

# 树的邻接矩阵和 Laplacian 矩阵谱半径的新下界\*

## New Lower Bounds on the Spectral Radius of Adjacency Matrices and Laplacian Matrices of Trees

张德龙<sup>1</sup>, 谭尚旺<sup>2</sup>Zhang Delong<sup>1</sup>, Tan Shangwang<sup>2</sup>

(1. 广西工学院信息与计算科学系, 广西柳州 545006; 2. 石油大学应用数学系, 山东东营 257061)

(1. Department of Information and Computer Science, Guangxi Institute of Technology, Liuzhou, Guangxi, 545006, China; 2. Department of Mathematics, University of Petroleum, Dongying, Shandong, 257061, China)

**摘要:** 利用代数方法、图的边变换, 以及树的邻接矩阵谱与 Laplacian 谱的关系, 研究树和完美树的邻接矩阵谱半径和 Laplacian 谱半径的下界, 给出达到下界的所有极树, 得到的新结果改进了文献 [2] 的结论.

**关键词:** 树 完美树 下界 邻接矩阵 谱半径 Laplacian 矩阵

中图分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)04-0250-05

**Abstract** In this paper, lower bounds on the spectral radius of adjacency matrices of trees and perfect trees are discussed by algebraic method and edge switching of graph, and all trees which reach lower bounds on the spectral radius are obtained. Lower bounds on the spectral radius of Laplacian matrices of trees and perfect trees are discussed by the relation between spectra of adjacency matrices and spectra of Laplacian matrices, and all trees which reach lower bounds on the spectral radius are obtained.

**Key words** trees, perfect trees, lower bounds, adjacency matrices, spectral radius, Laplacian matrices

假设  $G = (V, E)$  是  $n$  阶简单图, 顶点集  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , 令  $d_i$  表示顶点  $v_i$  在  $G$  中的度;  $G$  的邻接矩阵  $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$  是一个  $(0, 1)$  矩阵, 其中  $a_{ij} = 1$ , 当且仅当  $v_i$  和  $v_j$  邻接.  $G$  的 Laplacian 矩阵  $L(G) = D(G) - A(G)$ , 其中  $D(G) = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  是  $G$  的度对角矩阵.  $A(G)$  和  $L(G)$  的特征多项式分别记为  $h_A(G, x)$  和  $h_L(G, x)$ , 或简记为  $h_A(G)$  和  $h_L(G)$ , 因为  $A(G)$  和  $L(G)$  都是实对称的, 所以它们的特征值都是实数, 分别称它们的最大特征值为图  $G$  的邻接谱半径和 Laplacian 谱半径, 且分别记为  $d_A(G)$  和  $d_L(G)$ .

有完美对集的树称为完美树, 用  $P_n$ ,  $C_n$  和  $K_{1, n-1}$  分别表示  $n$  阶的路、圈和星. 如果图  $G$  和  $H$  同构, 则

记为  $G \cong H$ , 否则记为  $G \not\cong H$ . 目前, 许多文献研究了树和完美树的邻接谱半径和 Laplacian 谱半径的上界且得到了许多好的结论, 但对树和完美树的邻接谱半径和 Laplacian 谱半径下界的研究却不多见.

设  $G$  是  $n$  阶树, 熟知  $d_A(G) \geq 2 \cos \frac{\pi}{n+1}$ , 等号成立, 当且仅当  $G \cong P_n$  [1]. 对  $n$  阶的树或完美树  $G \cong P_n$ , 常安 [2] 给出了  $d_A(G)$  的一个新的下界. 对连通图  $G$  的 Laplacian 谱半径, Friedman [3] 研究了  $d_L(G)$  的下界与  $G$  的阶的关系, 张晓东和李炯生 [3, 4] 研究了  $d_L(G)$  的下界与  $G$  的阶、边数和生成树的个数的关系, 但这些下界应用到树和完美树上时都是平凡的. 本文进一步研究树和完美树的邻接谱半径和 Laplacian 谱半径, 获得新的下界, 且给出达到下界的所有极树.

### 1 相关引理

**引理 1.** [5] 设  $e = uv$  是图  $G$  的一条边,  $C(e)$  是包含边  $e$  的圈的集合, 则

收稿日期: 2005-08-09

修回日期: 2005-09-02

作者简介: 张德龙 (1965-), 男, 湖北江陵人, 副教授, 主要从事代数图论研究.

