广西科学 Guangxi Sciences 2006，13(3)：164～171

# 蕴含 $K_{3,s}-ke$ 的可图序列*

# Potentially $K_{3,s}-ke$ Graphical Sequences

陈 纲

CHEN Gang

（宁夏大学数学计算机学院，宁夏银川 750021）

（Department of Mathematics and Computer，Ningxia University，Yinchuan，Ningxia，750021，China）

**摘要**：考虑经典 Turán 型问题的变形：确定最小的正偶数 $\sigma(K_{r,s}-ke,n)$，$s\geqslant r\geqslant k\geqslant 1$，使得对于每一个 $n$ 项可图序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，当 $\sigma(\pi)=d_1+d_2+\cdots+d_n\geqslant\sigma(K_{r,s}-ke,n)$ 时，$\pi$ 是蕴含几乎完全二部图 $K_{r,s}-ke$ 可图的，即 $K_{r,s}-ke$ 是从完全二部图 $K_{r,s}$ 中删去 $k$ 条边后所得的图，而这 $k$ 条边构成 $K_{r,s}$ 的一匹配．然后确定出当 $r=3$，$s\geqslant 4$ 且 $n$ 充分大时，$\sigma(K_{r,s}-ke,n)$ 的值．

**关键词**：图 度序列 蕴含 几乎完全二部图

**中图法分类号**：O157.5 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-9164(2006)03-0164-08

**Abstract**：In this paper，we consider a variation of the classical Turán-type extremal problems as follows：determine the smallest positive even number $\sigma(K_{r,s}-ke,n)$，$s\geqslant r\geqslant k\geqslant 1$，such that every $n$ term graphic sequence $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ with term sum $\sigma(\pi)=d_1+d_2+\cdots+d_n\geqslant\sigma(K_{r,s}-ke,n)$ is potentially $K_{r,s}-ke$-graphic，where $K_{r,s}-ke$ is an almost complete bipartite graph that obtained from a complete bipartite graph $K_{r,s}$ by deleting $k$ edges forming a matching. We determine the values of $\sigma(K_{r,s}-ke,n)$ for $r=3$，$s\geqslant 4$ and sufficiently large $n$.

**Key words**：graph，degree sequence，potentially，almost complete bipartite graph

所有 $n$ 项非增非负整数序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 的集合记为 $NS_n$．设 $\pi\in NS_n$，如果 $\pi$ 的每一项都是非零的，则 $\pi$ 称为正的．如果 $\pi$ 是某一 $n$ 阶简单图 $G$ 的度序列，则称 $\pi\in NS_n$ 是可图的；并且 $G$ 称为 $\pi$ 的一个实现．$NS_n$ 中所有正的可图序列构成的集合记为 $GS_n$．对于 $\pi\in NS_n$，定义 $\sigma(\pi)=d_1+d_2+\cdots+d_n$．对于给定的图 $H$，称 $\pi\in GS_n$ 是蕴含 $H$ 可图的，如果 $\pi$ 有一个实现包含 $H$ 作为子图．

在文献[1]中，Gould 等考虑了下述经典 Turán 型问题的变形：确定最小的正偶数 $\sigma(H,n)$，使得对于每一个 $n$ 项可图序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，当 $\sigma(\pi)\geqslant\sigma(H,n)$ 时，$\pi$ 是蕴含 $H$ 可图的．对于 $H=K_{r+1}$，Erdös 等[2] 猜想对于充分大的 $n$，$\sigma(K_{r+1},n)=(r-1)(2n-r)+2$，同时证明此猜想对于 $r=2$ 成立．近来，李炯生等[3~5] 证明此猜想对于 $r\geqslant 3$ 和充分大的 $n$ 是成立的，对于 $H$ 为几乎完全图 $K_{r+1}-ke$，其中 $[\frac{r+1}{2}]\geqslant k\geqslant 1$，即从完全图 $K_{r+1}$ 中删去 $k$ 条边，而这 $k$ 条边是 $K_{r+1}$ 的一匹配．赖春晖[6] 确定了 $\sigma(K_4-e,n)$ 的值，尹建华等[7] 确定了 $\sigma(K_5-e,n)$ 以及当 $n\geqslant 3r+3$ 时，$\sigma(K_{r+1}-ke,n)$ 的值．当 $H=K_{s,t}$ 时，其中 $K_{s,t}$ 是一 $r\times s$ 完全二部图，Gould 等[1] 证明了 $\sigma(K_{2,2},n)=2[\frac{3n-1}{2}]$．尹建华等[8,9] 确定了 $\sigma(K_{3,3},n)$，$\sigma(K_{4,4},n)$ 的值，确定了当 $r\geqslant 4$ 为偶数且 $n\geqslant 4r^2-r-6$ 以及 $r\geqslant 3$ 为奇数且 $n\geqslant 4r^2+3r-8$ 时，$\sigma(K_{r,r},n)$ 的值．最近，尹建华[10] 又确定了当 $s\geqslant r\geqslant 3$ 和充分大的 $n$ 时，$\sigma(K_{r,s},n)$ 的值，从而解决了 $\sigma(K_{r,s},n)$ 问题．对于 $H$ 是几乎完全二部图，$K_{r,s}-ke$，$s\geqslant r\geqslant k\geqslant 1$，是从完全二部图 $K_{r,s}$ 中删去 $k$ 条边后所得的图，而这 $k$ 条边构成 $K_{r,s}$ 的一匹配，赖春晖[11] 确定了 $\sigma(K_{3,3}-3e,n)$ 的值，其中 $n\geqslant 7$．本文确定当 $r=3$，$s\geqslant 4$，和 $n$ 充分大时，$\sigma(K_{r,s}-ke,n)$ 的值．

## 1 预备知识

对于一个非增的整数序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in$

**收稿日期**：2005-12-08

**作者简介**：陈 纲(1977-)，男，河南宜阳人，讲师，主要从事图论研究．

* 宁夏大学青年教师科研启动项目(编号：QN0505)，宁夏大学数学计算机学院青年教师科研启动基金项目联合资助．

$NS_n$，记 $f(\pi)=\max\{i: d_i\geqslant i, 1\leqslant i\leqslant n\}$ 且定义 $n$ 阶矩阵 $\overline{A(\pi)}=(a_{ij})$ 如下：

当 $1\leqslant i\leqslant f(\pi)$ 时，

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & 若 1\leqslant j\leqslant d_i+1 且 i\neq j,\\ 0 & 其他,\end{cases}$$

而当 $f(\pi)+1\leqslant i\leqslant n$ 时，

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & 若 1\leqslant j\leqslant d_i,\\ 0 & 其他.\end{cases}$$

$f(\pi)$ 和 $\overline{A(\pi)}$ 分别被称为 $\pi$ 的迹和 $\pi$ 的对角限制极左矩阵. 记 $\overline{A(\pi)}$ 的列向量的和为 $\overline{\pi}=(\overline{d_1},\overline{d_2},\cdots,\overline{d_n})$. $\overline{\pi}$ 称为 $\pi$ 的校正共轭向量. 易知 $\sigma(\pi)=\sigma(\overline{\pi})$.

**定理 1.1**[12] 设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in NS_n$ 是一个非增的整数序列，其中 $\sigma(\pi)$ 是偶数. 则 $\pi\in GS_n$ 当且仅当 $\pi\prec\overline{\pi}$，即 $d_1+d_2+\cdots+d_i\leqslant\overline{d_1}+\overline{d_2}+\cdots+\overline{d_i}$，$i=1,2,\cdots,n-1$，或者等价地说 $d_1+d_2+\cdots+d_i\leqslant\overline{d_1}+\overline{d_2}+\cdots+\overline{d_i}$，$i=1,2,\cdots,n-1$，或者等价地说 $d_1+d_2+\cdots+d_i\leqslant\overline{d_1}+\overline{d_2}+\cdots+\overline{d_i}$，$i=1,2,\cdots,f(\pi)$.

