两类三阶非自治系统的全局渐近稳定性*

The Global Asymptotic Stability of Two Classes 3rd Non-autonomous System

邓春红[1,2],刘永建[2]

DENG Chun-hong[1,2],LIU Yong-jian[2]

(1.湖南科技学院数学与计算科学系,湖南永州 425006;2.广西师范大学数学与计算机科学学院,广西桂林 541004)

(1. Department of Mathematics and Computer Sciences, Hunan University of Science and Engineer, Yongzhou, Hunan, 425006, China; 2. College of Mathematics and Computer Science, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要:利用 Liapunov 函数法,给出两类方程 $\dddot{x}+g(\dot{x})\ddot{x}+b\dot{x}+f(x)=e(t,x,\dot{x},\ddot{x})$ 和 $\dddot{x}+g(\dot{x})\ddot{x}+f(x)\dot{x}+cx=e(t,x,\dot{x},\ddot{x})$ 零解全局渐近稳定性的充分条件,推广文献[1～4]中的相关结论.

关键词:非自治系统 Liapunov 函数 全局渐近稳定性

中图法分类号:O175.14 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2006)01-0006-03

Abstract: By Liapunov's second method, we get the sufficient conditions for the global asymptotic stability of zero solutions of the two classes of equations: $\dddot{x}+g(\dot{x})\ddot{x}+b\dot{x}+f(x)=e(t,x,\dot{x},\ddot{x})$ and $\dddot{x}+g(\dot{x})\ddot{x}+f(x)\dot{x}+cx=e(t,x,\dot{x},\ddot{x})$, and the related results in References [1～4] are extended.

Key words: non-autonomous system, Liapunov function, global asymptotic stability

文献[1～4]通过构造 Liapunov 函数,给出多个三阶非线性常微分方程零解全局渐近稳定性的充分条件.本文给出两类三阶非自治系统

$$\dddot{x}+g(\dot{x})\ddot{x}+b\dot{x}+f(x)=e(t,x,\dot{x},\ddot{x}),f(0)=0, \quad (0.1)$$

$$\dddot{x}+g(\dot{x})\ddot{x}+f(x)\dot{x}+cx=e(t,x,\dot{x},\ddot{x}) \quad (0.2)$$

的零解全局渐近稳定性的充分条件,这两类方程比文献[1,2]讨论的方程更为一般,显然推广了文献[1～4]的相关结论.

1 相关引理

三阶系统

$$\begin{cases}\dot{x}=X(t,x,y,z),\\ \dot{y}=Y(t,x,y,z),\\ \dot{z}=\sum_{i=1}^{3}Z_i(t,x,y,z),\end{cases} \quad (1.1)$$

其中,$X,Y,Z_i(i=1,2,3)$ 在区域 R 上连续且满足解的存在唯一性条件.

又 $X(t,0,0,0)=Y(t,0,0,0)=Z_i(t,0,0,0)=0,i=(1,2,3),t\geqslant 0$.

引理 1[2] 假如下列各函数均连续:

(1) $zY(t,x,y,z)>0,(z\neq 0)$, $Y^*(x,y,z)\leqslant |Y(t,x,y,z)|\leqslant Y^{**}(x,y,z)$, $Y^*(x,y,z)>0,(z\neq 0)$;

(2) $xZ_1(t,x,y,z)<0,(z\neq 0)$, $Z_1^*(x,y,z)\leqslant |Z_1^*(t,x,y,z)|\leqslant Z_1^*(x,y,z)$, $Z_1^*(x,y,x)>0,(x\neq 0)$;

(3) $|Z_2(t,x,y,z)|\leqslant Z_2^*(x,y,z),Z_2^*(x,0,0)=0$;

(4) $|Z_3(t,x,y,z)|\leqslant e(t)Z_3^*(x,y,z),\int_0^{\infty}e(t)\mathrm{d}t=E<\infty$;

收稿日期:2004-12-06

修回日期:2005-02-24

作者简介:邓春红(1979-),女,湖南永州人,讲师,主要从事微分方程的稳定性及定性研究。

*湖南省自然科学基金项目(03JJY3014)和永州市科技局项目资助。

(5) 存在具有无穷小上界的无限大正定函数 $V(t,x,y,z)$,

即 $0\leqslant V^{*}(x,y,z)\leqslant V(t,x,y,z)\leqslant V^{**}(x,y,z), V^{**}(0,0,0)=0$,

$V^{*}(x,y,z)>0(x^{2}+y^{2}+z^{2}\neq 0)$,

$\lim\limits_{x^{2}+y^{2}+z^{2}\to\infty} V^{*}(x,y,z)=+\infty$.

