

# 缺陷对周期螺旋波动力学行为的影响\*

## The Defect Effect on Dynamics of Periodic Spiral Wave

宋宣玉<sup>1</sup>,袁国勇<sup>2</sup>,陈光旨<sup>1</sup>,薛 郁<sup>1</sup>

SONG Xuan-yu<sup>1</sup>, YUAN Guo-yong<sup>2</sup>, CHEN Guang-zhi<sup>1</sup>, XUE Yu<sup>1</sup>

(1. 广西大学物理科学与工程技术学院,广西南宁 530004; 2. 河北师范大学物理科学与信息工程学院,河北石家庄 050016)

(1. College of Physics Sciences and Engineer Technology, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China; 2. College of Physics Sciences and Information Engineer, Hebei Normal University, Shijiazhuang, Hebei, 050016, China)

**摘要:**在改进 FitzHugh-Nagumo 模型基础上得到缺陷对周期螺旋波动力学行为影响的研究模型,对缺陷影响周期螺旋波动力学的模型进行数值模拟,研究缺陷影响后周期螺旋波的演化。结果发现,当缺陷的中心位置不动且离波头中心足够远时,半径比较小的缺陷对波头没有影响;随着缺陷半径的增大,波头会小幅度地远离原位置;如果缺陷半径继续增大,则会出现波头大幅度地远离原位置及波头消失的现象;缺陷影响前后螺旋波波头的周期不变。

**关键词:**周期螺旋波 缺陷 波头 动力学行为

**中图分类号:** O415.5; O414 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-9164(2006)01-0023-04

**Abstract:** The defect effect on the dynamics of periodic spiral wave using modified FitzHugh-Nagumo model is studied in detail. It is found that, when the center of the defect is determined and far enough away from the center of the spiral tip and if the radius of the defect is short, then there is no affect on the tip. Increasing the defect radius, the tip will be forced slightly away from the original position. While the radius of the defect is further extended, there will be a phenomenon that the tip is moved sharply away from the original position and the tip is vanished. The tip period of spiral wave was changless, during the defect effect on dynamics of periodic spiral wave.

**Key words:** periodic spiral wave, defect, tip, dynamics

螺旋波是自然界中普遍存在的一种非平衡斑图,它可以在激发介质和振荡介质中被观测到,如心脏、BZ 反应以及铂(Pt110)催化剂表面的一氧化碳氧化等等。近年来螺旋波的动力学行为日益引起人们的关注<sup>[1]</sup>,人们对螺旋波的详细动力学行为及其失稳都进行了深入的研究<sup>[2,3]</sup>,同时提出很多控制螺旋波的方法,例如外加周期力控制<sup>[4]</sup>、全局反馈与局部反馈控制<sup>[5]</sup>、及靶波控制<sup>[6]</sup>等等。

然而实际系统往往是不均匀的,而且是有缺陷的,例如心脏中有某一块心肌可能是坏死的,铂的表面不可能是完全光滑的,等等。在此之前,许多学者研

究了缺陷对螺旋波动力学的影响<sup>[7~10]</sup>,如文献[7]指出,存在缺陷的情况下,增大格点间的耦合强度会使局域波传遍整个空间,而进一步增大耦合强度,当达到一定程度时,全局波的传播又会被终止。本文针对延展系统,讨论缺陷对周期螺旋波动力学行为的影响。

### 1 研究的模型

本文研究的模型是基于 FitzHugh-Nagumo 模型<sup>[11]</sup>,考虑到研究对象是缺陷对周期螺旋波的影响,我们研究模型的方程组如下:

$$\begin{cases} \partial_t u = \varepsilon^{-1} u(1-u) \left[ u - \frac{(v+b)}{a} \right] + \nabla^2 u, \\ \partial_t v = f(u) - v, \end{cases}$$

收稿日期:2005-06-03

作者简介:宋宣玉(1981-),男,河南南阳人,硕士研究生,主要从事非线性科学研究。

\* 国家自然科学基金(10362001,10147201)资助项目。

$$f(u) = \begin{cases} 0, & u < 1/3, \\ 1 - 6.75u(u - 1)^2, & 1/3 \leq u \leq 1, \\ 1, & u > 1, \end{cases}$$

上式中,  $u$  和  $v$  分别是快变量和慢变量.  $f(u)$  描述了阻滞子的延迟; 当  $b < 0$  时, 系统是振荡介质, 而当  $b > 0$  时则是激发介质; 在可激发情况下, 系统有 2 个定态  $(0, 0)$ ,  $(b/a, 0)$ , 其中,  $(0, 0)$  是稳定的, 而  $(b/a, 0)$  则是一个鞍点, 决定着系统的激发域值<sup>[3]</sup>. 本文研究的 FitzHugh-Nagumo 模型的零线图如图 1 所示.