\* 广西自然科学基金项目 (桂科自 0131001) 资助.

$$h_n(G, x) = h_n(G - e) - h_n(G - u - v) - \sum_{Z \in C(e)} h_n(G - V(Z)).$$

引理 1.2<sup>[6]</sup> 设  $v$  是图  $G$  的一个非孤立顶点, 分别把路  $P_k$  和  $P_s$  的一个 1 度顶点与  $v$  用一条边连接, 记得到的图为  $G_{k,s}$ . 如果  $k \geq s \geq 1$ , 则  $d_4(G_{k,s}) > d_4(G_{k-1, s-1})$ .

本文称由  $G_{k,s}$  得到  $G_{k-1, s-1}$  的过程为图的第一类边变换.

## 2 树和完美树的邻接矩阵谱半径的下界

假设  $P_{n,i}$  ( $2 \leq i \leq n-2$ ),  $P_{n,i}^*$  ( $3 \leq i \leq n-4$ ),  $P_{n,i,j}^*$  ( $2 \leq i < j \leq n-3$ ) 树如图 1 所示.

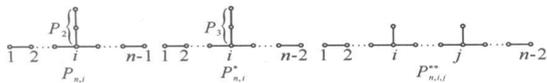


图 1  $P_{n,i}, P_{n,i}^*, P_{n,i,j}^*$  树

Fig. 1 Tree of  $P_{n,i}, P_{n,i}^*, P_{n,i,j}^*$

由引理 1.2, 当  $3 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$  时, 有  $d_4(P_{n,i}) > d_4(P_{n,i-1})$ , 称由  $P_{n,i}$  得到  $P_{n,i-1}$  的过程为图的第二类边变换; 当  $4 \leq i \leq \frac{n+1}{2}$  时, 有  $d_4(P_{n,i}^*) > d_4(P_{n,i-1}^*)$ , 称由  $P_{n,i}^*$  得到  $P_{n,i-1}^*$  的过程为图的第三类边变换.

引理 2.1<sup>[11]</sup> 设  $G$  是连通图, 则  $d_4(G) = 2$ , 当且仅当  $G$  是图  $C_n, K_{1,4}, P_{8,4}, P_{9,3}, P_{7,3}^*$  或  $P_{n,2,n-3}^*$  之一;  $d_4(G) < 2$ , 当且仅当  $G$  是图  $C_n, K_{1,4}, P_{8,4}, P_{9,3}, P_{7,3}^*$  或  $P_{n,2,n-3}^*$  的真子图.

由引理 2.1 和文献 [7] 中所列树的图表, 容易得到下面的结论.

引理 2.2 设  $T \notin \{P_n, P_{n,2}\}$  是  $n$  ( $6 \leq n \leq 9$ ) 阶树, 则当  $n = 9$  时,  $d_4(T) \geq 2$ , 等号成立, 当且仅当  $T \in \{P_{n,3}, P_{n,2,n-3}^*\}$ ; 当  $6 \leq n \leq 8$  时,  $d_4(T) \geq d_4(P_{n,3})$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{n,3}$ . 记

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\arccos x)}{1-x^2},$$

其中,  $n$  是非负整数并且  $|x| < 1$ . 则<sup>[11]</sup>

$$h_n(C_n) = 2T_n\left(\frac{x}{2}\right) - 2, h_n(P_n) = U_n\left(\frac{x}{2}\right).$$

由上面的定义, 容易证明下面的结论:

引理 2.3 (I) 设  $j \geq 1$ , 则  $h_n(P_{j+1}) + h_n(P_{j-1}) = x h_n(P_j)$ ;

(II) 设  $r \geq 3$ , 则  $h_n(P_r) - h_n(P_{r-2}) = 2 + h_n(C_{r+1})$ ;

(III) 设  $1 \leq q < s < k$ , 则  $h_n(P_s) h_n(P_k) -$

$$h_n(P_q) h_n(P_{k-s-q}) = \sum_{j=0}^{s-q-1} h_n(P_{k+s-2-2q-2j}).$$

定理 2.4 设  $T$  是  $n$  阶树,  $n \geq 6$  且  $T \notin \{P_n, P_{n,2}\}$ , 则当  $6 \leq n \leq 8$  时,  $d_4(T) \geq d_4(P_{n,3})$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{n,3}$ ; 当  $n = 9$  时,  $d_4(T) \geq 2$ , 等号成立, 当且仅当  $T \in \{P_{n,3}, P_{n,2,n-3}^*\}$ ; 当  $n \geq 10$  时,  $d_4(T) \geq 2$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{n,2,n-3}^*$ .

