广西科学 Guangxi Sciences 2006，13(1)：1～3

交换群和循环群的若干充分必要条件*

Some Necessary and Sufficient Conditions of Abelian Groups and Cyclic Groups

李世荣，史江涛，何宣丽

LI Shi-rong，SHI Jiang-tao，HE Xuan-li

（广西大学数学与信息科学学院，广西南宁　530004）

（College of Mathematics and Information Sciences，Guangxi University，Nanning，Guangxi，530004，China）

摘要：利用交换子群的中心化子和正规化子对有限群结构的强的控制作用，通过限制二元生成交换子群、初等交换子群、极大交换子群、循环子群、极小子群等的中心化子一致于正规化子，得到交换群和循环群的7个充分必要条件，改进了Zassenhaus定理和陈重穆在文献[2]中提出的定理0.3.

关键词：有限群　交换群　循环群　中心化子　正规化子

中图法分类号：O152.1　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2006)01-0001-03

Abstract：The centralizers and normalizers of abelian subgroups play a strong part in the structure of finite groups. In this paper，we consider some abelian subgroups，such as abelian subgroups generated by two elements，elementary abelian subgroups，maximal abelian subgroups，cyclical subgroups，minmal subgroups，whose centralizers are equal to its normalizers，so we obtain some necessary and sufficient conditions of abelian groups and cyclic groups，and improve Zassenhaus Theorem and Chen Zhongmu，Theorem 0.3 in Reference [2].

Key words：finite group，abelian group，cyclic group，centralizers，normalizers

交换子群的中心化子和正规化子对有限群的结构有很强的控制作用，目前已有不少研究. 例如，H. Zassenhaus在文献[1]中证明对G的每个交换子群A恒有$C_G(A)=N_G(A)$，当且仅当G是交换的. 陈重穆在文献[2]定理0.3中证明若G的每个交换p-子群的正规化子一致于中心化子，则G为交换的. Burnside证明若G有一个交换$Sylow p$-子群P使得$C_G(P)=N_G(P)$，则G为p-幂零的[3]. M. Miyamoto在文献[4]中证明若对G的每个交换子群A恒有$N_G(A)/C_G(A)\cong Aut(A)$，则$G$可解. 李世荣在文献[5]中给出了对每个交换子群$A$恒有$A=C_G(A)$或$C_G(A)=N_G(A)$的有限群的完全分类. 杜妮在文献[6]中证明了若对每个极小子群X恒有$C_G(X)=N_G(X)$，则G为2-闭.

本文通过限制某些交换子群的中心化子一致于正规化子，得到交换群和循环群的7个充分必要条件，改进Zassenhaus定理和陈重穆在文献[2]中提出的定理0.3.

文中所使用的符号$G=[N]H$表示G是N与H的半直积，$N\trianglelefteq G$. 其他符号都是标准的，与文献[3]相同. 本文所涉及的群都是有限群.

1　相关引理

引理1.1[2]　设G为内交换p-群，则$G=\langle a,b\rangle$，$G'=\langle c\rangle$，$c=[a,b]$，且$G'\leqslant Z(G)$.

引理1.2[2]　设G为内幂零群，则

(1)G的阶为$p^\alpha q^\beta$，其中p,q为相异素数；

(2)G有正规$Sylow$子群，设为$Sylow q$-子群Q，此时G的$Sylow p$-子群P循环，设$P=\langle a\rangle$，则$\Phi(P)=\langle a^p\rangle$含在$G$的中心$Z(G)$内；

(3)若Q为$Abel$群，则Q为初等$Abel$群.

引理1.3　设G为有限群，A为G的极大交换子群，则$A=C_G(A)$.

证明　若$C_G(A)>A$，取$x\in C_G(A)\backslash A$，令$B=\langle x,A\rangle$，则B交换且$B>A$，矛盾于A的选取，故$A=$

收稿日期：2005-08-19

作者简介：李世荣(1940-)，男，湖南人，教授，主要从事群论研究。

*广西自然科学基金(0249001)资助项目。

$C_G(A)$.

