As the weighted morphisms are identity morphism, respectively, some results on the star partial orderings in previous papers are obtained.
Key words category, morphism, partial ordering

文献[1~3]相继讨论了范畴中态射集的减序、星型序、尖序、利用态射的广义逆得到他们的一些等价刻画.最近国内有许多作者研究态射的加权广义逆,并获得一些较好的结果,文献[4]首次定义了态射的加权广义逆,利用态射的满单分解以及相关概念给出了态射的加权广义逆的等价刻画,文献[5,6]在文献[4]基础上进一步研究了态射的加权广义逆.文献[7~10]讨论矩阵的星型序,讨论了其性质及其等价刻画.本文利用态射的加权广义逆定义态射集的左(右)加权星型序,给出它的一些等价刻画,以及特殊范畴中进一步的等价刻画,当加权态射分别为单位态射时,我们得到文献[1~3]的相应结果.特别地,当考虑的范畴为矩阵范畴时,我们得到了较文献[7~10]更为一般的结论.

本文约定,D是一个范畴,$M(A,B)$表示范畴D中由对象A、B确定的态射集,态射广义逆和态射偏序的定义和记号见文献[1],态射用小写拉丁字母表示,记$[a,b]=ab-ba$.i表示单位态射.为方便起见,我们首先给出态射的加权广义逆的概念与记号.

定义1 设D是一个范畴,$a\in M(A,B)$,m,n分别为D的可逆态射,若有:

(1) $aba=a$, (2) $bab=b$, (3) $(mab)^*=mab$,
(4) $(nba)^*=nba$

则称态射b为a关于m,n的加权Moore-Penrose逆,记为$a^+_{m,n}$,若b满足上述等式中的第$(i,\cdots,j)$个等式,则称态射b为a关于m,n的加权$(i,\cdots,j)$广义逆,记为$a^{(i,\cdots,j)}_{m,n}$,所有a关于m,n的加权$(i,\cdots,j)$广义逆构成的集合记为$a_{m,n}\{i,\cdots,j\}$.

设A、B、C、$E\in obD$,$a\in M(A,B)$,记

$aM(B,C)=\{ax: x\in M(B,C)\}$, $M(D,A)a=\{ya: y\in M(D,A)\}$.

$M(A,B)_{m,n}\{i,\cdots,j\}=\{a\in M(A,B)\mid a_{m,n}\{i,\cdots,j\}\neq \emptyset\}$.

定义2 设D是带有对合$*$的范畴,m,n分别为可逆对称态射,称$n^{-1}a^*m$为态射a的加权对合,记为$a^\#$.

容易验证a的加权对合具有如下的性质.

引理1 设D是带有对合$*$的范畴,m,n分别为可逆对称态射,$a,b\in M(A,B)$,$c\in M(B,C)$,则

(1) $(a^\#)^\#=a$, (2) $(a+b)^\#=a^\#+b^\#$,

收稿日期: 2005-02-16
修回日期: 2005-04-19
作者简介:刘晓冀(1972-),男,江西莲花人,博士,副教授,主要从事广义逆的代数理论与偏序的研究.
* 广西科学基金(0575032)资助项目.

(3) $(ac)^{\#} = c^{\#}a^{\#}$.

定义 3 设 $A,B\in obD$,由 A,B所确定的子范畴具有对合 $*$, $a,b\in M(A,B)$,若

(1) $a^{\#}a = a^{\#}b$, $aM(B,B)\subseteq bM(B,B)$,则记 $a\ {}^{\#}\!\leq b$;

(2) $aa^{\#} = ba^{\#}$, $M(A,A)a\subseteq M(A,A)b$,则记 $a\leq^{\#} b$;

(3) 设 $a_{m,n}\{1,3\}\neq\emptyset$,若存在 $a^-,\tilde{a}\in a_{m,n}\{1,3\}$使得 $a^-a = a^-b$, $a\tilde{a} = b\tilde{a}$,则记 $a\overset{l}{\leq} b$;

(4) 设 $a_{m,n}\{1,4\}\neq\emptyset$,若存在 $a^-,\tilde{a}\in a_{m,n}\{1,4\}$,使得 $a^-a = a^-b$, $a\tilde{a} = b\tilde{a}$,则记 $a\overset{m}{\leq} b$.

定理 1 设 $A,B\in obD$,由 A,B所确定的子范畴具有对合 $*$, $a,b\in M(A,B)$,则

(1) ${}^{\#}\!\leq$ 是 $M(A,B)_{m,n}\{1,3\}$的一个偏序关系,称它为左加权星型偏序;

(2) $\leq^{\#}$ 是 $M(A,B)_{m,n}\{1,4\}$的一个偏序关系,称它为右左加权星型偏序.

证明 在 $M(A,B)_{m,n}\{1,3\}$中, ${}^{\#}\!\leq$ 显然满足反身性.