证明 由引理 2.2, 只需讨论  $n \geq 10$  的情形即可. 设  $T \notin \{P_n, P_{n,2}, P_{n,2,n-3}^*\}$ , 记  $T$  的一条最长路为  $P_r$ , 则存在最长路在  $P_r$  上的子树  $P_{6,3}$ . 先对  $T$  进行图的第一类边变换得到  $P_{n,i}$ , 其中  $3 \leq i \leq n-3$ ; 再对  $P_{n,i}$  进行图的第二类边变换得到  $P_{n,3}$ . 于是,  $d_4(T) \geq d_4(P_{n,3})$ . 由引理 2.2 知,  $d_4(P_{n,3}) > 2 = d_4(P_{n,2,n-3}^*)$ . 因此, 结论成立.

定理 2.5 设  $T$  是  $2n$  阶的完美树,  $n \geq 4$  且  $T \notin \{P_{2n}, P_{2n,3}\}$ , 则当  $n = 4$  时,  $d_4(T) \geq d_4(P_{2n,3}^*)$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{2n,3}^*$ ; 当  $5 \leq n \leq 6$  时,  $d_4(T) \geq d_4(P_{2n,5})$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{2n,5}$ ; 当  $n \geq 7$  时,  $d_4(T) \geq d_4(P_{2n,3,2n-4}^*)$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{2n,3,2n-4}^*$ .

证明 当  $n = 4, 5$  时, 由文献 [7] 中 8 阶和 10 阶树的图表, 易验证结论成立. 下面设  $n \geq 6$ ,  $2n$  阶的完美树  $T \notin \{P_{2n}, P_{2n,3}, P_{2n,5}, P_{2n,3,2n-4}^*\}$ .

首先, 证明  $T$  经过上面三类图的边变换可变成  $P_{2n,5}$  或  $P_{2n,3}$ . 下面分两种情形讨论:

情形 1  $T$  存在子树  $P_{7,3}^*$ . 先对  $T$  进行图第一类边变换得到  $P_{2n,i}^*$ , 其中  $3 \leq i \leq 2n-4$ ; 再对  $P_{2n,i}^*$  进行图的第二类边变换得到  $P_{2n,3}^*$ .

情形 2  $T$  不存在子树  $P_{7,3}^*$ . 记  $P_r = v_1 v_2 \cdots v_r$  是  $T$  的一条最长路, 则  $T$  可通过在点  $v_i$  上生长  $t_i$  条悬挂边而产生, 其中  $t_i = 0, 1$ . 因为  $T$  是完美树, 所以  $3 \leq i \leq r-2$ . 于是, 得  $2t_i \leq r + (r-4)$ , 即  $r \geq n+2$ . 因此,  $T$  存在最长路在  $P_r$  上的子图  $P_{10,5}$  或  $P_{10,3,4}^*$ . 于是, 先对  $T$  进行图的第一类边变换得到  $P_{2n,i}$ , 其中  $5 \leq i \leq 2n-6$ ; 再对  $P_{2n,i}$  进行图的第二类边变换得到  $P_{2n,5}$ . 因  $T \not\cong P_{2n,5}$ , 故上面图的两种边变换至少有一个要实行.

其次, 由引理 1.1 和引理 2.3, 容易计算得

$$\begin{aligned} h_n(P_{2n,5}) - h_n(P_{2n,3}^*) &= [h_n(P_4) h_n(P_{2n-4}) - h_n(P_2) h_n(P_{2n-2})] - x [h_n(P_3) h_n(P_{2n-6}) - h_n(P_2) h_n(P_{2n-5})] \\ &= h_n(P_{2n-6}) + h_n(P_{2n-8}) - x h_n(P_{2n-9}) = x [h_n(P_{2n-7}) - h_n(P_{2n-9})] = x(2 + h_n(C_{2n-8})). \end{aligned} \quad (1)$$