设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in NS_n$. 记

$$\pi''=\begin{cases}(d_1-1,\cdots,d_{k-1}-1,d_{k+1}-1,\cdots,d_{d_k+1}-1,\\ \quad d_{d_k+2},\cdots,d_n), 若 d_k\geqslant k,\\ (d_1-1,\cdots,d_{d_k}-1,d_{d_k+1},\cdots,d_{k-1},\\ \quad d_{k+1},\cdots,d_n), \quad 若 d_k<k.\end{cases}$$

并记 $\pi'=(d'_1,d'_2,\cdots,d'_{n-1})$，其中 $d'_1\geqslant d'_2\geqslant\cdots\geqslant d'_{n-1}$ 是 $\pi''$ 中的 $n-1$ 个项的重排. 则 $\pi'$ 称为从 $\pi$ 删去(laying off)$d_k$ 后的剩余序列. 易见，如果 $\pi'$ 是可图的，则 $\pi$ 也是可图的，这是因为在 $\pi'$ 的实现 $G'$ 中添加一个度为 $d_k$ 的新顶点 $v_k$，使得 $v_k$ 相邻于 $G'$ 中那些从 $\pi$ 到 $\pi'$ 的过程中度被减 1 的顶点，所得的图 $G$ 是 $\pi$ 的一个实现. 并且还有：

**定理 1.2**[13] 设 $\pi\in NS_n$. 则 $\pi\in GS_n$ 当且仅当 $\pi'\in GS_{n-1}$.

**定理 1.3**[5] 如果 $k\geqslant 5$，则当 $2k+2\leqslant n\leqslant(\frac{k}{2})+3$ 时，$\sigma(K_{k+1},n)\leqslant 2n(k-2)+8$；当 $n\geqslant(\frac{k}{2})+3$ 时，$\sigma(K_{k+1},n)=(k-1)(2n-k)+2$.

**定理 1.4**[8] 设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in NS_n$，$m=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ 且 $\sigma(\pi)$ 是偶数. 令 $\pi^*=(d_1^*,d_2^*,\cdots,d_n^*)$ 是序列 $\pi$ 的重排列，其中 $m=d_1^*\geqslant d_2^*\geqslant\cdots\geqslant d_n^*$ 是 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ 的重排列. 如果存在一个正整数 $n_1(\leqslant n)$ 使得 $d_{n_1}^*\geqslant h\geqslant 1$ 并且 $n_1\geqslant\frac{1}{h}[\frac{(m+h+1)^2}{4}]$，则 $\pi$ 是可图的.

**定理 1.5**[9] 设 $\pi=(d_1,\cdots,d_r,d_{r+1},\cdots,d_{r+s},\cdots,d_n)\in GS_n$，其中 $d_{r+s}\geqslant r+s-1$ 且 $d_n\geqslant r$. 则 $\pi$ 是蕴含 $K_{r,s}$ 可图的.

**定理 1.6**[9] 设 $\pi=(d_1,\cdots,d_r,d_{r+1},\cdots,d_{r+s},\cdots,d_n)\in GS_n$，其中 $d_r\geqslant r+s-1$，$d_{r+s}\leqslant r+s-2$ 且 $d_n\geqslant r$. 如果 $n\geqslant(r+s)(s-1)$，则 $\pi$ 是蕴含 $K_{r,s}$ 可图的.

设 $\pi=(d_1,\cdots,d_3,d_4,\cdots,d_{3+s},d_{4+s},\cdots,d_n)\in NS_n$，其中 $d_1\geqslant d_2\geqslant s$，$d_3\geqslant s-1$，$d_4\geqslant\cdots\geqslant d_{3+s}\geqslant 3$ 且 $d_{3+s}\geqslant\cdots\geqslant d_n\geqslant 3$. 令

$$\pi'_1=\begin{cases}(d_2,d_3,d_4-1,\cdots,d_{3+d_1}-1,d_{3+d_1+1},\cdots,\\ \quad d_n), 若 d_1\leqslant n-3,\\ (d_2-1,d_3,d_4-1,\cdots,d_n-1), \quad 若 d_1=n-2,\\ (d_2-1,d_3-1,d_4-1,\cdots,d_n-1),\\ \quad 若 d_1=n-1,\end{cases}$$

且 $\pi''_1=(d_2^{(1)},d_3^{(1)},d_{3+1}^{(1)},\cdots,d_{3+s}^{(1)},d_{3+s+1}^{(1)},\cdots,d_n^{(1)})$，其中 $d_2^{(1)}\geqslant d_3^{(1)}$ 是 $\pi'_1$ 中前两项的重新排列，对于任意的整数 $i$，$1\leqslant i\leqslant s$，$d_{3+i}^{(1)}=d_{3+i}-1$ 且 $d_{3+s+1}^{(1)}\geqslant\cdots\geqslant d_n^{(1)}$ 是 $\pi'_1$ 中最后 $n-3-s$ 项的重新排列.

对于 $\pi''_1=(d_2^{(1)},d_3^{(1)},d_{3+1}^{(1)},\cdots,d_{3+s}^{(1)},d_{3+s+1}^{(1)},\cdots,d_n^{(1)})$，如果 $d_2^{(1)}\geqslant s$ 且 $d_3^{(1)}\geqslant s-1$，我们可以类似地定义 $\pi''_2$：令

$$\pi'_2=\begin{cases}(d_3^{(1)},d_{3+1}^{(1)}-1,\cdots,d_{3+d_2^{(1)}}^{(1)}-1,d_{3+d_2^{(1)}+1}^{(1)},\cdots,d_n^{(1)}),\\ \quad 若 d_2^{(1)}\leqslant n-3,\\ (d_3^{(1)}-1,d_4^{(1)}-1,\cdots,d_n^{(1)}-1),\\ \quad 若 d_2^{(1)}=n-2,\end{cases}$$

且 $\pi''_2=(d_3^{(2)},d_{3+1}^{(2)},\cdots,d_{3+s}^{(2)},d_{3+s+1}^{(2)},\cdots,d_n^{(2)})$，其中 $d_3^{(2)}$ 是 $\pi'_2$ 中的第一项，对于任意的整数 $i$，$1\leqslant i\leqslant s$，$d_{3+i}^{(2)}=d_{3+i}^{(1)}-1$，且 $d_{3+s+1}^{(2)}\geqslant\cdots\geqslant d_n^{(2)}$ 是 $\pi'_2$ 中最后 $n-s-3$ 项的重新排列.

对于 $\pi''_2=(d_3^{(2)},d_{3+1}^{(2)},\cdots,d_{3+s}^{(2)},d_{3+s+1}^{(2)},\cdots,d_n^{(2)})$，如果 $d_3^{(2)}\geqslant s-1$，则可定义 $\pi''_3$ 如下：令

$$\pi'_3=(d_{3+1}^{(2)}-1,\cdots,d_{d_3^{(2)}+3}^{(2)}-1,d_{d_3^{(2)}+3+1}^{(2)},\cdots,d_n^{(2)})，且$$

$\pi''_3=(d_{3+1}^{(3)},\cdots,d_{3+s}^{(3)},d_{3+s+1}^{(3)},\cdots,d_n^{(3)})$，其中 $d_{3+1}^{(3)}\geqslant\cdots\geqslant d_{3+s}^{(3)}$ 是 $\pi'_3$ 中前 $s$ 项的重新排列，$d_{3+s+1}^{(3)}\geqslant\cdots\geqslant d_n^{(3)}$ 是 $\pi'_3$ 中最后 $n-s-3$ 项的重新排列. 由 $\pi''_3$ 的定义，可得到下面的引理.