若 $a\ {}^{\#}\!\leq b$, $b\ {}^{\#}\!\leq a$,存在 $x\in M(B,B)$使得 $b = ax$,则

$a = aa_{m,n}^{(1,3)}a = m^{-1}(a_{m,n}^{(1,3)})^{*}nn^{-1}a^{*}ma = m^{-1}(a_{m,n}^{(1,3)})^{*}na^{\#}b = m^{-1}(a_{m,n}^{(1,3)})^{*}na^{\#}ax = aa_{m,n}^{(1,3)}ax = b$,

故 ${}^{\#}\!\leq$ 满足反对称性.

若 $a\ {}^{\#}\!\leq b$, $b\ {}^{\#}\!\leq c$,则 $aM(B,B)\subseteq cM(B,B)$,且

$a^{\#}a = a^{\#}b = a^{\#}bb_{m,n}^{+}b = a^{\#}m^{-1}(b_{m,n}^{(1,3)})^{*}nb^{\#}c = a^{\#}bb^{(1,3)}c = a^{\#}c$.

即传递性成立.所以 ${}^{\#}\!\leq$ 是 $M(A,B)_{m,n}\{1,3\}$的一个偏序关系.

同理可证明(2).

现在我们给出一般范畴中态射集的左(右)加权星型序的一些刻画.

定理 2 设 $A,B\in obD$,由 A,B所确定的子范畴具有对合 $*$, $a,b\in M(A,B)_{m,n}\{1,3\}$,则下列命题等价:

(1) $a\ {}^{\#}\!\leq b$;

(2) $a^-a = a^-b$, $\forall a^-\in a_{m,n}\{1,2,3\}$,且 $aM(B,B)\subseteq bM(B,B)$;

(3) $aa^-b = a = bb^-a$, $\forall a^-\in a_{m,n}\{1,2,3\}$, $b^-\in b\{1\}$;

(4) $aa^- = ab^-$, $\forall a^-\in a_{m,n}\{1,2,3\}$, $b^-\in b_{m,n}\{1,2,3\}$,且 $M(A,A)a\subseteq M(A,A)b$;

(5) 存在态射 $e\in M(A,A)$满足 $e^{\#} = e = e^2$,态射 $f\in M(B,B)$,使得 $ea = eb = a = bf$;

(6) 存在态射 $e\in M(A,A)$满足 $e^{\#} = e = e^2$,态射 $f\in M(B,B)$,使得 $eb = a = bf$;

(7) $a\leq b$,且 $a^{\#}b = b^{\#}a$;

(8) $a\leq b$,且 $ab^- = (ab^-)^{\#}$, $\forall b\in b_{m,n}\{1,3\}$;

(9) 存在 $a^-,\tilde{a}\in a_{m,n}\{1,2,3\}$,使得 $a^-a = a^-b$, $a\tilde{a} = b\tilde{a}$;

(10) 存在 $a^-\in a_{m,n}\{1,2,3\}$,使得 $a^-a = a^-b$, $aa^- = ba^-$;

(11) 存在 $a^-\in a_{m,n}\{1,3\}$,使得 $a^-a = a^-b$, $aa^- = ba^-$;

(12) $a\overset{l}{\leq} b$.

证明 (1)⇒(2) $\forall a^-\in a_{m,n}\{1,2,3\}$,则

$a^-a = a^-aa^-a = a^-m^{-1}(a^-)^{*}na^{\#}a = a^-m^{-1}(a^-)^{*}na^{\#}b = a^-b$.

(2)⇒(3) $\forall a^-\in a_{m,n}\{1,2,3\}$, $b^-\in b\{1\}$,则 $aa^-b = aa^-a = a$, $a = bx$, $bb^-a = bb^-bx = bx = a$.

(3)⇒(4) $\forall a^-\in a_{m,n}\{1,2,3\}$, $b^-\in b_{m,n}\{1,2,3\}$,则 $ab^- = aa^-bb^- = m^{-1}(a^-)^{*}a^{*}(b^-)^{*}b^{*}m = m^{-1}(bb^-aa^-)^{*}m = aa^-$,

而 $aa^-b = a$,故 $aa^-b = aa^-a = aM(A,A)a\subseteq M(A,A)b$.

(4)⇒(5) 令 $e = aa^-$, $f = b^-a$, $a^-\in a_{m,n}\{1,3\}$, $b^-\in b_{m,n}\{1,3\}$, $M(A,A)a\subseteq M(A,A)b$,存在态射 x 使得 $bx = a$则 $e^{\#} = e = e^2$, $ea = eb = a$, $bb^-a = bx = a$.

(5)⇒(6) 显然成立.

(6)⇒(7) 由文献[1]的定理 3,则 $a\leq b$, $a^{\#}b = b^{\#}eb = b^{\#}a$.