因此, 当  $x \geq d_4(P_{2n,3}^*)$  时, 有  $h_n(P_{2n,5}) > h_n(P_{2n,3}^*)$ , 从而  $d_4(P_{2n,5}) < d_4(P_{2n,3}^*)$ . 由上面两方面的讨论, 当  $T \notin \{P_{2n}, P_{2n,3}, P_{2n,5}, P_{2n,3,2n-4}^*\}$  时, 总有

$$d_4(T) > d_4(P_{2n,5}).$$

最后,由引理 1.1,容易计算得

$$h_4(P_{13,5}) = x(x^3 - x^2 - 2x + 1)(x^3 + x^2 - 2x - 1)(x^6 - 7x^4 - 13x^2 - 5),$$

$$h_4(P_{13,3,9}^*) = x(x^2 - 1)(x^4 - 4x^2 + 1)(x^6 - 7x^4 - 13x^2 - 5).$$

所以  $d_4(P_{13,5}) = d_4(P_{13,3,9}^*)$ .注意到  $m \geq 10$  时,  $P_{m,5}$  是  $P_{m+1,5}$  的真子图,故  $d_4(P_{m,5})$  关于  $m \geq 10$  严格单调递增.  $d_4(P_{m,3,m-4}^*)$  关于  $m \geq 9$  也是严格单调递减的<sup>[1]</sup>. 于是,当  $n \geq 7$  时,有  $d_4(P_{2n,3,2n-4}^*) < d_4(P_{13,3,9}^*) = d_4(P_{13,5}) < d_4(P_{2n,5})$ ; 当  $n = 6$  时,有  $d_4(P_{2n,3,2n-4}^*) > d_4(P_{13,3,9}^*) = d_4(P_{13,5}) > d_4(P_{2n,5})$ . 因为  $P_{2n,3,2n-4}^*$  是完美树. 综上所述,定理得到证明.

注 根据文献 [1, 2] 的结论和上面的讨论,我们得到下面的结论:

设  $T$  是一个  $n$  阶树,  $n$  适当大 (例如  $n \geq 10$ ),  $T \notin \{P_n, P_{n,2}, P_{n,2,n-3}^*\}$ , 则

$$d_4(T) > d_4(P_{n,2,n-2}^*) = 2 > d_4(P_{n,2}) = 2 \cos \frac{c}{2(n-1)} > d_4(P_n) = 2 \cos \frac{c}{n+1}.$$

设  $T$  是  $2n$  阶的完美树,  $n$  适当大 (例如  $n \geq 7$ ) 且  $T \notin \{P_{2n}, P_{2n,3}, P_{2n,3,2n-4}^*\}$ , 则

$$d_4(T) > d_4(P_{2n,3,2n-4}^*) > d_4(P_{2n,3}) > d_4(P_{2n}).$$

### 3 树和完美树的 Laplacian 谱半径的下界

引理 3.1<sup>[8]</sup> (I) 设  $T$  是  $n$  阶树, 则  $L(T)$  与  $D(T) + A(T)$  有相同的谱.

(II) 设  $n$  阶树  $T$  的顶点集和边集分别为  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  和  $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ ,  $T$  的关联矩阵为  $B(T) = (b_{ij})_{n \times (n-1)}$ , 线图记为  $l(T)$ . 则

$$B(T)B(T)^t = D(T) + A(T), B(T)^t B(T) = 2I_{n-1} + A(l(T)).$$

其中,  $A'$  表示矩阵  $A$  的转置;  $I_{n-1}$  是  $n-1$  阶的单位矩阵.

引理 3.2<sup>[6]</sup> 设  $v$  和  $u$  是图  $G$  的 2 个邻接顶点,  $d_G(v) \geq 2, d_G(u) \geq 2$ . 把  $P_k$  的一个 1 度顶点与  $v$  用一条边连接且  $P_s$  的一个 1 度顶点与  $u$  用一条边连接, 记得到的图为  $G_{k,s}^*$ , 则  $k \geq s \geq 1$  时,  $d_4(G_{k,s}^*) > d_4(G_{k,1,s-1}^*)$ .

从  $G_{k,s}^*$  得  $G_{k+1,s-1}^*$  的过程称为图的第四类边变换.

引理 3.3<sup>[6]</sup> 设  $H$  是连通图  $G$  的真生成子图, 则  $d_4(H) < d_4(G)$ .

引理 3.4<sup>[7]</sup> (I) 设  $T$  是树, 则线图  $l(T)$  的每个块都是完全图,  $T$  的每个非悬挂边都是  $l(T)$  的割

点, 且  $l(T)$  的每个割点都恰好位于它的两个块中.