引理 1.4[3] 设 G 为幂零群，若 $H < G$，则 $H < N_G(H)$.

引理 1.5[3] 有限内交换群 G 必为可解群.

引理 1.6[2] 若 G 是内循环群，则 G 为 $p^a q$ 阶 q-基本群，或 p^2 阶初等交换群，或四元数群.

引理 1.7[3] 设 G 为有限 p-群，且 G 的每个交换正规子群皆为循环群，

(1) 若 $p > 2$，则 G 本身是循环群；

(2) 若 $p = 2$，则 G 中有循环极大子群.

引理 1.8[7] 设 G 为一个非 *Abel* 2-群，G/G' 是 $(2,2)$ 型初等交换群，则 G 是一个二面体群或广义四元数群或拟二面体群.

引理 1.9[2] 设 p 为奇素数，如果 p-群 G 的每个 p^2 阶子群为循环，则 G 为循环.

2 主要结果及其证明

定理 2.1 设 G 幂零，则 G 交换当且仅当对每个二元生成交换子群 A 均有 $C_G(A) = N_G(A)$.

证明 必要性显然成立，下面证明充分性.

设 G 为极小阶反例，显然定理条件对子群遗传，则 G 为内交换群. 因为 G 幂零，设 $G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_r$，$P_i \in Sylp_i(G)$，$i = 1,2,\cdots,r$. 若 $r > 1$，则每个 P_i 均交换，从而 G 交换，矛盾，故 $r = 1$，G 为内交换 p-群，由引理 1.1，$G = \langle a,b\rangle$，$G' = \langle c\rangle$，$c = [a,b]$，且 $G' \leqslant Z(G)$，令 $A = \langle a,c\rangle$，则 A 交换，且 $A \trianglelefteq G$，于是由假设 $C_G(A) = N_G(A) = G$，$A \leqslant Z(G)$，故 $a \in Z(G)$，G 交换，矛盾，因此极小阶反例不存在，故 G 交换.

定理 2.2 设 G 幂零，则 G 交换当且仅当对每个 *Sylow* 子群的极大子群 A 均有 $C_G(A) = N_G(A)$.

证明 必要性显然成立，下面证明充分性.

设 P 为 G 的任一 *Sylow* 子群，A 为 P 的极大子群，由假设 $C_G(A) = N_G(A)$，A 交换，若 P 不交换，则 A 为 P 的极大交换子群，由引理 1.3，$A = C_P(A) = N_P(A)$，由引理 1.4，$P = A$，矛盾，故 P 交换，又 G 幂零，由 P 的任意性，G 交换.

定理 2.3 设 G 为 *Sylow* 子群皆交换的有限群，则 G 交换当且仅当对每个初等交换 p-子群 A 均有 $C_G(A) = N_G(A)$，p 为 $|G|$ 的任一素因子.

证明 必要性显然成立，下面证明充分性.

先证 G 幂零，设 G 为极小阶反例，显然定理条件对子群遗传，则 G 为内幂零，又 G 的 *Sylow* 子群皆交换，由引理 1.2，$G = [P]Q$，$P \in Sylp(G)$，$Q \in Sylq(G)$，且 P 为初等交换群，由假设 $C_G(P) = N_G(P)$，又 $P \trianglelefteq G$，于是 $C_G(P) = N_G(P) = G$，$P \leqslant Z(G)$，$G = P \times Q$，G 幂零，矛盾，因此极小阶反例不存在，故 G 幂零，又 G 的 *Sylow* 子群皆交换，故 G 交换.

推论 2.1 设 G 为有限群，则 G 交换当且仅当对每个二元生成交换 p-子群及初等交换 p-子群 A 均有 $C_G(A) = N_G(A)$，p 为 $|G|$ 的任一素因子.

证明 必要性显然成立，下面证明充分性.

设 P 为 G 的任一 *Sylow* 子群，A 为 P 的任一二元生成交换子群，由假设 $C_G(A) = N_G(A)$，于是 $C_P(A) = N_P(A)$，由定理 2.1，P 交换，再由定理 2.3 知 G 交换.