**引理 1.7** 设 $\pi=(d_1,d_2,d_3,d_{3+1},\cdots,d_{3+s},d_{3+s+1},\cdots,d_n)\in NS_n$，其中 $d_1\geqslant d_2\geqslant s$，$d_3\geqslant s-1$，$d_{3+1}\geqslant\cdots\geqslant d_{3+s}\geqslant 3$ 且 $d_{3+s+1}\geqslant\cdots\geqslant d_n\geqslant 3$. 令 $\pi''_3$ 如上所定义，如果 $\pi''_3$ 是可图的，则 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的.

对于引理 1.7 中定义的 $\pi''_3=(d_{3+1}^{(3)},\cdots,d_{3+s}^{(3)},d_{3+s+1}^{(3)},\cdots,d_n^{(3)})$，如果 $d_{3+1}^{(3)}\geqslant\cdots\geqslant d_{3+s}^{(3)}\geqslant 1$ 且 $d_{3+s+1}^{(3)}\geqslant\cdots\geqslant d_n^{(3)}\geqslant 1$，则可定义

$\pi'_{3+1}=(d_{3+2}^{(3)}-1,\cdots,d_{3+d_{3+1}^{(3)}+1}^{(3)}-1,d_{3+d_{3+1}^{(3)}+2}^{(3)},\cdots,d_n^{(3)})$，和 $\pi''_{3+1}=(d_{3+2}^{(3+1)},\cdots,d_{3+s}^{(3+1)},d_{3+s+1}^{(3+1)},\cdots,d_n^{(3+1)})$，其中 $d_{3+2}^{(3+1)}\geqslant\cdots\geqslant d_{3+s}^{(3+1)}$ 是 $\pi'_{3+1}$ 中前 $s-1$ 项的重新排列，而 $d_{3+s+1}^{(3+1)}\geqslant\cdots\geqslant d_n^{(3+1)}$ 是 $\pi'_{3+1}$ 中最后 $n-s-3$ 项的重新排列. 相应地，对于 $k=2,3,\cdots,s$，如果 $d_{3+k}^{(3+k-1)}\geqslant\cdots\geqslant d_{3+s}^{(3+k-1)}\geqslant 1$ 且 $d_{3+s+1}^{(3+k-1)}\geqslant\cdots\geqslant d_n^{(3+k-1)}\geqslant 1$，则 $\pi'_{3+k}$ 与 $\pi''_{3+k}$ 的定义都是类似的.

**引理 1.8**[10] 设 $\pi''_3=(d_{3+1}^{(3)}\cdots,d_{3+s}^{(s)},d_{3+s+1}^{(3)},\cdots,d_n^{(3)})$ 如引理 1.7 中定义的，$1\leqslant k\leqslant s$ 且令 $\pi''_{3+k}$ 如上所定义. 如果 $\pi''_{3+k}$ 是可图的，则 $\pi''_3$ 也是可图的.

**引理 1.9** 设 $\pi=(d_1,\cdots,d_3,d_4,\cdots,d_{3+s},d_{4+s},\cdots,d_n)\in GS_n$，其中 $d_3\leqslant s+1$，$d_n\geqslant 3$ 且 $s\geqslant 4$. 如果 $n\geqslant\frac{(s+3)^2}{4}+\frac{s+3}{2}$，且存在一个正整数 $t$，$1\leqslant t\leqslant\min\{2,[\frac{s}{2}]-1\}$ 使得 $d_{3+t}\geqslant s+1-t$ 且 $d_{3+s}\geqslant 3+t-1$，则 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的.

**证明** 将序列 $\pi$ 重新排列得到以下序列：$(p_1,\cdots,p_{3-t},p_{3-t+1},\cdots,p_3,p_4,\cdots,p_{3+t},p_{3+t+1},\cdots,p_n)$，其中 $p_1=d_1,\cdots,p_{3-t}=d_{3-t}$；$p_{4-t}=d_4,\cdots,p_3=d_{3+t}$；$p_4=d_{4-t},\cdots,p_{3+t}=d_3$；$p_{4+t}=d_{4+t},\cdots,p_n=d_n$. 为了方便，新的序列仍然记为 $\pi$. 显然，$p_1\geqslant\cdots\geqslant p_3\geqslant s+1-t$，$p_4\geqslant\cdots\geqslant p_{3+s}\geqslant 3+t-1$ 且 $s+1\geqslant p_{3+s+1}\geqslant\cdots\geqslant p_n\geqslant 3$. 由引理 1.7，只要证明 $\pi''_3$ 是可图的即可.

由于 $\pi''_{3-t-2}=(p_{3-t-1}^{(3-t-2)},\cdots,p_3^{(3-t-2)},\cdots,p_{3+s}^{(3-t-2)},p_{3+s+1}^{(3-t-2)},\cdots,p_n^{(3-t-2)})$ 满足

(1) $s+1\geqslant p_{3-t-1}^{(3-t-2)}\geqslant\cdots\geqslant p_3^{(3-t-2)}\geqslant d_{3+t}-(3-t-2)\geqslant s$，

(2) $s+1\geqslant p_{3+s+1}^{(3-t-2)}\geqslant\cdots\geqslant p_n^{(3-t-2)}\geqslant t+2$，

(3) $(p_{3-t-1}^{(3-t-2)}-s)+\cdots+(p_{3-1}^{(3-t-2)}-s)+(p_3^{(3-t-2)}-(s-1))\leqslant(t+1)+3-1\leqslant[\frac{s}{2}]+3-1<n-(3+s)$，

于是可以得到 $\pi''_3=(p_{3+1}^{(3)},\cdots,p_{3+t-1}^{(3)},p_{3+t}^{(3)},\cdots,p_{3+s}^{(3)},p_{3+s+1}^{(3)},\cdots,p_n^{(3)})$ 满足

(4) $n-3-1\geqslant p_{3+1}^{(3)}\geqslant\cdots\geqslant p_{3+t-1}^{(3)}$，

(5) $s+1\geqslant p_{3+t}^{(3)}\geqslant\cdots\geqslant p_{3+s}^{(3)}\geqslant t-1$，

(6) $s+1\geqslant p_{3+s+1}^{(3)}\geqslant\cdots\geqslant p_n^{(3)}\geqslant t+1$.

因此 $\pi''_{3+t-1}=(p_{3+t}^{(3+t-1)},\cdots,p_{3+s}^{(3+t-1)},p_{3+s+1}^{(3+t-1)},\cdots,p_n^{(3+t-1)})$ 满足

(7) $s+1\geqslant p_{3+t}^{(3+t-1)}\geqslant\cdots\geqslant p_{3+s}^{(3+t-1)}\geqslant 0$，

(8) $s+1\geqslant p_{3+s+1}^{(3+t-1)}\geqslant\cdots\geqslant p_n^{(3+t-1)}\geqslant 2$.

于是，$\frac{1}{2}[\frac{(s+1+2+1)^2}{4}]\leqslant\frac{(s+3)^2}{4}-\frac{s+3}{2}\leqslant n-(3+s)$. 由定理 1.4，$\pi''_{3+t-1}$ 是可图的，而由引理 1.8，$\pi''_3$ 也是可图的.