(II) 设  $T$  和  $\mathcal{T}$  是  $n$  阶树, 则  $l(T) \cong l(\mathcal{T})$ , 当且仅当  $T \cong \mathcal{T}$ .

树  $P_{n,i}, P_{n,i}^*$  和  $P_{n,i,j}^{*,*}$  的线图如图 2 所示. 记  $C(s, t, l)$  表示分别把  $C_3$  的 3 个顶点与路  $P_{s-1}, P_{t-1}$  和  $P_{l-1}$  的各一个一度顶点用一条边连接而得到的  $s+t+l$  阶图. 显然,  $C(i-1, 1, n-i-1) \cong l(P_{n,i}), C(i-1, 2, n-i-2) \cong l(P_{n,i}^*)$ . 由引理 3.1, 得

$$d_4(T) = 2 + d_4(l(T)). \quad (2)$$

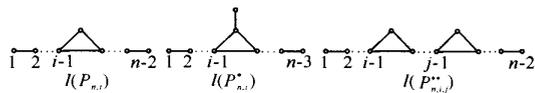


图 2  $l(P_{n,i}), l(P_{n,i}^*), l(P_{n,i,j}^{*,*})$  树

Fig. 2 Tree of  $l(P_{n,i}), l(P_{n,i}^*), l(P_{n,i,j}^{*,*})$

定理 3.5 设  $T$  是  $n$  阶树.

(I) 设  $n \geq 2$ , 则  $d_4(T) \geq 2 + 2 \cos \frac{c}{n}$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_n$ ;

(II) 设  $n \geq 5$  且  $T \not\cong P_n$ , 则  $d_4(T) \geq d_4(P_{n,2})$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{n,2}$ ;

(III) 设  $n \geq 6$  且  $T \notin \{P_n, P_{n,2}\}$ , 则当  $6 \leq n \leq 7$  时,  $d_4(T) \geq d_4(P_{n,3})$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{n,3}$ ;

当  $n = 8$  时,  $d_4(T) \geq 2 + \tau$ , 等号成立, 当且仅当  $T \in \{P_{n,3}, P_{n,2,n-3}^*\}$ , 其中  $\tau$  是方程  $x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$  的最大根;

当  $n \geq 9$  时,  $d_4(T) \geq d_4(P_{n,2,n-3}^*)$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{n,2,n-3}^*$ .

证明 (I) 由式 (2),  $d_4(T) = 2 + d_4(l(T)) \geq 2 + d_4(P_{n-1}) = 2 + 2 \cos \frac{c}{n}$ , 等号成立, 当且仅当  $l(T) \cong P_{n-1} = l(P_n)$ , 由引理 3.4, 这等价于  $T \cong P_n$ .

(II) 设  $T \notin \{P_n, P_{n,2}\}$ . 由  $T \not\cong P_n$  知,  $T$  存在度至少为 3 的顶点, 于是  $l(T)$  有长为 3 的圈. 取定  $l(T)$  的一个长为 3 的圈, 记为  $C_3$ . 首先, 保持  $C_3$  不变, 采用破圈法把  $l(T)$  变成只有圈  $C_3$  的单圈连通图  $W$ ; 其次, 对  $W$  反复应用图的第一类边变换变成只有圈  $C_3$  的单圈连通图  $C(s, t, l)$ ; 最后, 对  $C(s, t, l)$  反复应用图的第四类边变换得  $C(1, 1, n-3) \cong l(P_{n,2})$ . 由  $T \not\cong P_{n,2}$  及引理 3.4 知,  $l(T) \not\cong l(P_{n,2})$ , 于是上面的三个过程至少有一个要实行, 从而由引理 1.2 引理 3.2 和引理 3.3 知,  $d_4(l(T)) > d_4(l(P_{n,2}))$ . 于是由式 (2), 得

$$d_4(T) = 2 + d_4(l(T)) > 2 + d_4(l(P_{n,2})) = d_4(P_{n,2}).$$

因此, 结论成立.