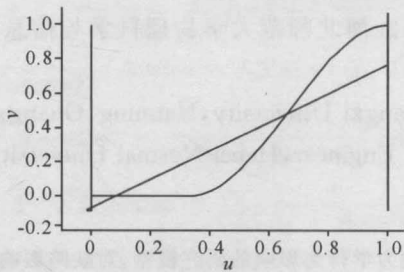


图1  $u, v$  的零线图

Fig. 1 The nullcline of  $u, v$

## 2 数值模拟

缺陷对螺旋波影响的数值模拟在一个含有  $200 \times 200$  个格点的二维平面上进行. 模型取  $a = 0.84, b = 0.07$ , 且当  $0.01 < \epsilon < 0.06$  时, 系统能产生稳定的螺旋波<sup>[3]</sup>, 波头的轨迹是一个圆. 本文把缺陷定义为一直处于定态  $(0, 0)$  的格点, 为研究方便, 考虑到螺旋波的旋转对称, 我们把缺陷的形状取为圆形,  $\epsilon = 0.04$ , 计算步长  $dt = 0.031, dx = dy = 0.39$ <sup>[3]</sup>. 单位时间 (Time Unit) 简称为 t. u, 空间单位 (Space Unit) 简称为 s. u.

通过改变螺旋波的初始条件, 把螺旋波波头轨迹中心固定在格点  $(98, 99)$  附近; 考虑到一般性, 把缺陷的中心取为格点  $(60, 61)$ , 其半径为  $r_d$ .

模拟结果表明, 只要缺陷的中心到螺旋波端点轨迹中心的距离一样, 那么影响端点轨迹的只有缺陷半径, 与缺陷中心的位置无关.  $r_d \leq 14.93$  s. u 时, 波头的位置基本上维持在没有缺陷时的波头附近 (图 2b), 而当  $r_d > 14.93$  s. u 时, 波头将发生幅度非常大的偏离 (图 2c). 如果进一步增大缺陷的半径, 则会发现经过一定的时间后原有的波头会消失 (图 2d).

数值模拟还考察不同缺陷半径对螺旋波的波头轨迹的影响. 我们螺旋波波头的定义为  $u = 0.3$  和  $f(u, v) = 0$  的交点<sup>[12]</sup>. 图 3 表明, 缺陷产生后, 只要螺旋波的波头没有消失, 那么螺旋波波头经过很长的暂态过程后仍将沿着固定的圆运动.

从图 3 中可以看出,  $r_d < 14.04$  s. u 时, 螺旋波的

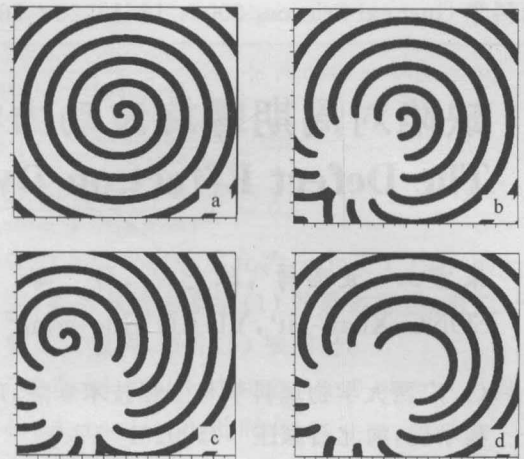


图2 缺陷对周期螺旋波的影响

Fig. 2 The defect effect on dynamics of periodic spiral wave  
a:  $r_d = 0.0$  s. u, b:  $r_d = 14.82$  s. u, c:  $r_d = 16.38$  s. u, d:  $r_d = 18.21$  s. u

