

一类具功能性反应的食饵-捕食者两种群模型的稳定性 Qualitative of a Class Two Species Predator-Prey Model with Functional Response

黄军华

HUANG Jun-hua

(玉林师范学院数学与计算机科学系, 广西玉林 537000)

(Department of Mathematics and Computer Science, Yulin Teachers College, Yulin, Guangxi, 537000, China)

摘要: 研究具功能性反应的食饵-捕食者两种群模型: $dx/dt = x(a - r_1x) - bxy^\alpha/(1 + \omega x)$, $dy/dt = -r_2y + cxy/(1 + \omega x)$, $\alpha \geq 1$ 时系统平衡点的性态和全局稳定性, 利用 Bendixson 环域定理证明极限环的存在性, 根据 芷芬惟一性定理证明极限环的惟一性.

关键词: 食饵-捕食者系统 平衡点 全局稳定性 存在惟一性 极限环

中图法分类号: O175 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2006)01-0009-03

Abstract: This paper introduces a kind food with functional response-two groups types of predators $dx/dt = x(a - r_1x) - bxy^\alpha/(1 + \omega x)$, $dy/dt = -r_2y + cxy/(1 + \omega x)$, $\alpha \geq 1$.

The quality of the balance point and the global stability are discussed in this system. The existence of the limit circle is proved by Bendixson Theoroem. The uniqueness of the limit circle around the neighborhood of positive equilibrium is exploited by Uniqueness Theoroem of Zheng Zifen.

Key words: predator-prey system, equilibrium, global stability, existence and uniqueness, limis cycle

运用数学模型描述和研究生物种群系统及其性质是近年数学应用的一个热点, 国内外很多数学工作者在这方面取得了丰硕的成果, 食饵-捕食者系统是其中的一个分支^[1~3], 文献[4~6]研究了食饵-捕食者系统周期解的存在性, 文献[7~10]研究了食饵-捕食者系统的稳定性, 其中文献[4]提出具有相互干扰的两种群捕食模型的一般形式为 $dx/dt = xg(x) - y^\alpha\varphi(x)$, $dy/dt = y(-q(x) + c\varphi(x))$, 式中 $x(t)$ 表示食饵种群在时刻 t 的密度; $y(t)$ 表示捕食者种群在时刻 t 的密度; $\varphi(x)$ 是捕食者种群的功能性反应; $q(x)$ 是捕食者种群的死亡率. 文献[4]已对 $\alpha = 1$ 的情形进行了研究, 文献[8]研究模型 $dx/dt = x(a - bx^\alpha) - cxy^\alpha$, $dy/dt = y(-d + cex^\alpha)$, 在 $1/2 \leq \alpha < 1$ 的情况, 文献[9]研究了模型 $dx/dt = x(a - cx - bx^2 - h(x)) - axy/(1 + \beta x)$, $dy/dt = -cy + k \cdot ax/(1 + \beta x)$, 均得到系统极限环的存在性及唯一性的条

件. 本文对上述模型在 $\alpha \geq 1$ 时的情形进行定性分析, 得到系统的全局稳定性、极限环的存在性及唯一性的条件.

1 具功能性反应的食饵-捕食者两种群模型

我们对文献[4]的两种群捕食模型一般形式作了改进, 本文研究的模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(a - r_1x) - \frac{bxy^\alpha}{1 + \omega x}, \\ \frac{dy}{dt} = -r_2y + \frac{cxy}{1 + \omega x}, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $a, b, c, r_1, r_2, \alpha$ 均为正常数, 且 $\alpha \geq 1$, 由生态学的实际意义^[4], 本文仅在 $D = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0\}$ 进行讨论, 记 $\bar{D} = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$.

作时间变换 $dt = (1 + \omega x)d\tau$, 这里 $1 + \omega x > 0$, 则系统(1)化成:

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = x(a + a_1x - a_2x^2 - by^\alpha), \\ \frac{dy}{d\tau} = y(a_3x - r_2), \end{cases} \quad (2)$$

其中, $a_1 = a\omega - r_1, a_2 = r_1\omega > 0, a_3 = c - r_2\omega$.

收稿日期: 2005-05-08

修回日期: 2005-06-15

作者简介: 黄军华(1964-), 男, 讲师, 主要从事数学教学与微分方程研究.