(III) 当  $6 \leq n \leq 7$  时, 由文献 [7] 中树的图解, 易

知结论成立.下面设  $T \notin \{P_n, P_{n,2}, P_{n,2,n-3}^*\}$  且  $n \geq 8$ , 则  $l(T)$  存在一个边导出子图  $C(2, 2, 1)$ . 首先, 保持  $C(2, 2, 1)$  不变, 用破圈法把  $l(T)$  变成含有  $C(2, 2, 1)$  的单圈连通图  $W$ ; 其次, 对  $W$  应用图的第一类边变换变成单圈连通图  $C(s, t, l)$ , 此时  $s, t, l$  至少有两个不小于 2; 最后, 对  $C(s, t, l)$  应用图的第四类边变换得到  $C(2, 1, n-4) \cong l(P_{n,3})$ , 其中,  $l(T) \not\cong l(P_{n,3})$ , 即  $T \not\cong P_{n,3}$  时, 三个过程至少有一个要实行. 由引理 1.2 引理 3.2 和引理 3.3, 当  $T \notin \{P_n, P_{n,2}, P_{n,2,n-3}^*\}$  且  $n \geq 8$  时, 有

$$d_4(l(T)) \geq d_4(l(P_{n,3})), \quad (3)$$

其中, 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{n,3}$ .

另一方面, 由引理 1.1, 容易计算得

$$h_4(l(P_{8,3})) = x(x+1)(x^2-2)(x^3-x^2-4x+2),$$

$$h_4(l(P_{8,2,5}^*)) = (x-2)(x+1)^3(x^3-x^2-4x+2).$$

于是  $d_4(l(P_{8,3})) = d_4(l(P_{8,2,5}^*)) = T$ , 其中  $T$  是方程  $x^3 - x^2 - 4x + 2 = 0$  的最大根. 因为  $l(P_{n,3})$  是  $l(P_{n+1,3})$  的真子图, 故  $d_4(l(P_{n,3}))$  关于  $n \geq 6$  严格单调递增.  $d_4(l(P_{n,2,n-3}^*))$  关于  $n \geq 8$  严格单调递减<sup>[1]</sup>. 于是  $n \geq 9$  时,  $d_4(l(P_{n,3})) > d_4(l(P_{n,2,n-3}^*))$ .

综合上面讨论, 由 (2) 和 (3) 式, 得

$$\text{如果 } n=8 \text{ 且 } T \notin \{P_n, P_{n,2}, P_{n,3}, P_{n,2,n-3}^*\}, \text{ 则} \\ d_4(T) = 2 + d_4(l(T)) > 2 + d_4(l(P_{n,3})) = 2 + d_4(l(P_{n,2,n-3}^*)) = 2 + T$$

如果  $n \geq 9$  且  $T \notin \{P_n, P_{n,2}, P_{n,2,n-3}^*\}$ , 则

$$d_4(T) = 2 + d_4(l(T)) > 2 + d_4(l(P_{n,3})) > 2 + d_4(l(P_{n,2,n-3}^*)) = d_4(P_{n,2,n-3}^*).$$

**定理 3.6** 设  $T$  是  $2n$  阶的完美树, 其中  $n \geq 4$ .

(I) 设  $T \not\cong P_{2n}$ , 则  $d_4(T) \geq d_4(P_{2n,3})$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{2n,3}$ ;

(II) 设  $T \notin \{P_{2n}, P_{2n,3}\}$ , 则

当  $n=4$  时,  $d_4(T) \geq d_4(P_{2n,3}^*)$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{2n,3}^*$ ;

当  $n=5$  时,  $d_4(T) \geq d_4(P_{2n,5})$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{2n,5}$ ;

当  $n=6$  时,  $d_4(T) \geq 2 + U$ , 等号成立, 当且仅当  $T \in \{P_{2n,5}, P_{2n,3,2n-4}^*\}$ , 其中  $U$  是方程  $x^4 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$  的最大根.

当  $n \geq 7$  时,  $d_4(T) \geq d_4(P_{2n,3,2n-4}^*)$ , 等号成立, 当且仅当  $T \cong P_{2n,3,2n-4}^*$ .

**证明** (I) 设  $2n$  阶的完美树  $T \notin \{P_{2n}, P_{2n,3}\}$ , 类似定理 3.5(3) 的讨论, 由  $l(T)$  得到  $C(2, 1, 2n-4) \cong l(P_{2n,3})$ . 因为  $T \not\cong P_{2n,3}$ , 即  $l(T) \not\cong l(P_{2n,3})$ , 所以三个过程至少有一个要进行一次. 从而由引理 1.2 引理 3.2 和引理 3.3, 得  $d_4(l(T)) > d_4(l(P_{2n,3}))$ . 再由 (2) 式, 得  $d_4(T) = 2 + d_4(l(T)) > 2 + d_4(l(P_{2n,3})) = d_4(P_{2n,3})$ . 因此, 结论成立.

