DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2005.04.007
广西科学 Guangxi Sciences 2005, 12(4): 262~ 264

一类二阶非线性微分方程的解的渐近性

Asymptotic Behaviour of the Solutions to a Class of Second Order Nonlinear Differential Equation

罗志敏,罗 娟
Luo Zhimin, Luo Juan

(广西师范大学数学系,广西桂林 541004)
(Department. of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 利用 Schauder不动点定理,研究二阶非线性微分方程 $u''= f(t,u,u'), t\geqslant 1$解 ($f\in C[[1,\infty)\times R\times R, R]$)的渐近性,给出方程解渐近于直线 $at+b(a,b\in R)$的一个充分条件.从而推广文献 [2]定理 1的结果,简化文献 [3]中定理 4成立的条件.
关键词: 微分方程 渐近性 非线性 Schauder不动点定理
中图法分类: O175 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2005)04-0262-03

Abstract: This paper concerned about the asymptotic behavior of solutions of the nonlinear differential equation: $u''= f(t,u,u'), t\geqslant 1$ where $f\in C[[1,\infty)\times R\times R, R]$. In our approach a key role is played by Schauder's fixed point theorem. A suffcient condition is given for this equation to have solutions behaving asymptotically like linear functions $at+b$ where $a,b\in R$. Our results improve theorem 1 of Reference [2]. And the conditions of theorem 4 of Reference [3] are simplified.
Key words: differential equation, asymptotic behavior, nonlinear, Schauder's fixed point theorem

微分方程解的渐近性研究中, M. Naito[1]利用不动点定理研究了二阶微分方程 $x''+a(t)f(x)=0, t>0$解的渐近性, O. Lipovan[2]同样利用不动点定理对二阶非线性微分方程 $u''=f(t,u), t\geqslant 1$解的渐近性进行了研究,得到了方程解渐近于直线 $at+b(t\to\infty)$的一个充分条件. F. M. Danan[3]研究了二阶非线性微分方程 $u''=f(t,u,u'), t\geqslant 1$解的渐近性,其主要方法是利用了 Gronwall-Bellman-Bihari 积分不等式.

本文用 Schauder不动点定理[4]研究二阶非线性微分方程 $u''=f(t,u,u'), t\geqslant 1$解的渐近性,给出方程解渐近于直线的一个充分条件,推广了文献 [2]的结果,简化了文献 [3]定理 4成立的条件.

定理 1 考查二阶非线性方程

$$u''=f(t,u,u'), t\geqslant 1, \tag{1}$$

其中, $f\in C[[1,\infty)\times R\times R, R]$,且满足

$$|f(t,u,u')|\leqslant h_1(t)g\left(\frac{|u|}{t}\right)+h_2(t)\mathrm{h}(|u'|)+h_3(t), t\geqslant 1, u\in R, u'\in R, \tag{2}$$

其中, $g,\mathrm{h}\in C(R^+,R^+)$, $h_1,h_2,h_3\in C([1,\infty),R^+)$,且满足

$$\int_1^{\infty} s h_i(s)\mathrm{d}s<\infty, i=1,2,3, \tag{3}$$

则对每一 $a,b\in R$,方程 (1) 都有定义在区间 $[T,\infty)(T=T(a,b))$上的解 $u(t)$,使得 $u(t)$当 $t\to\infty$时,渐近于一条直线 $at+b$,即:

当 $t\to\infty$时,有 $u(t)-(at+b)\to 0$成立.

证明 任取一 $a\in R$,令

$y(a)=u(t)-at, t\geqslant 1$,

则 (1) 式可以化为

$$y''(t)=f(t,y(t)+at,y'(t)+a). \tag{4}$$

注意到如果对每一 $b\in R$, (4) 式都有一解 $y(4)(t)$,使得当 $t\to\infty$时,有 $y(t)\to b$,则定理得证.

由 g, h的连续性,我们令

$$m=\sup_{0\leqslant f\leqslant |a|+|b|+1}|g(f)|, m'=\sup_{0\leqslant f\leqslant |a|+1}|\mathrm{h}(f)|,$$

收稿日期: 2005-05-11
修回日期: 2005-06-17
作者简介: 罗志敏 (1979-),男,湖南桃源人,主要从事动力系统与微分方程研究

且由$\int_1^{\infty} sh_i(s)\,ds < \infty$,可以得到

$$\int_1^{\infty}\int_t^{\infty} h_i(s)\,ds\,dt < \infty,\ i = 1, 2, 3. \qquad (5)$$

由(5)式,则可以选取充分大的 T,使得

$\int_T^{\infty}(\int_s^{\infty} h_1(r)\,dr)\,ds < \frac{1}{3m}$,$\int_T^{\infty}(\int_s^{\infty} h_2(r)\,dr)\,ds < \frac{1}{3m'}$和

$\int_T^{\infty}(\int_s^{\infty} h_3(r)\,dr)\,ds < \frac{1}{3}$ 同时成立.