推论 2.2 设 G 为有限群，则 G 交换当且仅当对每个 *Sylowp*- 子群的极大子群及初等交换 p- 子群 A 均有 $C_G(A) = N_G(A)$，p 为 $|G|$ 的任一素因子.

证明 必要性显然成立，下证充分性.

设 P 为 G 的任一 *Sylow* 子群，A 为 P 的极大子群，由假设 $C_G(A) = N_G(A)$，于是 $C_P(A) = N_P(A)$，由定理 2.2，P 交换，再由定理 2.3 知 G 交换.

注 推论 2.1 和推论 2.2 改进了 Zassenhaus 定理和陈重穆在文献[2]提出的定理 0.3.

定理 2.4 设 G 为有限群，则 G 交换当且仅当对每个非交换子群的极大交换子群 A 均有 $C_G(A) = N_G(A)$.

证明 必要性显然成立，下面证明充分性.

先证 G 幂零，若 G 非幂零，则存在 $K \leqslant G$，使得 K 为内幂零，由引理 1.2，$K = [P]Q$，$P \in Sylp(K)$，$Q \in Sylq(K)$，Q 循环，则 P 必交换，否则，若 P 不交换. 设 P_1 为 P 的极大交换子群，由假设 $C_G(P_1) = N_G(P_1)$，于是 $P_1 = C_P(P_1) = N_P(P_1)$，由引理 1.4，$P = P_1$ 交换，矛盾，故 P 交换，令 Q_1 为 Q 的极大子群，因为 $P \trianglelefteq K$，则 $PQ_1 \leqslant K$. 又 $|K : PQ_1| = |PQ : PQ_1| = q$，则 PQ_1 为 K 的极大子群. 于是 PQ_1 幂零，$PQ_1 = P \times Q_1$，PQ_1 交换，又 K 非交换，则 PQ_1 为 K 的极大交换子群. 由假设 $C_G(PQ_1) = N_G(PQ_1)$，又 $Q_1 \trianglelefteq Q$，于是 $Q_1 \trianglelefteq PQ_1Q = PQ = K$，从而 $PQ_1 \trianglelefteq K$，于是 $C_K(PQ_1) = N_K(PQ_1) = K$，$P \leqslant PQ_1 \leqslant Z(K)$，$K = P \times Q$，$K$ 幂零，矛盾，故 G 幂零. 若 G 非交换，设 A 为 G 的极大交换子群，由假设 $C_G(A) = N_G(A)$ 和引理 1.3，$A = C_G(A)$，于是 $A = N_G(A)$，由引理 1.4，$G = A$ 交换，矛盾，故 G 交换.

定理 2.5 设 G 为有限群，则 G 交换当且仅当对每个极大子群 A 均有 $C_G(A) = N_G(A)$.

证明 必要性显然成立，下面证明充分性.

反证，若 G 不交换，由于对每个极大子群 A 均有 $C_G(A) = N_G(A)$，A 交换，于是 G 为内交换群，由引理

1.5,G可解,则G必有一个极大子群是正规子群,不妨设极大子群$A \trianglelefteq G$,则$N_G(A)=G$,又A为G的极大交换子群,由引理1.3,$A=C_G(A)$,于是$A=C_G(A)=N_G(A)=G$,矛盾,故G交换.

定理2.6 设G为$Sylow$子群皆循环的有限群,则G循环当且仅当对每个极小子群A均有$C_G(A)=N_G(A)$.

证明 必要性显然成立,下面证明充分性.

设G为极小阶反例,显然定理条件对子群遗传,则G为内循环群,由引理1.6及定理条件知G只可能为$p^a q$阶q-基本群,设$G=[Q]P,Q\in Syl_q(G),P\in Syl_p(G),|Q|=q$,于是$C_G(Q)=N_G(Q)=G,Q\leqslant Z(G),G=Q\times P$,$G$幂零,矛盾,因此极小阶反例不存在,故$G$循环.