## 2 主要结论

### 2.1 当 $s$ 是偶数，$6\geqslant s\geqslant 4$ 且 $n$ 充分大时，$\sigma(K_{3,s}-ke,n)$ 的值

**引理 2.1.1** 设 $s$ 是偶数且 $6\geqslant s\geqslant 4$. 则

$$\sigma(K_{3,s}-3e,n)\geqslant\begin{cases}(\frac{s}{2}+3)n+s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4})-2, & \text{若 } s=4 \text{ 且 } n \text{ 为奇数,}\\ (\frac{s}{2}+3)n+s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4})-3, & \text{若 } s=4 \text{ 且 } n \text{ 为偶数或 } s=6.\end{cases}$$

**证明** 假设 $s=4$ 且 $n$ 为奇数. 考虑序列 $\pi=((n-1)^2,s,s-1,\cdots,\frac{s}{2}+2,(\frac{s}{2}+1)^{n-\frac{s}{2}-1})$，其中 $x^y$ 代表 $y$ 个连续的项，每一项都是 $x$，则 $\sigma(\pi)=(\frac{s}{2}+3)n+s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4})-4$ 是偶数并且 $f(\pi)=\frac{s}{2}+1$. 从 $\pi$ 的对角限制极左矩阵知 $\pi$ 的校正共轭向量 $\overline{\pi}=(\overline{d_1},\overline{d_2},\cdots,\overline{d_n})$ 满足 $\overline{d_1}=\overline{d_2}=\cdots=\overline{d_{\frac{s}{2}+1}}=n-1$. 对于任意的 $i$，$1\leqslant i\leqslant f(\pi)$，显然有 $d_1+d_2+\cdots+d_i\leqslant\overline{d_1}+\overline{d_2}+\cdots+\overline{d_i}$. 故由定理 1.1，$\pi\in GS_n$. 设 $\pi_1=(s-2,s-3,\cdots,\frac{s}{2},(\frac{s}{2}-1)^{n-\frac{s}{2}-1})$. 如果 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}-3e$ 可图的，则存在整数 $t$ 和 $l$，$\frac{s}{2}\geqslant l\geqslant 1$ 且 $t+l=s+1$ 满足 $\pi_1$ 是蕴含 $K_{l,t}-le$ 可图的. 因此，在 $\pi_1$ 中存在至少有 $l$ 项不小于 $s-l$，这是不可能的，故 $\pi$ 不是蕴含 $K_{3,s}-3e$ 可图的. 于是 $\sigma(K_{3,s}-3e,n)\geqslant\sigma(\pi)+2=(\frac{s}{2}+3)n+s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4})-2$.

现假设 $s=4$ 且 $n$ 为偶数或 $s=6$. 考虑序列 $\pi=((n-1)^2,s,s-1,\cdots,\frac{s}{2}+2,(\frac{s}{2}+1)^{n-\frac{s}{2}-2},\frac{s}{2})$. 则 $\sigma(\pi)=(\frac{s}{2}+3)n+s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4})-5$ 是偶数并且 $f(\pi)=\frac{s}{2}+1$. 从 $\pi$ 的对角限制极左矩阵知 $\pi$ 的校正共轭向量 $\overline{\pi}=(\overline{d_1},\overline{d_2},\cdots,\overline{d_n})$ 满足 $\overline{d_1}=\overline{d_2}=\cdots=\overline{d_{\frac{s}{2}}}=n-1$，$\overline{d_{\frac{s}{2}+1}}=n-2$. 对于任意的 $i$，$1\leqslant i\leqslant f(\pi)$，显然有 $d_1+d_2+\cdots+d_i\leqslant\overline{d_1}+\overline{d_2}+\cdots+\overline{d_i}$. 故由定理 1.1，$\pi\in GS_n$. 类似地可证明 $\pi$ 不是蕴含 $K_{3,s}-3e$ 可图的. 于是 $\sigma(K_{3,s}-3e,n)\geqslant\sigma(\pi)+2=(\frac{s}{2}+3)n+s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4})-3$.

**引理 2.1.2** 设 $s$ 是偶数，$6 \geqslant s \geqslant 4$ 且 $n = [\frac{(s+4)^2}{4}]$. 则

$$\sigma(K_{3,s}-e,n) \leqslant (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2 + \frac{3}{8}s^3 + \frac{17}{8}s^2 + \frac{5}{4}s.$$

**证明** 由定理 1.3，得

$\sigma(K_{3,s}-e,n) \leqslant \sigma(K_{(2+s)+1},n) \leqslant 2n(2+s-2) + 8 = (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2 + \frac{3}{2}sn - 3n - \frac{s^2}{8} + \frac{5}{4}s + 10 = (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2 + \frac{3}{8}s^3 + \frac{17}{8}s^2 + \frac{5}{4}s - 2 \leqslant (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2 + \frac{3}{8}s^3 + \frac{17}{8}s^2 + \frac{5}{4}s.$

**引理 2.1.3** 设 $s$ 是偶数，$6 \geqslant s \geqslant 4$ 且 $n \geqslant [\frac{(s+4)^2}{4}]$. 如果 $\pi = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in GS_n$ 满足 $d_n \geqslant 3$ 并且 $\sigma(\pi) \geqslant (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2$，则 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的.

**证明** 如果 $d_{3+s} \geqslant s+2$，则由定理 1.5，$\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}$ 可图的，因此 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的. 如果 $d_{3+s} \leqslant s+1$，$d_3 \geqslant s+2$，则由 $n \geqslant (3+2)(s-1)$ 和定理 1.6，$\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}$ 可图的，因此 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的.

现假设 $d_3 \leqslant s+1$. 如果对于任意的整数 $t \in \{1, 2, \cdots, \frac{s}{2}-1\}$ 使得 $d_{3+t} \leqslant s-t$，则 $\sigma(\pi) \leqslant 2(n-1) + (s+1) + (s-1) + (s-2) + \cdots + (s-\frac{s}{2}+1) + (s-\frac{s}{2}+1)(n-3-\frac{s}{2}+1) = (\frac{s}{2}+3)n + (\frac{s^2}{8}-\frac{5}{4}s) - 3 < (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2$. 因此存在一个整数 $t \in \{1, 2, \cdots, \frac{s}{2}-1\}$ 使得 $d_{3+t} \geqslant s+1-t$. 如果 $d_{3+s} \leqslant \frac{s}{2}$，则由 $4 \leqslant s \leqslant 6$，$\sigma(\pi) \leqslant 2(n-1) + s(s+1) + (n-s-2)\frac{s}{2} = (\frac{s}{2}+2)n + \frac{s^2}{2} - s - 2 < (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2$，与假设矛盾，故 $d_{3+s} \geqslant \frac{s}{2}+1$. 由引理 1.9，$\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的.

**引理 2.1.4** 设 $s$ 是偶数，$6 \geqslant s \geqslant 4$ 且 $n \geqslant [\frac{(s+4)^2}{4}] + t$，其中 $0 \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}s^2 + \frac{17}{2}s + 5$.

$$\sigma(K_{3,s}-e,n) \leqslant (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2 + \frac{s}{4}(\frac{3}{2}s^2 + \frac{17}{2}s + 5) - \frac{s}{4}t.$$

**证明** 对 $t$ 用归纳法. 由引理 2.1.2，结论对于 $t=0$ 成立. 假设结论对于 $t-1$ 成立，其中 $0 \leqslant t-1 \leqslant \frac{3}{2}s^2 + \frac{17}{2}s + 4$. 我们将证明结论对于 $t$ 也成立. 显然 $\sigma(\pi) \geqslant (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2$. 如果 $d_n \geqslant 3$，则由引理 2.1.3，$\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的. 如果 $d_n \leqslant 2$，则删去 $d_n$ 的剩余序列 $\pi'$ 满足 $\sigma(\pi') \geqslant \sigma(\pi) - 2d_n \geqslant (\frac{s}{2}+3)(n-1) + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2 + \frac{s}{4}(\frac{3}{2}s^2 + \frac{17}{2}s + 5) - \frac{s}{4}(t-1)$. 由归纳假设，$\pi'$ 是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的. 因此 $\pi$ 也是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的.