(II) 当  $n=4, 5$  时, 由文献 [7] 中树的图表, 易知结论成立. 下面设  $n \geq 6$  且  $2n$  阶的完美树  $T \notin \{P_{2n}, P_{2n,3}, P_{2n,5}, P_{2n,3,2n-4}^*\}$ . 首先, 应用定理 2.5 证明的分类: 对应情形 1,  $l(T)$  存在子图同构于  $C(2, 2, 2)$ , 类似定理 3.5(3) 的讨论,  $l(T)$  可化成  $C(s, t, l)$ , 其中  $s, t, l$  都不小于 2; 再反复应用图的第四类边变换得到  $C(2, 2, 2n-5) \cong l(P_{2n,3}^*)$ . 对应情形 2,  $l(T)$  存在子图同构  $C(4, 1, 4)$ , 类似上一情形讨论,  $l(T)$  可变换成  $C(4, 1, 2n-6) \cong l(P_{2n,5})$ , 其中三个过程至少有一个要进行一次.

其次, 由引理 1.1 和引理 2.3, 类似于 (1) 式的计算, 当  $x \geq d_4(l(P_{2n,3}^*))$  时, 有

$$\text{其次, 由引理 1.1 和引理 2.3, 类似于 (1) 式的计算, 当 } x \geq d_4(l(P_{2n,3}^*)) \text{ 时, 有}$$

$$h_4(l(P_{2n,5})) - h_4(l(P_{2n,3}^*)) = x(x+2)(2 + h_4(C_{2n-8})) > 0.$$

因此,  $d_4(l(P_{2n,5})) < d_4(l(P_{2n,3}^*))$ . 综合上面两方面的讨论, 我们有

$$d_4(l(T)) > d_4(l(P_{2n,5})). \quad (4)$$

最后, 由引理 1.1, 容易计算得

$$h_4(l(P_{12,5})) = x(x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)(x^4-5x^2-2x+1),$$

$$h_4(l(P_{12,3,8}^*)) = x(x^2-2)(x^2-x-3)(x^2+x-1)(x^4-5x^2-2x+1).$$

因此,  $d_4(l(P_{12,5})) = d_4(l(P_{12,3,8}^*)) = U$ , 其中  $U$  是方程  $x^4 - 5x^2 - 2x + 1 = 0$  的最大根.

$d_4(l(P_{m,3,m-4}^*))$  关于  $m \geq 10$  严格单调减<sup>[1]</sup>. 由  $l(P_{m,5})$  是  $l(P_{m+1,5})$  的真子图知,  $d_4(l(P_{m,5}))$  关于  $m \geq 10$  严格单调增. 于是  $n \geq 7$  时,  $d_4(l(P_{2n,5})) > d_4(l(P_{2n,3,2n-4}^*))$ . 综合上面的讨论, 由式 (2) 和式 (4), 得

$$\text{如果 } n=6 \text{ 且 } T \notin \{P_{2n}, P_{2n,3}, P_{2n,5}, P_{2n,3,2n-4}^*\}, \text{ 则} \\ d_4(T) = 2 + d_4(l(T)) > 2 + d_4(l(P_{2n,5})) = 2 + d_4(l(P_{2n,3,2n-4}^*)) = 2 + U$$

如果  $n \geq 7$  且  $T \notin \{P_{2n}, P_{2n,3}, P_{2n,3,2n-4}^*\}$ , 则

$$d_4(T) = 2 + d_4(l(T)) > 2 + d_4(l(P_{2n,5})) > 2 + d_4(l(P_{2n,3,2n-4}^*)) = d_4(P_{2n,3,2n-4}^*).$$

参考文献:

[1] Cvetkovic D M, Doob M, Sachs H. Spectra of Graphs [M]. New York: Academic Press, 1980.  
[2] 常安. 完美匹配树的次大和次小的最大特征值 [J]. 高

[3] Frideman J. Minimum higher eigenvalues of Laplacians on graphs [J]. Duke Mathematical Journal, 1996, 83(1): 1-18.

[4] Zhang Xiaodong, Li Jiongsheng. On the largest eigenvalue of the Laplacian matrix of a graph [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2001, 17(2): 183-190.

[5] Schwenk A J, Wilson R J. On the Eigenvalues of A Graph Selected Topics in Graph Theory [M]. Beineke L W, Wilson R J, eds. New York Academic Press, 1978.