(7)⇒(8) 由文献[1]的定理 3,则 $ab^- = bb^-ab^- = m^{-1}(b^-)^{*}nb^{\#}ab^- = (ab^-)^{\#}$, $\forall b\in b_{m,n}\{1,3\}$.

(8)⇒(9) 由文献[1]的定理 3,则 $a = ab_{m,n}^{(1,3)}a = ab_{m,n}^{(1,3)}b$,则 $a_{m,n}^{(1,2,3)}a = a_{m,n}^{(1,2,3)}b$,令 $x = b_{m,n}^{(1,2,3)}aa_{m,n}^{(1,2,3)}$,故 $bx = ax$,且 $x\in a_{m,n}\{1,2,3\}$.

(9)⇒(10) 设 $y = \tilde{a}a\tilde{a}$,则 $ya = yb$, $ay = by$,且 $y\in a_{m,n}\{1,2,3\}$.

(10)⇒(11)⇒(12) 显然成立.

(12)⇒(1) $a^{\#}a = a^{\#}aa^-a = a^{\#}aa^-b = a^{\#}b$,且 $a = b\tilde{a}a$,则 $aM(B,B)\subseteq bM(B,B)$,因此 $a\ {}^{\#}\!\leq b$.

类似可证:

定理 3 设 $A,B\in obD$,由 A,B所确定的子范畴具有对合 $*$, $a,b\in M(A,B)_{m,n}\{1,4\}$,则下列命题等价:

(1) $a\leq^{\#} b$;

(2) $aa^- = ba^-$, $\forall a^-\in a_{m,n}\{1,2,4\}$,且 $M(A,A)a$

$\subseteq M(A,A)b$;

(3) $ab^{-}b=a=ba^{-}a, \forall a^{-}\in a_{m,n}\{1,2,4\}, b^{-}\in b\{1\}$;

(4) $a^{-}a=b^{-}a, \forall a^{-}\in a_{m,n}\{1,2,4\}, b^{-}\in b_{m,n}\{1,2,4\}$,且 $aM(B,B)\subseteq bM(B,B)$;

(5) 存在态射 $e\in M(A,A)$ 满足 $e^{\#}=e=e^{2}$,态射 $f\in M(A,A)$,使得 $ae=be=a=fb$;

(6) 存在态射 $e\in M(B,B)$ 满足 $e^{\#}=e=e^{2}$,态射 $f\in M(A,A)$,使得 $be=a=fb$;

(7) $a\leqslant b$,且 $ba^{\#}=ab^{\#}$;

(8) $a\leqslant b$,且 $b^{-}a=(b^{-}a)^{\#}, \forall b\in b_{m,n}\{1,4\}$;

(9) 存在 $a^{-}, \tilde{a}\in a_{m,n}\{1,2,4\}$,使得 $a^{-}a=a^{-}b$, $a\tilde{a}=b\tilde{a}$;

(10) 存在 $a^{-}\in a_{m,n}\{1,2,4\}$,使得 $a^{-}a=a^{-}b$, $aa^{-}=ba^{-}$;

(11) 存在 $a^{-}\in a_{m,n}\{1,4\}$, 使得 $a^{-}a=a^{-}b$, $aa^{-}=ba^{-}$;

(12) $a\overset{m}{\leqslant} b$.

最后,给出一些特殊范畴中态射集的左(右)加权星型序的一些刻画.

定理 4 设 $A,B\in obD$,由 A,B 所确定的子范畴是具有对合 * 的素性预加法范畴,$a,b\in M(A,B)_{m,n}\{1,3\}$,则下列命题等价:

(1) $a\overset{\#}{\leqslant} b$;

(2) $b_{m,n}\{1,3\}\subseteq a_{m,n}\{1,3\}$;

(3) $b_{m,n}\{1,2,3\}\subseteq a_{m,n}\{1,2,3\}$.

证明 (1)⇒(2) 首先 $a\leqslant b$,且 $a^{\#}b=b^{\#}a$,则 $b_{m,n}\{1,3\}\subseteq b_{m,n}\{1\}\subseteq a_{m,n}\{1\}$,且有 $(mab_{m,n}^{(1,3)})^{*}=(maa_{m,n}^{(1,3)})^{*}=mab_{m,n}^{(1,3)}$,故 $b_{m,n}\{1,3\}\subseteq a_{m,n}\{1,3\}$.

(2)⇒(3) 显然成立.