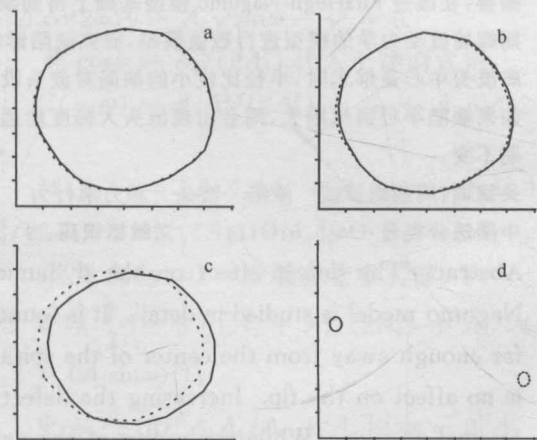


图3 不同缺陷半径时的波头轨迹

Fig. 3 The denotec trace of different defect radius

a~c: 的实线均表示  $r_d = 0.0$  s. u 时的波头轨迹; a: 的虚线表示  $r_d = 13.65$  s. u 时的波头轨迹; b: 的虚线表示  $r_d = 14.04$  s. u 时的波头轨迹; c: 的虚线表示  $r_d = 14.93$  s. u 时的波头轨迹; d: 的实线表示  $r_d = 14.94$  s. u 时的波头轨迹, 虚线表示  $r_d = 14.93$  s. u 时的波头轨迹

a~c: Solid circles denote trace of tip at  $r_d = 0.0$ ; a: Dot circles denote trace of tip at  $r_d = 14.65$  s. u, b: Dot circles denote trace of tip at  $r_d = 14.04$  s. u; c: Dot circles denote trace of tip at  $r_d = 14.93$  s. u; d: Solid circle denotes trace of tip at  $r_d = 14.94$  s. u, and dot circle denote trace of tip at  $r_d = 14.93$  s. u.

波头运动轨迹几乎与没有缺陷时的运动轨迹重合. 也就是说, 此时的缺陷对波头没有任何影响. 进一步增大缺陷半径,  $14.04$  s. u  $\leq r_d \leq 14.93$  s. u 时, 波头的运动轨迹发生了轻微的移动, 从图 3b 和图 3c 中可以看出, 波头轨迹稍微开始向左上方移动, 但这时移动的幅度不是很大.  $r_d = 14.94$  s. u 时, 波头轨迹与  $r_d = 14.93$  s. u 时的波头轨迹相比, 可以明显看到波头

轨迹移动的幅度将非常大(图3d). 文献[7]中也可以看到相似的现象,但继续增大缺陷半径,  $r_d > 14.94$  s. u 时, 波头轨迹随缺陷半径的增大而移动的幅度又趋于平缓. 随着缺陷半径的继续增大, 当  $r_d = 18.21$  s. u 时, 螺旋波的波头会在缺陷产生一定的时间后消失(图4).

从图4可以看出, 缺陷产生后螺旋波的波头轨迹不再是一个圆形, 而是一个类似于花瓣的形状. 这说明缺陷使螺旋波发生了本质上的变化, 螺旋波不再是周期螺旋波, 而是漫游螺旋波. 缺陷的影响超过系统参数的影响, 从而使得螺旋波发生了 Hopf 分岔<sup>[2]</sup>, 变成漫游螺旋波, 但是在维持一段时间后, 波头消失.

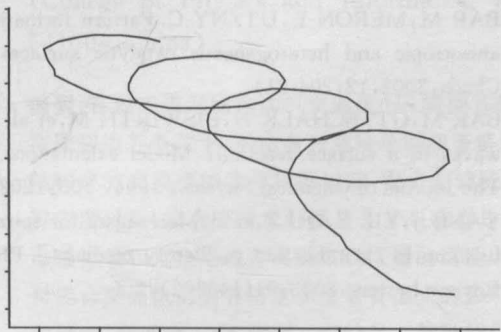


图4 周期螺旋波的波头随时间的变化 ( $r_d = 18.21$  s. u)

Fig. 4 Development of the periodic spiral tip with time at  $r_d = 18.21$  s. u

### 3 周期螺旋波的演化

当  $r_d < 18.21$  s. u 时, 虽然缺陷的存在引起波头的最终轨迹远离原位置, 但螺旋波的波头最终会经过一个很长时间的暂态过程后稳定下来, 并且依然沿着一个圆运动. 因此, 稳定下来的螺旋波仍然是周期螺旋波.