**引理 2.1.5** 设 $s$ 是偶数，$6 \geqslant s \geqslant 4$ 且 $n \geqslant [\frac{(s+4)^2}{4}] + \frac{3}{2}s^2 + \frac{17}{2}s + 5$，则 $\sigma(K_{3,s}-e,n) \leqslant (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2$.

**证明** 以下只需要证明：如果 $\pi = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in GS_n$ 满足 $\sigma(\pi) \leqslant (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2$，则 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的. 对 $n$ 用归纳法. 由引理 2.1.4，当 $n = [\frac{(s+4)^2}{4}] + \frac{3}{2}s^2 + \frac{17}{2}s + 5$ 时，以上命题成立. 假设命题对于 $n-1 \geqslant [\frac{(s+4)^2}{4}] + \frac{3}{2}s^2 + \frac{17}{2}s + 5$ 成立. 以下证明命题对于 $n$ 也成立. 如果 $d_n \geqslant 3$，则由引理 2.1.3，$\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的. 如果 $d_n \leqslant 2$，则删去 $d_n$ 后的剩余序列 $\pi'$ 满足 $\sigma(\pi') \geqslant (\frac{s}{2}+3)(n-1) + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2$. 由归纳假设 $\pi'$ 是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的. 因而 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}-e$ 可图的.

**定理 2.1.6** 设 $s$ 是偶数，$6 \geqslant s \geqslant 4$，$3 \geqslant k \geqslant 1$ 且 $n \geqslant [\frac{(s+4)^2}{4}] + \frac{3}{2}s^2 + \frac{17}{2}s + 5$. 则

$$\sigma(K_{3,s}-ke,n) = \begin{cases} (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2, & \text{若 } s=4 \text{ 且 } n \text{ 为奇数}, \\ (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 3, & \text{若 } s=4 \text{ 且 } n \text{ 为偶数或 } s=6. \end{cases}$$

**证明** 由于 $K_{3,s}-3e \subseteq K_{3,s}-ke \subseteq K_{3,s}-e$，因此 $\sigma(K_{3,s}-3e,n) \leqslant \sigma(K_{3,s}-ke,n) \leqslant \sigma(K_{3,s}-e,n)$. 由引理 2.1.1 和引理 2.1.5，如果 $s=4$ 且 $n$ 为奇数，则 $\sigma(K_{3,s}-ke,n) = (\frac{s}{2}+3)n + s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4}) - 2$.

如果 $s=4$ 且 $n$ 为偶数或 $s=6$，则 $(\frac{s}{2}+3)n +$

$s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4})-3\leqslant\sigma(K_{3,s}-ke,n)\leqslant(\frac{s}{2}+3)n+s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4})-2$,由于$\sigma(K_{3,s}-ke)$是偶数,因此$\sigma(K_{3,s}-ke)=(\frac{s}{2}+3)n+s(\frac{s}{8}-\frac{5}{4})-3$.

## 2.2 当$s=5$且$n$充分大时,$\sigma(K_{3,s}-ke,n)$的值

**引理 2.2.1** 设$s=5$.则

$$\sigma(K_{3,s}-3e,n)\geqslant\begin{cases}(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8},\text{若 }n\text{ 是偶数},\\(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{13}{8},\text{若 }n\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

**证明** 假设$n$是偶数.考虑序列$\pi=((n-1)^2,s,s-1,\cdots,\frac{s}{2}+\frac{5}{2},(\frac{s}{2}+\frac{3}{2})^{\frac{s+3}{2}},(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})^{n-s-2})$.则$\sigma(\pi)=(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{21}{8}$是偶数并且$f(\pi)=\frac{s}{2}+\frac{3}{2}$.从$\pi$的对角限制极左矩阵知$\pi$的校正共轭向量$\overline{\pi}=(\overline{d_1},\overline{d_2},\cdots,\overline{d_n})$满足$\overline{d_1}=\overline{d_2}=\cdots=\overline{d_{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}}=n-1,\overline{d_{\frac{s}{2}+\frac{3}{2}}}=\frac{s}{2}+\frac{1}{2}$.对于任意的$i,1\leqslant i\leqslant f(\pi)$,显然有$d_1+d_2+\cdots+d_i\leqslant\overline{d_1}+\overline{d_2}+\cdots+\overline{d_i}$.故由定理1.1,$\pi\in GS_n$.设$\pi_1=(s-2,s-3,\cdots,\frac{s}{2}+\frac{1}{2},(\frac{s}{2}-\frac{1}{2})^{\frac{s+3}{2}},(\frac{s}{2}-\frac{3}{2})^{n-s-2})$.如果$\pi$是蕴含$K_{3,s}-3e$可图的,则存在整数$t$和$l$,$\frac{s+1}{2}\geqslant l\geqslant 1$且$t+l=s+1$满足$\pi_1$是蕴含$K_{l,t}-le$可图的.如果$1\leqslant l<\frac{s+1}{2}$,则在$\pi_1$中至少有$l$项不小于$s-l$,这是不可能的;如果$l=t=\frac{s+1}{2}$,则在$\pi_1$中至少有$s+1$项不小于$\frac{s}{2}-\frac{1}{2}$,这也是不可能的.因此$\pi$不是蕴含$K_{3,s}-3e$可图的.故$\sigma(K_{3,s}-3e,n)\geqslant\sigma(\pi)+2=(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}$.

现假设$n$是奇数.考虑序列$\pi=((n-1)^2,s,s-1,\cdots,\frac{s}{2}+\frac{5}{2},(\frac{s}{2}+\frac{3}{2})^{\frac{s+3}{2}},(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})^{n-s-3},(\frac{s}{2}-\frac{1}{2}))$.则$\sigma(\pi)=(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{29}{8}$是偶数并且$f(\pi)=\frac{s}{2}+\frac{3}{2}$.从$\pi$的对角限制极左矩阵知$\pi$的校正共轭向量$\overline{\pi}=(\overline{d_1},\overline{d_2},\cdots,\overline{d_n})$满足$\overline{d_1}=\overline{d_2}=\cdots=\overline{d_{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}}=n-1,\overline{d_{\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}}=n-2,\overline{d_{\frac{s}{2}+\frac{3}{2}}}=\frac{s}{2}+\frac{1}{2}$.对于任意的$i,1\leqslant i\leqslant f(\pi)$,显然有$d_1+d_2+\cdots+d_i\leqslant\overline{d_1}+\overline{d_2}+\cdots+\overline{d_i}$.故由定理1.1,$\pi\in GS_n$.设$\pi_1=(s-2,s-3,\cdots,\frac{s}{2}+\frac{1}{2},(\frac{s}{2}-\frac{1}{2})^{\frac{s+3}{2}},(\frac{s}{2}-\frac{3}{2})^{n-s-3},\frac{s}{2}-\frac{5}{2})$.类似地可证明$\pi$不是蕴含$K_{3,s}-3e$可图的.故$\sigma(K_{3,s}-3e,n)\geqslant\sigma(\pi)+2=(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{13}{8}$.