再作变换 $\bar{x} = \frac{a_3}{r_2}x, \bar{y} = (\frac{b}{r_2})^{\frac{1}{\alpha}}y, d\bar{t} = r_2 d\tau$, 仍记 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{t})$ 为 (x, y, t) 则系统(2)化成:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(b_1 + b_2x - b_3x^2 - y^\alpha) = P(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = y(x - 1) = Q(x, y), \end{cases} \quad (3)$$

其中, $b_1 = \frac{a}{r_2} > 0, b_2 = \frac{a_1}{a_3}$ 不定号, $b_3 = \frac{r_2 a_2}{a_3^2} > 0$.

2 系统平衡点的性态

$$\text{令} \begin{cases} P(x, y) = x(b_1 + b_2x - b_3x^2 - y^\alpha) = 0, \\ Q(x, y) = y(x - 1) = 0, \end{cases}$$

则有

(I) 当 $b_1 + b_2 - b_3 \leq 0$ 时, 系统(3)有2个平衡

点 $O(0, 0), A(x_1, 0)$, 其中 $x_1 = \frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 + 4b_1b_3}}{2b_3}$, 且满足 $b_1 + b_2x_1 - b_3x_1^2 = 0$;

(II) 当 $b_1 + b_2 - b_3 > 0$ 时, 有3个平衡点 $O(0, 0), A(x_1, 0), B(1, y_0)$, 其中 $y_0 = (b_1 + b_2 - b_3)^{\frac{1}{\alpha}}$.

引理 1 (I) $O(0, 0)$ 为系统(3)的鞍点;

(II) 当 $b_1 + b_2 - b_3 > 0$ 时, $A(x_1, 0)$ 为系统(3)的鞍点, 且 $x_1 > 1$;

(III) 当 $b_1 + b_2 - b_3 > 0$ 且 $b_2 < 2b_3$ 时, $B(1, y_0)$ 为系统(3)的稳定的焦(结)点;

(IV) 当 $b_1 + b_2 - b_3 > 0$ 且 $b_2 > 2b_3$ 时, $B(1, y_0)$ 为系统(3)不稳定的焦(结)点.

证明 由系统(3)有 $P'_x = b_1 + 2b_2x - 3b_3x^2 - y^\alpha, P'_y = -\alpha xy^{\alpha-1}, Q'_x = y, Q'_y = x - 1$,

令 $p(x, y) = -[(b_1 + 2b_2x - 3b_3x^2 - y^\alpha) + (x - 1)]$,

$q(x, y) = (b_1 + 2b_2x - 3b_3x^2 - y^\alpha)(x - 1) + \alpha xy^\alpha$,

(I) $q(0, 0) = -b_1 < 0$, 即 $O(0, 0)$ 为鞍点;

(II) 当 $b_1 + b_2 - b_3 > 0, x_1 = \frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 + 4b_1b_3}}{2b_3}$

$$> \frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 + 4b_3(b_3 - b_2)}}{2b_3} = \frac{b_2 + |b_2 - 2b_3|}{2b_3},$$

若 $b_2 \geq 2b_3, x_1 > \frac{b_2 + b_2 - 2b_3}{2b_3} \geq 1$,

若 $b_2 < 2b_3, x_1 > \frac{b_2 + 2b_3 - b_2}{2b_3} = 1$,

$q(x_1, 0) = (b_1 + 2b_2x_1 - 3b_3x_1^2)(x_1 - 1) = [-b_1 - b_3x_1^2 + 2(b_1 + b_2x_1 - b_3x_1^2)](x_1 - 1) = -(b_1 + b_3x_1^2)(x_1 - 1) < 0$,

即 $A(x_1, 0)$ 为系统(3)的鞍点;

$q(1, y_0) = \alpha y_0^\alpha > 0, p(1, y_0) = y_0^\alpha + 3b_3 - 2b_2 - b_1 = b_1 + b_2 - b_3 + 3b_3 - 2b_2 - b_1 = 2b_3 - b_2$, 于是

(III) 当 $b_1 + b_2 - b_3 > 0$ 且 $b_2 < 2b_3$ 时, $p(1, y_0) > 0$, 即 $B(1, y_0)$ 为系统(3)稳定的焦(结)点;

(IV) 当 $b_1 + b_2 - b_3 > 0$ 且 $b_2 > 2b_3$ 时, $p(1, y_0) < 0$, 即 $B(1, y_0)$ 为系统(3)不稳定的焦(结)点.