我们定义空间:

$X = \{x \in C^1([T,\infty), R): x(t), x'(t)$均有界$\}$,

而且定义 X 中的范数:

$\| x \| = \sup\{|x(t)| + |x'(t)|\}, t \geqslant 1$,

则$(X, \|\cdot\|)$是 Banach空间.

在空间 X 中,当 $x_n \to x\ (n \to \infty)$时,有 $x_n(t) \to x(t)$和 $x_n'(t) \to x'(t)\ (n \to \infty)$在$[T,\infty)$的紧子区间上一致成立.

定义空间 X 中的子集:

$K = \{x \in X: |x(t) - b| \leqslant 1$,对于 $t \geqslant T\}$,

则显然 K 为 X 中的有界闭凸子集.

在 K 中定义算子 $F: K \to X$,且有:

$$(Fx)(t) = b + \int_t^{\infty}(\int_s^{\infty} f(r, x(r) + ar, x'(r) + a)\,dr)\,ds,\ t \geqslant T.$$

为了应用 Schauder不动点定理,本文证明以下 3 个命题.

命题 **1** F是 K到 K的映射.

任意取 $x \in K$,我们有:

$$|(Fx)(t) - b| \leqslant \int_t^{\infty}(\int_s^{\infty} |f(r, x(r) + ar, x'(r) + a)|\,dr)\,ds \leqslant \int_t^{\infty}(\int_s^{\infty} (h_1(r) g(|\frac{x(r)}{r} + a|) + h_2(r) h(|x'(r) + a|) + h_3(r))\,dr)\,ds \leqslant$$
$$\frac{1}{m}\int_t^{\infty}(\int_s^{\infty} h_1(r)\,dr)\,ds + \frac{1}{m'}\int_t^{\infty}(\int_s^{\infty} h_2(r)\,dr)\,ds + \int_t^{\infty}(\int_s^{\infty} h_3(r)\,dr)\,ds \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1, t \geqslant T.$$

由此可以看出 $F(K) \subset K$,故 F是 K到 K的映射.

命题 **2** F是连续映射.

取$\{x_n\} \subset K$,当 $n \to \infty$ 时,有 $x_n \to x$,则有 $x_n(t) \to x(t)$和 $x_n'(t) \to x'(t)\ (n \to \infty)$在$[T,\infty)$的紧子区间上一致成立.我们有

$$|(Fx_n)(t) - (Fx)(t)| \leqslant \int_t^{\infty}(\int_s^{\infty} |f(r, x_n(r) + r, x_n'(r) + a) - f(r, x(r) + r, x'(r) + a)|\,dr)\,ds \leqslant \int_t^{\infty}(\int_s^{\infty} 2(mh_1(r) + m'h_2(r) + h_3(r))\,dr)\,ds.$$

由 Lebesgue控制收敛定理和关系式(5),有

$(Fx_n)(t) \to (Fx)(t), (n \to \infty)$,

在$[T,\infty)$上一致成立,则 F在 K中是连续的.

命题 **3** F为紧的映射.

取$\{x_n\} \subset K$,定义

$$f_n(s) = \int_s^{\infty} f(r, x_n(r) + ar, x_n'(r) + a)\,dr, n \geqslant 1, s \geqslant T.$$

我们要证明$\{f_n\}$在空间 $L^1([T,\infty), R)$中是有界的,而且

$$\lim_{p \to \infty}\int_p^{\infty} |f_n(s)|\,ds = 0 \qquad (6)$$

一致成立$(n \geqslant 1)$.事实上

$$\| f_n \| = \int_E |f_n(s)|\,ds = \int_T^{\infty} |f_n(s)|\,ds \leqslant m\int_T^{\infty}\int_s^{\infty} h_1(r)\,dr + m'\int_T^{\infty}\int_s^{\infty} h_2(r)\,dr + \int_T^{\infty}\int_s^{\infty} h_3(r)\,dr.$$

由关系式(5),故$\{f_n\}$有界.且有

$$\int_p^{\infty} |f_n(s)|\,ds \leqslant m\int_p^{\infty}\int_s^{\infty} h_1(r)\,dr + m'\int_p^{\infty}\int_s^{\infty} h_2(r)\,dr + \int_p^{\infty}\int_s^{\infty} h_3(r)\,dr,$$

则由关系式(5),可以看出(6)式一致成立.

接下来我们证明,对 $\forall W > 0$,当 $W \to 0$时,有

$$\| f_W(f_n) - f_n \|_{L^1([T,\infty),R)} \to 0 \qquad (7)$$

一致成立.

这里 f_W由下面给出:

$(f_W f)(t) = f(t + W), t \geqslant 1, W \geqslant 0$.