$\dot{V}(t,x,y,z)|_{(2.1)}\leqslant -\zeta(t,x,y,z)+\eta(t)V(t,x,y,z)$,其中 $\zeta(t,x,y,z)\geqslant\rho(t)\zeta^{*}(x,y,z)$.

$\rho(t)\geqslant 0,\zeta^{*}(x,0,z)\equiv 0,\zeta^{*}(x,y,z)>0(y\neq 0);\eta(t)\geqslant 0(t\geqslant 0)$ 且 $\int_{0}^{\infty}\eta(t)\mathrm{d}t=N<+\infty$ 对于任意的属于 $(-\infty,+\infty)$ 的互补相交的区间序列 $(t_{k},t_{k}')(k=1,2,\cdots)$ 只要存在 $r>0$,使得 $\Delta_{k}=t_{k}'-t_{k}\geqslant r>0(k=1,2,\cdots)$ 就有 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\int_{k}^{t_{k}'}\rho(t)\mathrm{d}t=+\infty$,则系统(1.1)的零解为全局渐近稳定的.

2 主要结果及证明

将方程(0.1)化为等价系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=z,\\ \dot{z}=-f(x)-by-g(y)z\\ \quad +e(t,x,y,z),\end{cases} f(0)=0, \qquad (2.1)$$

定理1 设 $f(x),g(y)$ 在 R 上连续,$f'(x)>0$,$b>0$,若存在常数 $a>0$,使 $\inf g(y)\geqslant a,\inf f'(x)<ab$,且 $|e(t,x,y,z)|\leqslant\tilde{e}(t)(|y|+|z|),\int_{0}^{\infty}\tilde{e}(t)\mathrm{d}t=E<+\infty$,则系统(2.1)的零解是全局渐近稳定的.

证明 在定理假设条件下,易知满足引理1的条件(1)~(4),故只需证明满足条件(5)的 $V(t,x,y,z)$ 存在.

取 $V(t,x,y,z)=a\int_{0}^{\infty}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta+f(x)y+\frac{1}{2}(z+ay)^{2}+\frac{1}{2}by^{2}+a\int_{0}^{y}[g(\eta)-a]\eta\mathrm{d}\eta$ 在定理条件下是定正的.事实上

$V(t,x,y,z)=a\int_{0}^{x}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2b}f^{2}(x)+\frac{b}{2}(y+\frac{f(x)}{b})^{2}+\frac{1}{2}(z+ay)^{2}+a\int_{0}^{y}[g(\eta)-a]\eta d\eta$,

记 $H(x)=a\int_{0}^{x}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta-\frac{1}{2b}f^{2}(x)$,

则 $H(0)=0$,

由 $f'(x)>0$ 知 $f(x)$ 单调增加,有 $\operatorname{sgn}f(x)=\operatorname{sgn}x$,而 $H'(x)=\frac{1}{b}[ab-f'(x)]f(x)$,在 $x>0$ 时,$H(x)$ 单调增加,在 $x<0$ 时单调减少,又从 $H(0)=0$ 知当 $x\neq 0$ 时,$H(x)>0$.因而 $V(t,x,y,z)$ 非负,当 $V=0$ 时,有 $H(x)=0,y+\frac{1}{b}f(x)=0,z+ay=0$,则有 $x=0,y=0,z=0$,说明 $V(t,x,y,z)$ 定正.

由 $\inf g(y)\geqslant a,\inf f'(x)<ab$,知存在 $\varepsilon>0$,使 $g(y)-a>\varepsilon,ab-f'(x)>\varepsilon$.