3 模型的稳定性

定理 1 当 $b_1 + b_2 - b_3 > 0$ 且 $b_2 > 2b_3$ 时, 平衡点 $B(1, y_0)$ 为系统(3)的不稳定焦(结)点, 且该点的外围至少存在一个稳定的极限环.

证明 由引理 1, 第一个结论成立, 且此时 $x_1 > 1$. 第二个结论证明如下:

作直线段 $L_1 = x - x_1 = 0$, 则 $\frac{dL_1}{dt}|_{(3)} = \frac{dx}{dt}|_{x=x_1} = -x_1 y^\alpha < 0, (y > 0)$, L_1 为无切直线, \bar{D} 内过 L_1 的轨线从右往左穿过 L_1 ; 作直线段 $L_2 = x + y - k = 0, 1 < x \leq x_1$, 则有

$$\frac{dL_2}{dt}|_{(3)} = \left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right)|_{y=k-x} = x(b_1 + b_2x - b_3x^2) - xy^\alpha + yx - y = x(1 + b_1 + b_2x - b_3x^2) + x(y - y^\alpha) - k \leq x(1 + b_1 + b_2x - b_3x^2) - k,$$

$(y > 1)$. 于是当 $k \gg 1$ 时, $\frac{dL_2}{dt}|_{(3)} < 0, L_2$ 为无切直线, \bar{D} 内的轨线从右上往左下穿过 L_2 ;

作直线段 $L_3 = y = k - 1, (0 < x < 1)$, 则有

$$\frac{dL_3}{dt}|_{(3)} = \frac{dy}{dt}|_{y=k-1} = (k-1)(x-1) < 0,$$

L_3 为无切直线, \bar{D} 内的轨线从上往下穿过 L_3 ;

$L_4 = x = 0, L_5 = y = 0$ 为轨线, 于是由 L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 围成的闭域包含 \bar{D} 内的一个不稳定的焦(结)点, 而系统(3)为解析系统, 由 Bendixson 环域定理知在 \bar{D} 内至少存在一个包含 B 点的极限环. 系统(3)的方向场如图 1 所示.

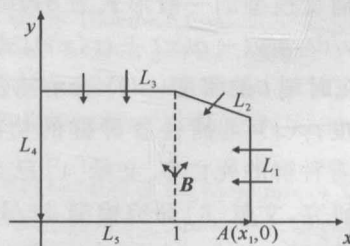


图 1 系统(3)的方向场

Fig. 1 The direction field of the system (3)

定理 2 当 $b_1 + b_2 - b_3 > 0$ 且 $b_2 > 2b_3$ 时, 系统(3)在正平衡点 $B(1, y_0)$ 的外围存在惟一稳定的极限环.

证明 对系统(3)作变换 $x = u + 1, y = y_0 e^v, d\tau = (1 + u)dt$, 则系统(3)可化为:

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = -\varphi(v) - F(u), \\ \frac{dv}{d\tau} = g(u), \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\varphi(v) = y_0^a(e^{av} - 1)$, $F(u) = y_0^a + b_3(u+1)^2 - b_2(u+1) - b_1$, $g(u) = \frac{u}{1+u}$.

当 $u > -1$ 时, $ug(u) = \frac{u^2}{1+u} > 0$, $G(u) =$

$$\int_0^u \frac{u}{1+u} du = u - \ln(1+u), G(+\infty) = +\infty,$$

$$G(-1+0) = +\infty.$$

$$\varphi(+\infty) = +\infty, \varphi(-\infty) = -y_0^a, F(0) = 0,$$

$$f(u) = F'(u) = 2b_3(1+u) - b_2, f(0) =$$

$$2b_3 - b_2 < 0,$$

$$\left(\frac{f(u)}{g(u)}\right)' = \left(\frac{2b_3(1+u) - b_2}{u(1+u)^{-1}}\right)' = \frac{1}{u^2}[2b_3u^2 + (b_2 - 2b_3)] > 0, (u \neq 0).$$

由张芷芬定理可知, 系统(3)存在惟一稳定的极限环.

定理 3 当 $b_1 + b_2 - b_3 > 0$ 且 $b_2 < 2b_3$ 时, 系统(3)在 D 内无极限环且为全局稳定的.