**引理 2.2.2** 设$s=5$且$n=[\frac{(s+4)^2}{4}]$.则

$$\sigma(K_{3,s}-e,n)\leqslant(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}+\frac{1}{4}(\frac{3}{2}s^3+9s^2+\frac{15}{2}s-18).$$

**证明** 由定理1.3,

$\sigma(K_{3,s}-e,n)\leqslant\sigma(K_{(2+s)+1},n)\leqslant 2n(2+s-2)+8=(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}+\frac{3}{8}s^3+\frac{9}{4}s^2+\frac{9}{8}s-\frac{3}{4}=(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}+\frac{1}{4}(\frac{3}{2}s^3+9s^2+\frac{9}{2}s-3)\leqslant(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}+\frac{1}{4}(\frac{3}{2}s^3+9s^2+\frac{15}{2}s-18)$.

**引理 2.2.3** 设$s=5$且$n\geqslant[\frac{(s+4)^2}{4}]$.设$\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in GS_n$,其中$d_n\geqslant 3$.如果$\sigma(\pi)\geqslant(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}$,则$\pi$是蕴含$K_{3,s}-e$可图的.

**证明** 如果$d_{3+s}\geqslant s+2$,则由定理1.5,$\pi$是蕴含$K_{3,s}$可图的,因此$\pi$是蕴含$K_{3,s}-e$可图的.如果$d_{3+s}\leqslant s+1,d_3\geqslant s+2$,则由$n\geqslant(3+2)(s-1)$和定理1.6,$\pi$是蕴含$K_{3,s}$可图的,因此$\pi$是蕴含$K_{3,s}-e$可图的.

现假设$d_3\leqslant s+1$.如果对于任意的整数$t\in\{1,2,\cdots,[\frac{s}{2}]-1\}$使得$d_{3+t}\leqslant s-t$,则$\sigma(\pi)\leqslant 2(n-1)+(s+1)+(s-1)+(s-2)+\cdots+(\frac{s}{2}+\frac{3}{2})+(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})(n-\frac{s}{2}-\frac{3}{2})=(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{s^2}{8}-s-\frac{17}{8}<(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}$.因此存在一个整数$t\in\{1,2,\cdots,[\frac{s}{2}]-1\}$使得$d_{3+t}\geqslant s+1-t$.我们考虑下面两种情形.

**情形1** 如果存在一个整数$t\in\{1,2,\cdots,\frac{s}{2}-\frac{3}{2}\}$使得$d_{3+t}\geqslant s-t+1$.

如果$d_{3+s}\leqslant 3+\frac{s}{2}-\frac{3}{2}-2$,则由$s=5$,$\sigma(\pi)\leqslant 2(n-1)+s(s+1)+(\frac{s}{2}-\frac{1}{2})(n-s-2)=(\frac{s}{2}+\frac{3}{2})n+\frac{1}{2}s^2+\frac{s}{2}-1<(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-$

$\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}$,与已知矛盾.因此$d_{3+s}\geqslant 3+\frac{s}{2}-\frac{3}{2}-1$.由引理1.9,$\pi$是蕴含$K_{3,s}-e$可图的.

**情形2** 如果对于任意的整数$t$,$1\leqslant t\leqslant\frac{s}{2}-\frac{3}{2}$,使得$d_{3+t}\leqslant s-t$且$d_{\frac{s}{2}+\frac{5}{2}}\geqslant\frac{s}{2}+\frac{3}{2}$.

如果$d_{3+s}\leqslant 3+(\frac{s}{2}-\frac{1}{2})-2$,则$\sigma(\pi)\leqslant 2(n-1)+(s+1)+(s-1)+(s-2)+\cdots+(s-(\frac{s}{2}-\frac{3}{2}))+(\frac{s}{2}+\frac{3}{2})(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})+(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})(n-s-2)<(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}$,这与已知条件矛盾.因此$d_{3+s}\geqslant 3+(\frac{s}{2}-\frac{1}{2})-1$.由引理1.9,$\pi$是蕴含$K_{3,s}-e$可图的.

**引理2.2.4** 设$s=5$且$n\geqslant[\frac{(s+4)^2}{4}]+t$,其中$0\leqslant t\leqslant\frac{3}{2}s^2+\frac{21}{2}s+18$.

$$\sigma(K_{3,s}-e,n)\leqslant(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}+\frac{s-1}{4}(\frac{3}{2}s^2+\frac{21}{2}s+18)-\frac{s-1}{4}t.$$

**证明** 对$t$用归纳法.由引理2.2.2,当$t=0$时,引理成立.假设引理对于$0\leqslant t-1\leqslant\frac{3}{2}s^2+\frac{21}{2}s+17$成立.我们将证明引理对于$t$也成立.显然$\sigma(\pi)\geqslant(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}$.如果$d_n\geqslant 3$,则由引理2.2.3,$\pi$是蕴含$K_{3,s}-e$可图的.如果$d_n\leqslant 2$,则删去$d_n$的剩余序列$\pi'$满足$\sigma(\pi')\geqslant\sigma(\pi)-2d_n\geqslant(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})(n-1)+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}+\frac{s-1}{4}(\frac{3}{2}s^2+\frac{21}{2}s+18)-\frac{s-1}{4}(t-1)$.由归纳假设,$\pi'$和$\pi$都是蕴含$K_{3,s}-e$可图的.

**引理2.2.5** 设$s=5$且$n\geqslant[\frac{(s+4)^2}{4}]+\frac{3}{2}s^2+\frac{21}{2}s+18$,则

$$\sigma(K_{3,s}-e,n)\leqslant(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}.$$

**证明** 以下只需要证明:如果$\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)\in GS_n$满足$\sigma(\pi)\leqslant(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}$,则$\pi$是蕴含$K_{3,s}-e$可图的.对$n$用归纳法.由引理2.2.4,当$n=[\frac{(s+4)^2}{4}]+\frac{3}{2}s^2+\frac{21}{2}s+18$时,以上命题成立.假设命题对于$n-1\geqslant[\frac{(s+4)^2}{4}]+\frac{3}{2}s^2+\frac{21}{2}s+18$成立.我们将证明命题对于$n$也成立.如果$d_n\geqslant 3$,则由引理2.2.3,$\pi$是蕴含$K_{3,s}-e$可图的.如果$d_n\leqslant 2$,则删去$d_n$后的剩余序列$\pi'$满足$\sigma(\pi')\geqslant(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})(n-1)+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}$.由归纳假设$\pi'$和$\pi$都是蕴含$K_{3,s}-e$可图的.

**定理2.2.6** 设$s=5$,$3\geqslant k\geqslant 1$,且$n\geqslant[\frac{(s+4)^2}{4}]+\frac{3}{2}s^2+\frac{21}{2}s+18$.则

$$\sigma(K_{3,s}-ke,n)=\begin{cases}(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8},\text{若 }n\text{ 是偶数},\\(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{13}{8},\text{若 }n\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

**证明** 由于$K_{3,s}-3e\subseteq K_{3,s}-ke\subseteq K_{3,s}-e$,因此$\sigma(K_{3,s}-3e,n)\leqslant\sigma(K_{3,s}-ke,n)\leqslant\sigma(K_{3,s}-e,n)$.由引理2.2.1和引理2.2.5,如果$n$是偶数,$\sigma(K_{3,s}-ke,n)=(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}$.如果$n$是奇数,则$(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{13}{8}\leqslant\sigma(K_{3,s}-ke,n)\leqslant(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{5}{8}$,由于$\sigma(K_{3,s}-ke)$是偶数,因此$\sigma(K_{3,s}-ke)=(\frac{s}{2}+\frac{5}{2})n+\frac{1}{8}s^2-\frac{1}{2}s-\frac{13}{8}$.