[6] 李乔, 冯克勤. 论图的最大特征根 [J]. 应用数学学报, 1979, 2(2): 167-175.

[7] Harary F. Graph Theory [M]. Addison-Wesley: Reading Mass, 1969.

[8] 张晓东, 李炯生. 树的 Laplacian 矩阵的最大和次大特征值 [J]. 中国科学技术大学学报, 1998, 25(5): 513-518.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第 249 页 Continue from page 249)

引理 2<sup>[5,6]</sup> 设  $m$  是大于 2 的正整数,  $f(X, Y) = a_0X^m + a_1X^{m-1}Y + \dots + a_mY^m$  是二元  $m$  次原型,  $t$  为非零整数, 则方程  $f(x, y) = t$  仅有有限多组解, 且这些解都满足

$$\max(|x|, |y|) < \exp(3^{3(m+9)} m^{18(m+1)} H_f^{2m-2} (\log H_f)^{2m-1} (\log B)), \quad (5)$$

其中  $H_f = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_m|\}$  称为  $f(X, Y)$  的高,  $B = \max(e, |t|)$ .

引理 3<sup>[7]</sup> 设  $d = \gcd(F_{m-k} + \frac{1}{2}F_n, F_{m-k} - \frac{1}{2}F_n)$ , 则  $d \mid 2F_k$ .

## 2 定理 1 的证明

由引理 1, 设  $a_0 = 1 - 2L_k + 4(-1)^k, a_2 = 2(1 - 4(-1)^k), a_4 = 1 + 2L_k + 4(-1)^k, a_1 = a_3 = 0$  且  $t = (-1)^n (\frac{2F_k}{d})^2$ , 则 (2) 式即  $f(x, y) = t$ . 由于  $\max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_4|\} = \max\{|a_0|, |a_4|\} \leq 2L_k + 5$ , 容易证明  $k > 5$  时  $2L_k + 5 < L_{k+2}$ , 故  $H_f < L_{k+2}$ . 此时由引理 2 得

$$\max(|x|, |y|) < \exp(3^{39} 4^{90} L_{k+2}^6 (\log L_{k+2})^7 (\log t)), \quad (6)$$

由引理 3,  $\max(|x|, |y|) = |x|$ , 且

$$x^2 = (F_{m-k} + \frac{1}{2}F_n) / d \geq (F_{m-k} + \frac{1}{2}F_n) / 2F_k > \frac{1}{2}F^{-k}, \quad (7)$$

且

$$|t| = (\frac{2F_k}{d})^2 \leq 4F_k^2 < \frac{4}{5}F^k, \quad (8)$$

其中  $T = (1 + \sqrt{5}) / 2$ . 结合 (6) ~ (8) 式有

$$\frac{1}{2}F^{-k} < \exp(2 \cdot 3^{39} 4^{90} L_{k+2}^6 (\log L_{k+2})^7 (\log t)),$$

得到

$$\ln \frac{1}{2} + (n - k) \ln T < 2 \cdot 3^{39} 4^{90} T^{6k+12} (k + 2)^7 \ln^7 T (\ln 0.8 + 2k \ln T), \quad (9)$$

于是  $n < k \cdot \exp(169.7 + 2.9k + 7 \ln(k + 2))$ .

定理证毕.

参考文献:

[1] Harborth H, Kemnitz A. Fibonacci triangles [J]. Applications of Fibonacci Numbers, 1988, 3: 129-132.

[2] 曹珍富. 数论中的问题与结果 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1996. 165-166.

[3] 何波. Fibonacci 三角形的一个充要条件及应用 [J]. 西南民族大学学报 (自然科学版), 2004, 30(3): 277-281.

[4] 柯召, 孙琦. 谈谈不定方程 [M]. 上海: 上海教育出版社, 1980. 75-76.

[5] Bugeaud Y, Györy K. Bounds for the solutions of Thue-Mahler equations and norm form equations [J]. Acta Arith, 1996, 74: 253-292.

[6] 乐茂华. Gel'fond-Baker 方法在丢番图方程中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1998. 59-64.

[7] 杨仕椿. 关于 Fibonacci 三角形和 Lucas 三角形的一些结论 [J]. 广西民族学院学报 (自然科学版), 2002, 11: 1-3, 6.

(责任编辑: 韦廷宗 邓大玉)