当 $y\neq 0$ 时,$V(t,x,y,z)\geqslant a\int_{0}^{y}[g(\eta)-a]\eta\mathrm{d}\eta>\frac{a}{2}\varepsilon y^{2}>0$,当 $y=0,x^{2}+z^{2}\neq 0$ 时,$V(t,x,y,z)=a\int_{0}^{x}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta+\frac{1}{2}z^{2}$,由 $f'(x)>0,f(0)=0$ 知 $xf(x)>0(x\neq 0)$,故 $V(t,x,y,z)$ 是无限大正定函数.又 $V(t,x,y,z)\leqslant(a+1)\int_{0}^{x}f(\zeta)\mathrm{d}\zeta+\frac{b+1}{2}(y+\frac{f(x)}{b})^{2}+(z+ay)^{2}+(a+1)\int_{0}^{y}[g(\eta)-a]\eta\mathrm{d}\eta$,

且上式右端在(0,0,0)处取值为0,因此 $V(t,x,y,z)$ 具有无穷小上界.

$\dot{V}_{(2.1)}=-[g(y)-a]z^{2}-(ab-f'(x))y^{2}+(z+ay)e(t,x,y,z)\leqslant(z+ay)e(t,x,y,z)-\varepsilon y^{2}\leqslant-\varepsilon y^{2}+2(1+a)\tilde{e}(t)[y^{2}+(ay+z)^{2}]\leqslant-\varepsilon y^{2}+4(1+a)(\frac{1}{a\varepsilon}+1)\tilde{e}(t)V$,

令 $\eta(t)=4(1+a)(\frac{1}{\varepsilon}+1)\tilde{e}(t)$,

则 $\int_{0}^{\infty}\eta(t)\mathrm{d}t=4(1+a)(\frac{1}{\varepsilon}+1)\int_{0}^{\infty}\tilde{e}(t)t<+\infty$.

综上所述,由引理1知系统(2.1)的零解是全局渐近稳定的.

定理1证毕.

将方程(0.2)化为等价系统

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=z,\\ \dot{z}=-cx-f(x)y\\ \quad -g(y)z+e(t,x,y,z).\end{cases} \qquad (2.2)$$

定理2 设 $f(x),g(y)$ 在 R 上连续,$c>0$,如果存在 $b>0$ 使 $f(x),g(y)$ 满足下列条件:

(1) $\inf f(x)>b$;

(2) $\inf g(y)>\frac{c}{b}$;

(3) $f'(x)y\leqslant 0$ 并且 $|e(t,x,y,z)|\leqslant\tilde{e}(t)(|x|+|y|+|z|),\int_{0}^{\infty}\tilde{e}(t)\mathrm{d}t=E<+\infty$,

则(2.2)的零解是全局渐近稳定的.

证明 由已知条件知(2.2)满足引理1条件(1)~(4),只需证明满足条件(5)即可.

取 $V(t,x,y,z)=\frac{1}{2}c^{2}x^{2}+bcxy+b\int_{0}^{y}f(x)\eta\mathrm{d}\eta+c\int_{0}^{y}g(\eta)\eta\mathrm{d}\eta+cyz+\frac{b}{2}z^{2}=\frac{1}{2}(cx+by)^{2}+b\int_{0}^{y}[f(x)-b]\eta\mathrm{d}\eta+\frac{b}{2}(\frac{c}{b}y+z)^{2}+c\int_{0}^{y}[g(\eta)-\frac{c}{b}]\eta\mathrm{d}\eta$,

易知 $V(t,x,y,z)\geqslant 0$,

当 $V=0$ 时，

有 $\frac{b}{2}y^2(f(x)-b)=0, cx+by=0, \frac{c}{b}y+z=0$，又 $f(x)-b>0$，从而 $x=y=z=0$，因而 $V(t,x,y,z)$ 是定正的. 由于 $\inf g(y)>\frac{c}{b}$，则存在 $\varepsilon>0$ 使 $g(y)-\frac{c}{b}>\varepsilon$.

当 $y\neq 0$ 时，$V(t,x,y,z)>\frac{c}{2}\varepsilon y^2>0$；

当 $y=0, x^2+z^2\neq 0$ 时，$V(t,x,y,z)=\frac{c}{2}x^2+\frac{b}{2}z^2>0$，故 $V(t,x,y,z)$ 是无限大正定函数.

又 $V(t,x,y,z)\leqslant(cx+by)^2+(b+1)\int_0^y[f(x)-b]\eta d\eta+b(\frac{c}{b}y+z)^2+(c+1)\int_0^y[g(\eta)-\frac{c}{b}]\eta d\eta$，

且上式右端在 $(0,0,0)$ 处取值为 0，因而 $V(t,x,y,z)$ 有无穷小上界.