为了解定态的螺旋波随时间演化的情况, 我们给出  $r_d = 15.60$  s. u 时的螺旋波的演化图(图5). 从图5中可以看出, 虽然有缺陷的作用, 周期螺旋波仍然有规律地旋转. 从图5c 可以发现, 由于缺陷的影响, 螺旋波在这里发生了断裂, 但波头则照常逆时针旋转; 从图5d 则可看到, 波头继续旋转以至在它的后面又形成了波, 当它再旋转到这一位置时, 它将继续断裂, 从而又开始重复前面的步骤. 图5g 下面的2个波头(在没有缺陷时它们是连在一起的)发生了碰撞, 同时稍微向内凸出, 最后仍在边界处消失. 我们把这种现象称为螺旋波的记忆性. 螺旋波以后的演化状况将继续重复上面的过程.

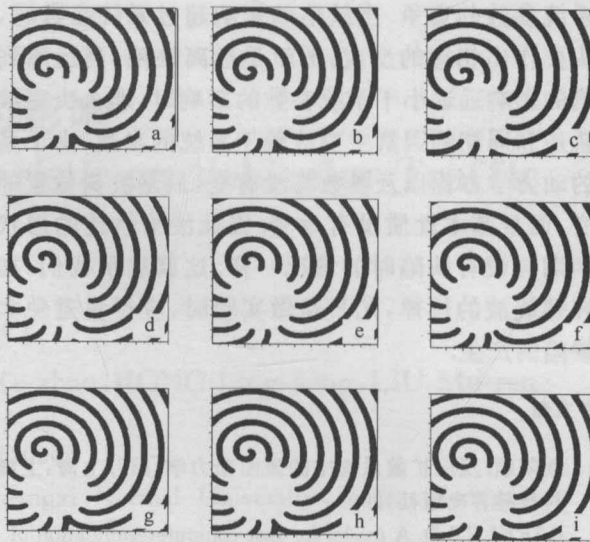


图5 暂态过程后  $r_d = 15.60$  s. u 时的演化(a~i)

Fig. 5 Development of periodic spiral wave at  $r_d = 15.60$  s. u after the transient (a~i)

各图的时间间隔为1.24 s. u

The time difference between pictures is 1.24 s. u.

为了解周期螺旋波的演化规律, 我们计算了螺旋波波头的周期. 从图6中我们可以很明显的看出, 达到定态的螺旋波波头周期基本上稳定在3.968 t. u, 这与没有缺陷时的周期是一样的.

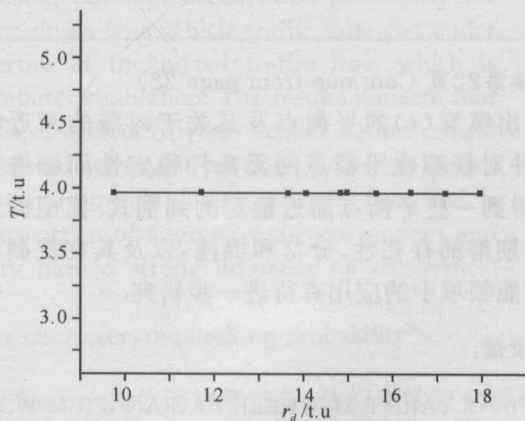


图6 波头的周期随缺陷半径的变化

Fig. 6 Spiral tip period T for different  $r_d$

### 4 结束语

以上分析表明, 当  $r_d$  小于一定距离时, 波头的轨迹实际上与没有缺陷时的轨迹几乎相同, 随着  $r_d$  的增大, 波头轨迹会稍微偏离原来的轨迹. 当  $r_d$  进一步增大时, 随着缺陷越来越逼近螺旋波的波头, 达到某一临界条件时, 波头远离的幅度会突然间增大, 犹如雪崩. 但是, 无论缺陷的半径有多大, 只要螺旋波的波头没有消失, 经过了暂态之后, 波头轨迹的形状和周期依然与没有缺陷时一样.

事实上, 我们可以把这理解为缺陷与决定螺旋波

的系统参数的竞争. 当缺陷的影响超过系统参数时, 波头要作出相应的反应, 那就是远离缺陷; 当远离到缺陷的影响远远小于系统参数的影响时, 那么决定波头轨迹和周期的因素主要依赖于系统的参数. 由于系统的动力学方程以及参数都没有变, 只是波头位置的改变, 而且基本性质没有改变. 因此波头轨迹的形状和周期与没有缺陷时的情况一样. 这就启示我们, 在研究螺旋波的规律, 尤其是做实验时, 应尽量避免大的缺陷的产生.