因此我们有

$$\| f_W(f_n) - f_n \| = \int_T^{\infty} |f_n(s + W) - f_n(s)|\,ds \leqslant \int_T^{\infty}(\int_s^{s+W} |f(r, x_n(r) + ar, x_n'(r) + a)|\,dr)\,ds \leqslant$$
$$\int_T^{\infty}(\int_s^{s+W} (h_1(r) g(|\frac{x(r)}{r} + a|) + h_2(r) h(|x'(r) + a|) + h_3(r), dr)\,ds \leqslant m\int_T^{\infty}\int_s^{s+W} h_1(r)\,dr + m'\int_T^{\infty}\int_s^{s+W} h_2(r)\,dr + \int_T^{\infty}\int_s^{s+W} h_3(r)\,dr,$$

此不等式不依赖于 $n(n\geqslant 1)$.

由关系式(5),下面不等式明显成立:

$$\int_s^{s+W} h_i(r)\,dr\leqslant\int_s^{\infty} h_i(r)\,dr, s\geqslant T, i=1,2,3,$$

则由 Lebesgue控制收敛定理,(7)式成立.

由(6),(7)式以及 $\{f_n\}(n\geqslant 1)$ 在空间 $L^1([T,\infty],R)$ 中有界,由 M. Riesz-Tamarkin定理[5],则 $\{f_n\}(n\geqslant 1)$ 在空间 $L^1([T,\infty],R)$ 相对紧.

由 F的定义

$$(Fx_n)(t)=b+\int_t^{\infty} f_n(s)\,ds,$$

可以容易看出序列 $\{Fx_n\}(n\geqslant 1)$ 在 K中也是相对紧的,从而 F是紧的映射.

于是,我们由 Schauder不动点定理可知在 K中,F有一个不动点 $y\in K$,即

$$y(t)=b+\int_t^{\infty}\left(\int_s^{\infty} f(r,y(r)+ar,y'(r)+a)\,dr\right)ds,$$

$t\geqslant T$,

成立,则 $y(t)$是(4)式的一个解,且有 $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=b$成立,从而定理得证.

为说明定理成立,$T(a,b)$对常数 a,b的依赖性,考查方程(1),其中,

$$f(t,x,x')=\begin{cases}0, & t\geqslant 3,\\ 2(3-t)(x+t)[(x+t^2)^2+(x+t^2)+1]+\dfrac{(3-t)(t-2)^2}{t^5}\sin\left(x'+\dfrac{1}{(t-2)^2}+2t\right), & 1\leqslant t<3, x\geqslant -t^2,\\ 0, & 1\leqslant t<3, x<-t^2.\end{cases}$$

易知此方程满足定理 1的条件.

注意到 $x(t)=-10, t\geqslant 1$是此方程的一个解,故此时 $a=0, b=-10, T(a,b)=T(0,-10)=1$.

同时,我们不妨取 $a=-7, b=13$,则有:

$$x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t-2}-t^2, & t\in(2,3],\\ -7t+13, & t\in(3,\infty),\end{cases}$$

是方程的一个解.此时 $T(a,b)=T(-7,10)>2$.

参考文献:

[1] Naito M. Asymptotic behaviour of the solutions of second order differential equations[J]. Trans Amer Math Soc, 1984,(282): 577-588.

[2] Lipovan O. On the asymptotic behaviour of the solutions to a class of second order non-linear differential equations [J]. Glasgow Math J, 2003,(45): 179-187.

[3] Dnanan F M. Integral inequalities of Gronwall-Bellman-Bihari type and asymptotic behaviour of certain second order[J]. J Math Anal Appl, 1990,(108): 383-386.

[4] Nemyckii V. The fixed point method in analysis[J]. Amer Math Soc Transl, 1963,(34): 1-37.

[5] Berger M S.非线性与泛函分析[M].余庆余译.北京:科学出版社,1989. 33-35.

(责任编辑:黎贞崇)

中亚艾滋病流行趋势可能恶化

联合国艾滋病规划署中亚地区协调员萨夫琴科在阿拉木图的新闻发布会上说,中亚地区现有艾滋病病毒感染者和艾滋病患者约 5万人,其中三分之一集中在哈萨克斯坦。目前中亚地区已出现艾滋病患者和艾滋病死亡者人数上升的势头。萨夫琴科认为,可能导致中亚地区情况恶化的因素还包括女性感染人数的增长,以及由女性感染者生育的婴儿数量增加等。萨夫琴科所指的中亚地区包括哈萨克斯坦、吉尔吉斯斯坦、乌兹别克斯坦、塔吉克斯坦和土库曼斯坦 5个国家。这一地区现有人口约 5800万。据哈萨克斯坦等国公布的官方统计数字,这些国家艾滋病病毒感染者和艾滋病患者共计约 1.2万人。

虽然目前艾滋病在中亚国家处于低水平蔓延阶段,但静脉注射毒品人数的大量增加以及其他因素将可能导致中亚地区艾滋病流行趋势进一步恶化。

(据科学网)