$\dot{V}_{(2.2)}=-c[f(x)-b]y^2-[bg(y)-c]z^2+\int_0^y bf'(x)y\eta d\eta+(cy+bz)e(t,x,y,z)\leqslant -c\varepsilon y^2+4(1+\frac{c+1}{b}+\frac{b+1}{c})(2+2b+\frac{2}{c\varepsilon})\tilde{e}(t)$，

令 $\eta(t)=4(1+\frac{c+1}{b}+\frac{b+1}{c})(2+2b+\frac{2}{c\varepsilon})\tilde{e}(t)$，

由条件 $\int_0^\infty\tilde{e}(t)dt=E<+\infty$ 知

$$\int_0^\infty\eta(t)dt<+\infty,$$

由引理 1 知(2.2)的零解是全局渐近稳定的.

定理 2 证毕.

3 算例

例 1 考虑三阶非自治系统 $\dddot{x}+(\frac{1}{b}+1+e^{\dot{x}})\ddot{x}+b\dot{x}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{1+t^2}(y+z)$ 的全局渐近稳定性.

解 这里 $f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}, f'(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}\geqslant 1>0, g(y)=\frac{1}{b}+1+e^y\geqslant\frac{1}{b}+1$，取 $a=\frac{1}{b}+1$，则 $\inf g(y)\geqslant a, \inf f'(x)\leqslant 1+b=(1+\frac{1}{b})b=ab$，又 $|e(t,x,y,z)|\leqslant\frac{1}{1+t^2}(|y|+|z|)$，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{2}$ 收敛，由定理 1 可知该系统是全局渐近稳定的.

参考文献：

[1] 贾建文.一类三阶非线性系统全局稳定性的 Liapunov 函数构造[J].应用数学学报，1999，22(4)：621-623.

[2] 张波，何敏.关于几类三阶非自治系统的全局渐近稳定性[J].东北师范大学学报(自然科学版)，1983(3)：91-100.

[3] 张同斌.一类三阶非线性常微分方程解的全局渐近稳定性[J].河南大学学报，2000，30(2)：45-48.

[4] 王联，王慕秋.非线性常微分方程定性分析[M].哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1987.

(责任编辑：黎贞崇)

(上接第5页 Continue from page 5)

subgroup K in G such that $G=H\times K$ with $H\leqslant Z(G)$ and so $H=1, K=G$. It is easy to see that $|G|=120$ from Lemma 7 and so $G\cong S_5$ or $Z_2\times A_5$, the direct product of a cyclic group of order 2 and A_5, or $SL(2,5)$ since G is non-solvable[7]. Note that $Z(Z_2\times A_5)\cong Z_2$ and $Z(SL(2,5))\cong Z_2$, we have $G\cong S_5$.

According to Theorem 4, for group S_5 with $N(S_5)=\{10,15,20,24,30\}$, we have the following result.

Corollary 5 If G is a non-solvable group such that $Z(G)=1$ and $N(G)=N(S_5)$, then $G\cong S_5$.

References:

[1] BERTRAM, HERZOG. MANN. On a graph related to conjugacy classes of groups [J]. Bulletin London Mathematical Society, 1990, 22: 569-575.

[2] FANG M, ZHANG P. Finite groups with graphs containing no triangles[J]. Journal Algebra, 2003, 264: 613-619.

[3] CHILLAY D, HERZOG M. On the length of the conjugacy classes of finite groups[J]. Journal Algebra, 1990, 131: 110-125.

[4] CHEN G. On Thompson Conjecture[M]. Beijing: Chinese Science and Technology Press, 1992.

[5] LI S. On the class length of elements of prime power order in finite groups[J]. Guangxi Sciences, 1999, 6(1): 12-13.

[6] XIAO Y. The proof of the conjecture of Thompson when M is A_5 or A_6 [J]. Journal of Chongqing Teachers College, 1996, 13(3): 12-15.

[7] XU M, HUANG J, LI H, et al. Introduction to finite group theory[M]. Beijing: Publishing House of Sciences, 1999: 199.

[8] ZHONG X. On the groups order and the number of conjugacy classes[J]. Journal Mathematics Study, 2001, 34(4): 356-359.

(责任编辑：蒋汉明 黎贞崇)