参考文献:

[1] 欧阳颀. 反应扩散系统中的斑图动力学[M]. 上海: 上海科技教育出版社, 2001.  
 [2] BARKLEY D. A model for fast computer-simulation of waves in excitable media[J]. *Physica D (Amsterdam)*, 1991, 49: 61-70.  
 [3] BĀR M, EISWIRTH M. Tubulence due to spiral break up in a continuous excitable media[J]. *Physical Review E*, 1993, 48: R1635-R1637.  
 [4] SCHRADER A, BRAUNE M, ENGEL H. Dynamics of spiral waves in excitable media subjected to periodic forcing[J]. *Physical Review E*, 1995, 52: 98-108.  
 [5] ZYKOV V S, MOLHAILOV A S, MULLER S C. Controlling spiral waves in confined geometries by

global feedback[J]. *Physical Review Letters*, 1997, 78: 3398-3401.

[6] ZHANG H, HU B, HU G. Suppression of spiral waves and spatiotemporal chaos by generating target waves in excitable media[J]. *Physical Review E*, 2003, 68: 026134.  
 [7] ZHENG Z, CROSS M C. Defect-induced propagation in excitable media[J]. *International Journal of Bifurcation & Chaos*, 2003, 13: 3125-3133.  
 [8] XIE F, QU Z, WEISS J N, et al. Coexistence of multiple spiral waves with indepent freqences in a heterogeneous excitable medium [J]. *Physical Review E*, 2001, 63: 031905.  
 [9] BUB G, SHRIER A, GLASS L. Spiral wave generation in heterogenous excitable media [J]. *Physical Review Letters*, 2002, 88: 058101.  
 [10] BĀR M, MERON E, UTZNY C. Pattern formation on anisotropic and heterogeneous catalytic surfaces [J]. *Chaos*, 2002, 12: 204-214.  
 [11] BAR M, GTTSCHALK N, EISWIRTH M, et al. Spiral waves in a surface reaction: Model calculations [J]. *The Journal of Chemical Physics*, 1994, 100: 1202-1214  
 [12] YANG J, XIE F, QU Z, et al. Mechanism for spiral breakup in excitable and oscillatory media[J]. *Physical Review Letters*, 2003, 91(148302): 1-4.

(责任编辑: 黎贞崇)

(上接第22页 Continue from page 22)

文给出模型(4)的平衡点及其关于时滞的渐近稳定性, 并对模型在平衡点的无条件稳定性问题进行讨论, 得到一些平衡点渐近稳定的判别式. 模型的多时滞周期解的存在性、分岔和混沌, 以及其在控制和人工智能领域中的应用有待进一步研究.

参考文献:

[1] LYCLYARD P M, WHELEN A, FANGER M W. *Instant Notes in Immunology*[M]. UK: BIOS Scientific Publish Ltd, 2000.  
 [2] IVAN M, ROITT, PETER J DELVES. *Roitt's essential immunology tenth edition*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2001.  
 [3] JON TIMMIS, MARK NEAL, JOHN HUNT. An artificial immune system for data analysis [J]. *BioSystems*, 2000, 55: 143-150.  
 [4] MICHAIL ZAK. Physical model of immune inspired computing[J]. *Information Sciences*, 2000, 129: 61-79.  
 [5] DIPANKER DASGUTA Ed. *Artificial immune systems and their applications* [M]. Berlin: Spring-Verlag, Heidelberg, 1999.

[6] MARCZUK G I. *Mathematical models in immunology (in Russian)*[M], Nauka: Moscow, 1980.  
 [7] FORYS U. Hopf bifurcation in marchuk's model of immune reactions [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2001(34): 725-735.  
 [8] BURIĆ N, MUDRINIC M, VASOVIĆ N. Time delay in a basic model of the immune response [J]. *Chaos Solitons and Fractals*, 2001, 12: 483-489.  
 [9] MAYER M, ZAENKER K S, DER HEIDEN U. A basic mathematical model of the immune response[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1995, (5): 155-161.  
 [10] ALAN S PERELSON. Modeling viral and immune system dynamics nature reviews[J]. *Immunology*, 2002, 2: 28-36.  
 [11] KUANG YANG. *Delay differential equations: with applications in population dynamics* [M]. Boston: Academic Press, 1993.  
 [12] 秦元勋, 刘永清, 王联. 带有时滞的动力系统的运动稳定性[M]. 第2版. 北京: 科学出版社, 1989: 10.

(责任编辑: 黎贞崇)