(3)⇒(1) 容易验证 $b_{m,n}^{(1,2,3)}+(i-b_{m,n}^{(1,2,3)}b)xb_{m,n}^{(1,2,3)}\in b_{m,n}\{1,2,3\}$,由 $b_{m,n}\{1,2,3\}\subseteq a_{m,n}\{1,2,3\}$,则 $a(i-b_{m,n}^{(1,2,3)}b)xb_{m,n}^{(1,2,3)}a=0, \forall x\in M(B,B)$,若 $a=0$,$a=ab_{m,n}^{(1,2,3)}b$,否则由 A,B 所确定的子范畴是具有对合 * 的素性预加法范畴,则
$a(i-b_{m,n}^{(1,2,3)}b)=0$,可得 $a=ab_{m,n}^{(1,2,3)}b$.从而令 $e=ab_{m,n}^{(1,2,3)}$,则 $e=e^{2}=e^{\#}$,$a=be$,
$a=ab_{m,n}^{(1,2,3)}b=m^{-1}(mab_{m,n}^{(1,2,3)})bb_{m,n}^{(1,2,3)})^{*}b=m^{-1}((b_{m,n}^{(1,2,3)})^{*}a^{*}(b_{m,n}^{(1,2,3)})^{*}b^{*}m)^{*}b=bb_{m,n}^{(1,2,3)}ab_{m,n}^{(1,2,3)}b=bf$,由定理 1,则 $a\#\leqslant b$.

定理 5 设 $A,B\in obD$,由 A,B 所确定的子范畴是具有对合 * 的正性预加法范畴,$a,b\in M(A,B)$,若 $a_{m,n}\{1,3\}\neq\emptyset$,$b_{m,n}^{+}$ 存在,则下列命题等价:

(1) $a\overset{\#}{\leqslant} b$;

(2) $b_{m,n}\{1,3\}\subseteq a_{m,n}\{1,3\}$;

(3) $b_{m,n}\{1,2,3\}\subseteq a_{m,n}\{1,2,3\}$.

证明 只需证明 (3)⇒(1),容易证明 $b_{m,n}^{+}+(i-b_{m,n}^{+}b)a^{*}ab_{m,n}^{+}\in b_{m,n}\{1,2,3\}$,则
$a(i-b_{m,n}^{+}b)a^{*}a=0\Rightarrow a(i-b_{m,n}^{+}b)[a(i-b_{m,n}^{+}b)]^{*}=0$,而 A,B 所确定的子范畴是具有对合 * 的正性预加法范畴,则 $a=ab_{m,n}^{+}b=eb$, $e=ab_{m,n}^{+}$, $e=e^{\#}=e^{2}$,且 $a=bb_{m,n}^{+}a=bf$,故 $a\#\leqslant b$.

在上述两类特殊范畴中对于右加权星型偏序有同样的刻画.

定理 6 设 $A,B\in obD$,由 A,B 所确定的子范畴是具有对合 * 的素性预加法范畴,$a,b\in M(A,B)_{m,n}\{1,4\}$,则下列命题等价:

(1) $a\leqslant\# b$;

(2) $b_{m,n}\{1,4\}\subseteq a_{m,n}\{1,4\}$;

(3) $b_{m,n}\{1,2,4\}\subseteq a_{m,n}\{1,2,4\}$.

定理 7 设 $A,B\in obD$,由 A,B 所确定的子范畴是具有对合 * 的正性预加法范畴,$a,b\in M(A,B)$,若 $a_{m,n}\{1,4\}\neq\emptyset$,$b_{m,n}^{+}$ 存在,则下列命题等价:

(1) $a\leqslant\# b$;

(2) $b_{m,n}\{1,4\}\subseteq a_{m,n}\{1,4\}$;

(3) $b_{m,n}\{1,2,4\}\subseteq a_{m,n}\{1,2,4\}$.

参考文献:

[1] 庄瓦金.范畴中态射集减序的刻画[J].数学学报,1994,37:172-179.

[2] 庄瓦金.范畴中态射集星型序的刻画[J].新疆大学学报(自然科学版),1995,12:15-20.

[3] 庄瓦金.预加法范畴中态射集星型序的刻画[J].数学杂志,1998,18:121-124.

[4] 刘晓冀.态射的广义 Moore-Penrose逆[J].数学杂志,1998,18:267-230.

[5] 刘晓冀.关于态射的广义 Moore-Penrose逆[J].曲阜师大学报(自然科学版),1999,25:31-32.

[6] 刘淑舟,游 宏.具有泛分解态射的广义 Moore-Penrose逆[J].应用数学,2001,14:37-40.

[7] Hartwig R E, Styan G P H. On some characterizations of the star partial ordering for matrices and rank subtractivity[J]. Lin Alg Appl, 1986, 82:145-161.

[8] Mitra S K. The minus partial ordering and the shorted matrix[J]. Lin Alg Appl, 1987, 83:1-27.

[9] Bakasalary J K. A relationship between the star and the minus orderings[J]. Lin Alg Appl, 1986, 82:163-167.

[10] Bakasalary J K, Pukelsheim F, Styan G P H. Some properties of the matrix partial orderings[J]. Lin Alg Appl, 1989, 119:57-85.

(责任编辑: 韦廷宗)