## 2.3 当$s\geqslant 7$且$n$充分大时,$\sigma(K_{3,s}-ke,n)$的值

**引理2.3.1** 设$s\geqslant 7$.则$\sigma(K_{3,s}-3e,n)\geqslant$

$$\begin{cases}sn-2s+7,\text{若 }s\text{ 是奇数且 }n\text{ 是奇数},\\sn-2s+6,\text{若 }s\text{ 是偶数或 }n\text{ 是偶数}.\end{cases}$$

**证明** 假设$s$是奇数且$n$是奇数.考虑序列$\pi=((n-1)^2,s,s-1,(s-2)^{n-4})$.则$\sigma(\pi)=sn-2s+5$是偶数并且$f(\pi)=s-2$.从$\pi$的对角限制极左矩阵知$\pi$的校正共轭向量$\bar{\pi}=(\bar{d}_1,\bar{d}_2,\cdots,\bar{d}_n)$满足$\bar{d}_1=\bar{d}_2=\cdots=\bar{d}_{s-2}=n-1$.对于任意的$i$,$1\leqslant i\leqslant f(\pi)$,显然有$d_1+d_2+\cdots+d_i\leqslant\bar{d}_1+\bar{d}_2+\cdots+\bar{d}_i$.故由定理1.1,$\pi\in GS_n$.设$\pi_1=(s-2,s-3,(s-4)^{n-4})$.如果$\pi$是蕴含$K_{3,s}-3e$可图的,则存在整数$t$和$l$,$3\geqslant l\geqslant 1$且$t+l=s+1$满足$\pi_1$是蕴含$K_{l,t}-le$可图的.因此,在$\pi_1$中存在至少有$l$项不小于$s-l$,这是不可能的.因此$\pi$不是蕴含$K_{3,s}-3e$可图的.故$\sigma(K_{3,s}-3e,n)\geqslant\sigma(\pi)+2=sn-2s+7$.

现假设$s$是偶数或$n$是偶数.考虑序列$\pi=((n-1)^2,s,s-1,(s-2)^{n-5},s-3)$.则$\sigma(\pi)=sn-2s+4$是偶数并且$f(\pi)=s-2$.从$\pi$的对角限制极左矩阵知$\pi$的校正共轭向量$\bar{\pi}=(\bar{d}_1,\bar{d}_2,\cdots,\bar{d}_n)$满足$\bar{d}_1=\bar{d}_2$

$= \cdots = \overline{d_{s-3}} = n-1, \overline{d_{s-2}} = n-2$. 对于任意的 $i$, $1 \leqslant i \leqslant f(\pi)$, 显然有 $d_1 + d_2 + \cdots + d_i \leqslant \overline{d_1} + \overline{d_2} + \cdots + \overline{d_i}$. 故由定理 1.1, $\pi \in GS_n$. 设 $\pi_1 = (s-2, s-3, (s-4)^{n-5}, s-5)$. 类似地可证明 $\pi$ 不是蕴含 $K_{3,s} - 3e$ 可图的. 故 $\sigma(K_{3,s} - 3e, n) \geqslant sn - 2s + 6$.

**引理 2.3.2** 设 $s \geqslant 7$ 且 $n = [\frac{(s+4)^2}{4}]$. 则

$$\sigma(K_{3,s} - e, n) \leqslant sn - 2s + 7 + \frac{1}{3}(\frac{3}{4}s^3 + 6s^2 + 24s - \frac{123}{4}).$$

**证明** 由定理 1.3,

$\sigma(K_{3,s} - e, n) \leqslant \sigma(K_{(2+s)+1}, n) \leqslant 2n(2 + s - 2) + 8 \leqslant sn - 2s + 7 + \frac{1}{4}s^3 + 2s^2 + 6s + 1 \leqslant sn - 2s + 7 + \frac{1}{4}s^3 + 2s^2 + 8s - \frac{41}{4} = sn - 2s + 7 + \frac{1}{3}(\frac{3}{4}s^3 + 6s^2 + 24s - \frac{123}{4})$.

**引理 2.3.3** 设 $s \geqslant 7$ 且 $n \geqslant [\frac{(s+4)^2}{4}]$. 设 $\pi = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in GS_n$, 其中 $d_n \geqslant 3$. 如果 $\sigma(\pi) \geqslant sn - 2s + 7$, 则 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s} - e$ 可图的.

**证明** 如果 $d_{3+s} \geqslant s+2$, 则由定理 1.5, $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}$ 可图的, 因此 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s} - e$ 可图的. 如果 $d_{3+s} \leqslant s+1$, $d_3 \geqslant s+2$, 则由 $n \geqslant (3+2)(s-1)$ 和定理 1.6, $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s}$ 可图的, 因此 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s} - e$ 可图的.

现假设 $d_3 \leqslant s+1$. 如果对于任意的整数 $t$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, 使得 $d_{3+t} \leqslant s - t$, 则 $\sigma(\pi) \leqslant 2(n-1) + (s+1) + (s-1) + (s-2)(n-4) = sn - 2s + 6 < sn - 2s + 7$. 因此存在一个整数 $t$, $1 \leqslant t \leqslant 2$, 使得 $d_{3+t} \geqslant s + 1 - t$. 如果 $d_{3+s} \leqslant 3$, 则由 $s \geqslant 7$, $\sigma(\pi) \leqslant 2(n-1) + s(s+1) + 3(n-s-2) = 5n + s^2 - 2s - 8 < sn - 2s + 7$, 与假设矛盾, 故 $d_{3+s} \geqslant 4$. 由引理 1.9, $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s} - e$ 可图的.

**引理 2.3.4** 设 $s \geqslant 7$ 且 $n \geqslant [\frac{(s+4)^2}{4}] + t$, 其中 $0 \leqslant t \leqslant \frac{3}{4}s^2 + \frac{27}{4}s + \frac{123}{4}$. 则

$$\sigma(K_{3,s} - e, n) \leqslant sn - 2s + 7 + \frac{s-1}{3}(\frac{3}{4}s^2 + \frac{27}{4}s + \frac{123}{4}) - \frac{s-1}{3}t.$$

**证明** 对 $t$ 用归纳法. 由引理 2.3.2, 当 $t = 0$ 时, 引理成立. 假设引理对于 $0 \leqslant t - 1 \leqslant \frac{3}{4}s^2 + \frac{27}{4}s + \frac{119}{4}$ 成立. 以下将证明引理对于 $t$ 也成立. 显然 $\sigma(\pi) \geqslant sn - 2s + 7$. 如果 $d_n \geqslant 3$, 则由引理 2.3.3, $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s} - e$ 可图的. 如果 $d_n \leqslant 2$, 则删去 $d_n$ 的剩余序列 $\pi'$ 满足 $\sigma(\pi') = \sigma(\pi) - 2d_n \geqslant s(n-1) - 2s + 7 + \frac{s-1}{3}(\frac{3}{4}s^2 + \frac{27}{4}s + \frac{123}{4}) - \frac{s-1}{3}(t-1)$. 由归纳假设, $\pi'$ 是蕴含 $K_{3,s} - e$ 可图的. 因此 $\pi$ 也是蕴含 $K_{3,s} - e$ 可图的.