推论2.3 设G为每个p^2阶子群皆循环的奇阶群,$p\in\pi(G)$,则G循环当且仅当对每个极小子群A均有$C_G(A)=N_G(A)$.

证明 因为G为奇阶群,由引理1.9,G的每个$Sylow$子群皆为循环群,从而由定理2.6知结论成立.

注 推论2.3对偶阶群不一定成立,例如四元数群Q_8,其4阶子群皆循环,其2阶子群A满足$C_G(A)=N_G(A)$,但Q_8非循环.对于2-群,有下述结论成立:

定理2.7 设G为每个2^2阶子群皆循环的有限2-群,则G循环当且仅当对每个2^2阶循环子群A均有$C_G(A)=N_G(A)$.

证明 必要性显然成立,下面证明充分性.

设G为极小阶反例,显然定理条件对子群遗传,则G为内循环群,由引理1.6及定理条件知G只可能为四元数群,取$x\in G,o(x)=4$,则$C_G(\langle x\rangle)=\langle x\rangle$,$N_G(\langle x\rangle)=G,C_G(\langle x\rangle)\neq N_G(\langle x\rangle)$,矛盾,因此极小阶反例不存在,故$G$循环.

定理2.8 设G为每个交换正规子群皆循环的有限2-群,则G循环当且仅当对每个循环子群A均有$C_G(A)=N_G(A)$.

证明 必要性显然成立,下面证明充分性.

由引理1.7,G中有循环极大子群$\langle x\rangle$,由$\langle x\rangle$的极大性,$\langle x\rangle \trianglelefteq G$,于是由假设$C_G(\langle x\rangle)=N_G(\langle x\rangle)=G$,$\langle x\rangle\leqslant Z(G)$,又$\langle x\rangle$为$G$的极大子群,则存在$y\in G\backslash\langle x\rangle$,使得$G=\langle x,y\rangle$,于是$G$交换,由假设$G$循环.

定理2.9 设G为有限2-群,且G/G'为(2,2)型初等交换群,若对每个循环子群$A\leqslant G$,均有$C_G(A)=N_G(A)$,则G交换.

证明 反证,若G非交换,由引理1.8,则G为二面体群或广义四元数群或拟二面体群.

(1)若G为二面体群,$G=\langle a,b\rangle,a^b=a^{-1},a^{2^n}=b^2=1$,于是由假设$C_G(\langle a\rangle)=N_G(\langle a\rangle)=G,\langle a\rangle\leqslant Z(G)$,$G$交换,矛盾,故$G$不为二面体群.

(2)若G为广义四元数群,$G=\langle a,b\rangle,a^b=a^{-1}$,$a^{2^n}=1,b^2=a^{2^{n-1}}$.于是由假设$C_G(\langle a\rangle)=N_G(\langle a\rangle)=G,\langle a\rangle\leqslant Z(G)$,$G$交换,矛盾,故$G$不为广义四元数群.

(3)若G为拟二面体群,$G=\langle a,b\rangle,a^b=a^{-1+2^{n-1}},a^{2^n}=b^2=1$,于是由假设$C_G(\langle a\rangle)=N_G(\langle a\rangle)=G,\langle a\rangle\leqslant Z(G)$,$G$交换,矛盾,故$G$不为拟二面体群.综上所述,故$G$交换.

参考文献:

[1] GOHEEN H E. On a theorem of Zassenhaus[J]. Proceedings America Mathematical Society,1954,5:799-800.

[2] 陈重穆.内外-$\sum$群与极小非$\sum$群[M].重庆:西南师范大学出版社,1988.

[3] 徐明曜.有限群导引(上册)[M].北京:科学出版社,1999.

[4] MIYAMOTO M. Solvability of some groups[J]. Hokkaido Mathematical Journal,1982,11:106-110.

[5] SHIRONG LI. The Structure of NC-Groups[J]. Journal of Algebra,2001,241:611-619.

[6] 杜妮.关于极小子群的中心化子[J].厦门大学学报,2002,1:13-16.

[7] 贝.胡佩特[德].有限群论[M].福州:福建人民出版社,1992.

(责任编辑:黎贞崇)