证明 由引理 1 知, $B(1, y_0)$ 为稳定的焦(结)

点. 取函数 $B(x, y) = x^{-1}y^{4b_3-b_2-1}$, 则有 $\frac{\partial(BP)}{\partial x} = x(b_1 + b_2x - b_3x^2 - y^a)(-x^{-2}y^{4b_3-b_2-1}) + x^{-1}y^{4b_3-b_2-1}(b_1 + 2b_2x - 3b_3x^2 - y^a) = x^{-1}y^{4b_3-b_2-1}(b_2x - 2b_3x^2)$, $\frac{\partial(BQ)}{\partial y} = y(x-1)x^{-1}(4b_3 - b_2 - 1)y^{4b_3-b_2-2} + x^{-1}y^{4b_3-b_2-1}(x-1) = x^{-1}y^{4b_3-b_2-1}(4b_3 - b_2)(x-1)$,

$$H(x, y) = \frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} =$$

$$-x^{-1}y^{4b_3-b_2-1}[2b_3(x-1)^2 + (2b_3 - b_2)] < 0.$$

由 Dulac 判据可知, 系统(3)在 \bar{D} 内不存在极限环, 且为全局稳定的.

参考文献:

- [1] 张弘, 严建明, 罗桂烈. 一种群生态竞争-捕食连续型时滞系统正周期解的存在性和全局吸引性[J]. 广西科学, 2004, 11(2): 86-90.
- [2] 惠静. Lotka-Volterra 脉冲捕食-食饵模型的稳定性[J]. 广西科学, 2004, 11(3): 186-187.
- [3] 陈春涛, 罗桂烈. 一类具有时滞和基于比率的 N 种群捕食-被捕食扩散系统的正周期解的存在性[J]. 广西科学院学报, 2005, 21(1): 1-6.
- [4] 陈兰荪. 数学生态学模型和研究方法[M]. 北京: 科学出版社, 1988.
- [5] 张锦炎, 冯贝叶. 常微分方程几何理论与分支问题[M]. 北京: 北京大学出版社, 2002.
- [6] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性理论与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [7] 韦煜明. 一类食饵种群具有投放率的捕食系统的定性分析[J]. 广西科学, 2003, 10(1): 11-14.
- [8] 颜向平, 张存华. 一类具功能反应的食饵-捕食者两种群模型的定性分析[J]. 生物数学学报, 2004, 19(3): 323-327.
- [9] 陈柳媚, 孙建华. 具 Holling 第类功能性反应的捕食者-食饵系统的定性分析[J]. 生物数学学报, 2003, 18(1): 33-36.
- [10] 吴承强. 一类具功能性反应的捕食者-食饵系统的极限环[J]. 福州大学学报, 2004, 32(4): 410-412.

(责任编辑: 黎贞崇)

法国科学家担心地球细菌“感染”火星

法国国家航天研究中心科学家安德烈·德比研究指出, 地球细菌会附着在火星探测器上与其一起踏上火星土地. 有不少细菌能抵御极端恶劣的环境而生存下来. 他认为, 火星表面看上去不适合生命存在, 但实际可能并非如此. 目前地球上已发现许多可在恶劣环境下生存的微生物, 加上在火星南北两极发现冰冻水, 人们有理由推测, 某些微生物也能在火星上生存. 这样看来, 过去许多针对登陆火星所采取的保护措施显然已经过时. 人类需要研究新的保护措施, 避免地球生物过多“感染”火星.

按照国际航天研究委员会规定的标准, 火星登陆器必须经过消毒灭菌, 它所携带的细菌量不能超过每平方米 30 万孢子, 目的是为了避免带到火星上的细菌过多, 导致人们发现错误的信息, 把原来火星探测器留下的细菌又带回来, 当成是火星上的细菌样本.

欧洲航天局与美国宇航局最近已就这一问题进行了研究, 并表示将加强有关对火星登陆器和各种仪器的灭菌消毒措施等. 法国最新一期的《科学与生活》杂志也指出, 专家已发现, 对现有的航天器进行灭菌消毒处理后, 航天器上仍然存在一些细菌, 在人类多次向火星发射无人登陆器后, 差不多已经有 10 亿个孢子数量的细菌被带到了火星上. 这些细菌中一部分登陆火星后是可以存活的. 不过有关专家认为, 这些细菌可能藏身于一些火星地表的结构中, 由于缺乏水、营养以及合适温度, 这些细菌会处于休眠状态.

(据《科学时报》)