**引理 2.3.5** 设 $s \geqslant 7$ 且 $n \geqslant [\frac{(s+4)^2}{4}] + \frac{3}{4}s^2 + \frac{27}{4}s + \frac{123}{4}$, 则

$$\sigma(K_{3,s} - e, n) \leqslant sn - 2s + 7.$$

**证明** 以下只需要证明: 如果 $\pi = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in GS_n$ 满足 $\sigma(\pi) \leqslant sn - 2s + 7$, 则 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s} - e$ 可图的. 对 $n$ 用归纳法. 由引理 2.3.4, 当 $n = [\frac{(s+4)^2}{4}] + \frac{3}{4}s^2 + \frac{27}{4}s + \frac{123}{4}$ 时, 以上命题成立. 假设以上命题对于 $n - 1 \geqslant [\frac{(s+4)^2}{4}] + \frac{3}{4}s^2 + \frac{27}{4}s + \frac{123}{4}$ 成立. 我们将证明命题对于 $n$ 也成立. 如果 $d_n \geqslant 3$, 则由引理 2.3.3, $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s} - e$ 可图的. 如果 $d_n \leqslant 2$, 则删去 $d_n$ 后的剩余序列 $\pi'$ 满足 $\sigma(\pi') \geqslant s(n-1) - 2s + 7$. 由归纳假设 $\pi'$ 是蕴含 $K_{3,s} - e$ 可图的. 因而 $\pi$ 是蕴含 $K_{3,s} - e$ 可图的.

**定理 2.3.6** 设 $s \geqslant 7$, $3 \geqslant k \geqslant 1$, 且 $n \geqslant [\frac{(s+4)^2}{4}] + \frac{3}{4}s^2 + \frac{27}{4}s + \frac{123}{4}$. 则

$$\sigma(K_{3,s} - ke, n) = \begin{cases} sn - 2s + 7, \text{若 } s \text{ 是奇数且 } n \text{ 是奇数}, \\ sn - 2s + 6, \text{若 } s \text{ 是偶数或 } n \text{ 是偶数}. \end{cases}$$

**证明** 由于 $K_{3,s} - 3e \subseteq K_{3,s} - ke \subseteq K_{3,s} - e$, 因此 $\sigma(K_{3,s} - 3e, n) \leqslant \sigma(K_{3,s} - ke, n) \leqslant \sigma(K_{3,s} - e, n)$. 由引理 2.3.1 和引理 2.3.5, 如果 $s$ 是奇数且 $n$ 是奇数, $\sigma(K_{3,s} - ke, n) = sn - 2s + 7$.

如果 $s$ 是偶数或 $n$ 是偶数, 则 $sn - 2s + 6 \leqslant \sigma(K_{3,s} - ke, n) \leqslant sn - 2s + 7$, 由于 $\sigma(K_{3,s} - ke)$ 是偶数, 因此 $\sigma(K_{3,s} - ke, n) = sn - 2s + 6$.

**参考文献:**


[1] GOULD R J, JACOBSON M S, LEHEL J. Potentially G-graphic degree sequences [M]//ALAVI Y, et al. Combinatorics, Graph Theory, and Algorithms. Kalamazoo Michigan: New Issues Press, 1999: 387-400.

[2] ERDöS P, JACOBSON M S, LEHEL J. Graphs realizing the same degree sequences and their respective clique numbers [M]//ALAVI Y, et al. Graph Theory, Combinatorics and Applications. New York: John Wiley & Sons, 1991: 439-449.

[3] LI J S, SONG J S. An extremal problem on the

potentially $P_k$-graphic sequence[J]. Discrete Math, 2000, 212:223-231.
[4] LI J S, SONG Z X. The smallest degree sum that yields potentially $P_k$- graphic sequences[J]. J Graph Theory, 1998, 29:63-72.
[5] LI J S, SONG Z X, LUO R. The Erdös-Jacobson-Lehel conjecture on potentially $P_k$-graphic sequences is true [J]. Science in China, 1998, 41:510-520.
[6] LAI C H. A note on potentially $K_4$-$e$ graphical sequences [J]. The Australasian Journal of Combinatorics, 2001, 24 (1):123-127.
[7] YIN J H, LI J S, MAO R. An extremal problem on the potentially $K_{r+1}-e$-graphic sequences [J]. Ars Combinatoria, 2005, 74:151-160.
[8] YIN J H, LI J S. An extremal problem on potentially $K_{r,s}$-graphic sequences [J]. Discrete Math, 2003, 260: 295-305.
[9] YIN J H, LI J S. The smallest degree sum that yields potentially $K_{r,r}$- graphic sequences[J]. Science in China: Serc(A), 2002, 45:694-705.
[10] YIN J H, LI J S, CHEN G L. A variation of a classical Turán-type extremal problem, European J [J]. Combinatorics, 2004, 25:989-1002.
[11] 赖春晖. 蕴含 $C_k$ 图的度序列[J]. 漳州师范学院学报, 1997(4):27-31.
[12] KLEITMAN D J, WANG D L. Algorithm for constructing graphs and digraphs with given valences and factors[J]. Discrete Math, 1973(6):79-88.
[13] BERGE C. Graphs and Hypergraph[M]. Amsterdam: North-Holland, 1973.

（责任编辑：邓大玉　凌汉恩）

## 多学科应用的散裂中子源

中子是构成物质的基本粒子，中子散射技术是用高能质子等快速粒子轰击重原子核，使其中部分中子“散裂”出来，然后用中子束流瞄准样品，探测、计算得到散射中子的能量、散射角度及位置，进而得到固体位置、运动、特性等信息。在国际上，中子散射技术都已经发展到了一个较好的阶段。中子散射技术已成为当前研究物质微观结构及其动力学过程最重要的工具之一，中子散射可帮助科学家了解从液态晶体到超导陶瓷、从蛋白质到塑料、从金属到胶粒等各种物质特性的详细情况，在诸如凝聚态物理、化学、生物工程等领域被广泛采用。由于中子的特殊性质，在研究物质内部微观运动规律，测定氢元素和同位素的位置，以及磁性结构等方面具有同步辐射光源不可替代的作用。散裂中子源是新一代强化的中子源，它能产生比核反应堆强10～100倍的有效中子流，有助于提升物理学、化学、生命科学、材料科学、纳米科学等众多学科的基础性创新研究水平。散裂中子源不使用核燃料，不存在核临界问题，安全可靠。

不断向高精深层次发展、各学科广泛交叉并与高新技术的密切结合是当今科学研究发展的趋势。不同类型的大科学装置及其衍生的强大综合功能，极大提高了人类探索微观世界的能力，已成为物质科学研究非常重要的实验装置，并由此涉及十分广泛的学科领域。散裂中子源具有广泛的多学科应用前景，以目前的医学成像技术为例，虽然CT、MRI（核磁共振成像）等的空间分辨率达到了毫米数量级和亚毫米数量级，国际上第五代最新高精度多层螺旋CT已经达到0.35mm的空间分辨率，但仍然看不到细胞的结构。中子应用于医学成像，主要有两大优势：一是与相同能量的其他粒子相比，其穿透能力高；二是中子对于存在于人体的轻化学元素具有极高的分辨率，因此很适合于人体的软组织成像。中子成像在医学应用中对于肿瘤、心血管疾病、肝脏疾病等将极有帮助。例如肺部的肿瘤，通过中子成像有可能显示结构很有规律的正常肺组织，并且将具有其他影像学结构的肿瘤组织区分开来；中子成像还有助于骨肿瘤的鉴别诊断以及精确确定肝脏内肝细胞与纤维细胞的比例，有望为医学影像诊断带来一场革命性的变革。

依托大科学装置建立一流科研基地，是未来中国科学的发展方向。基于这些大科学装置实验技术的综合应用，尤其是具有方法学互补优势的大科学装置和技术，是建立一流交叉学科科研基地的基础。散裂中子源是为多学科应用提供创新性研究服务的平台型大型科学装置，能将我国的科技创新研究和工业应用提高到一个新水平。

（据科学网）