广西科学 Guangxi Sciences 2006，13(3)：184～186,193

半相依回归系统参数的 Stein 型主成分改进估计

The Stein-type Principal Components Adjusted Estimate of the Parameters in Seemingly Unrelated Regression System

朱　宁，徐　标，李　兵

ZHU Ning，XU Biao，LI Bing

（桂林电子工业学院计算科学与数学系，广西桂林　541004）

（Department of Computational Science and Mathematics，Guilin University of Electronic Technology，Guilin，Guangxi，541004，China）

摘要：将 Stein 压缩思想与主成分改进估计相结合，研究两个半相依回归系统. 当设计阵呈病态时，提出 Stein 型主成分改进估计，同时，给出当 V 未知时的两步估计. 证明在均方误差意义下，Stein 型主成分改进估计局部优于主成分改进估计和协方差改进估计.

关键词：半相依回归系统　协方差改进估计　Stein 型主成分改进估计　两步估计

中图法分类号：O212.1　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2006)03-0184-03

Abstract：We would relate Stein-Type Shrunken thingking to the principal components adjusted estimate to study a seemingly unrelated regression system. A Stein-Type principal Components adjusted estimate is proposed as the design matrix is ill-conditioned while giving two-age estimate when V is unknown. Under the criteria of means square error，the Stein-Type principal components adjust estimate is better than the principal components adjust estimate and covariance adjusted estimate.

Key words：the seemingly regression，covariance adjusted estimate，Stein-type principal components adjusted estimate，two-stage estimate

由两个半相依回归方程组成的线性回归系统

$$y_i = X_i\beta_i + e_i, i = 1,2.$$

$$E(e_i) = 0, \mathrm{Cov}(e_i, e_j) = \sigma_{ij}I_n, i,j = 1,2. \quad (1)$$

y_i 为 $n \times 1$ 的观测向量，X_i 为 $n \times p_i$ 的列满秩阵，即 $R(X_i) = p_i$，β_i 为 $p_i \times 1$ 的未知回归参数，e_i 为 $n \times 1$ 的随机误差向量，$V = (\sigma_{ij})$ 为二阶正定矩阵，在计量经济、工业、生命科学等许多领域中都有广泛的应用，因此如何利用这个回归系统来改进回归系数 $\beta = (\beta_1, \beta_2)'$ 的估计，成为一个非常重要的问题.

当回归系统(1) 中的 V 已知时，在线性估计类

$$L = \{A_1y_1 + A_2y_2 : A_i \text{ 为 } p \times n \text{ 矩阵}, i = 1,2, p = p_1 + p_2\}$$

中，回归系数 β 的最佳线性无偏估计（简记为 BLU 估计）为

$$\beta^* = [X'(V^{-1} \otimes I)X]^{-1}X'(V^{-1} \otimes I)y,$$

这里 $y = (y'_1, y'_2)$，$X = \mathrm{diag}(X_1, X_2)$，$A \otimes B$ 为 A 与 B 的 Kronecher 乘积.

但是，在实际问题中 V 往往是未知的，需要另辟途径来获得 β 的估计. 王松桂[1] 提出一种附加信息逐次迭加的新的估计方法，称为协方差改进估计，记第一个方程回归系数 β_1 的协方差改进估计为 $\tilde{\beta}_1$，$\tilde{\beta}_1$ 是 β_1 的无偏估计，当 V 未知时用它的估计 $S = (s_{ij})$ 代替，得到两步协方差改进估计 $\tilde{\beta}_1(T)$，并且给出改进估计 $\tilde{\beta}_1$ 协方差和均方误差.

当设计阵 X_1 呈病态时，刘爱义[2] 在上述基础上，对回归系统(1) 提出主成分改进估计，记为 β_1^* 和 V 未知时相应的两步估计 $\beta_1^*(T)$，并证明当 X_1 呈病态时，在均方误差准则下的一些优良性质.

本文将 Stein 压缩思想与主成分改进估计相结合，提出 Stein 型主成分改进估计：

$$\beta_1^*(c) = c\Phi_1\Phi'_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1(y_1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}N_2y_2) =$$

收稿日期：2005-12-19

修回日期：2006-03-22

作者简介：朱宁(1948-)，男，副教授，主要从事多元统计分析，以及数学建模与实践方面的工作。

$c\tilde{\beta}_1^* = c\Phi_1\Phi'_1\tilde{\beta}_1$, (2)

其中:$0 \leqslant c \leqslant 1$ 为常数,这里 $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ 为 X'_1X_1 的标准正交特征向量组成的矩阵. 且 $\Phi' X'_1 X_1 \Phi = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_{p_1}) = \Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2)$,这里 $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_r \geqslant 1 > \lambda_{r+1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{p_1}$ 为 X'_1X_1 的特征根. 同时,给出了当 V 未知时的两步估计:

$$\beta_1^*(c,T) = c\Phi_1\Phi'_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1(y_1 - \frac{s_{12}}{s_{22}}N_2y_2) = c\beta_1^*(T) = c\Phi_1\Phi'_1\tilde{\beta}_1(T), \quad (3)$$

证明在均方误差意义下,Stein 型主成分改进估计局部优于主成分改进估计和协方差改进估计.

1 Stein 型主成分改进估计

由(2)知,当 $c=1$ 时,$\beta_1^*(1) = \beta_1^*$,即主成分改进估计是Stein 型主成分改进估计的特例. 当 $0 < c < 1$ 时,$\beta_1^*(c)$ 为 LS 估计 β_1 的一种有偏估计,因为 $E(\beta_1^*(c)) = c\Phi_1\Phi'_1\beta_1$,又 $\| \beta_1^*(c) \|^2 = \| c\Phi_1\Phi'_1\tilde{\beta}_1 \|^2 < c^2 \| \tilde{\beta}_1 \|^2 < \| \tilde{\beta} \|^2$,所以 $\beta_1^*(c)$ 是 $\tilde{\beta}_1$ 向原点压缩得到的,即 $\beta_1^*(c)$ 是一种压缩型有偏估计.

下面给出一个非常有用的引理,证明见文献[2].

引理1 设 $\tilde{\theta}$ 是参数 θ 的估计,$\hat{\theta}$ 是均值为零的附加信息,即 $E\hat{\theta} = 0$,且 $Cov\begin{pmatrix}\tilde{\theta}\\ \hat{\theta}\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}V_{11} & V_{12}\\ V_{21} & V_{22}\end{bmatrix}$,$V_{22} > 0$,则在估计类 $A = \{\theta^*(X) = \tilde{\theta} + X\hat{\theta}\}$ 中,估计 $\theta^* = \tilde{\theta} - V_{12}V_{22}^{-1}\hat{\theta}$ 具有最小的均方误差,且 $MSE(\theta^*) = MSE(\tilde{\theta}) - tr(V_{12}V_{22}^{-1}V_{21})$.

令 Z_2 满足 $X'_2Z_2 = 0$ 且具有最大秩的列满秩阵,则 Z'_2y_2 的均值为零,$\hat{\beta}_1^*(c) = c\Phi_1\Lambda_1^{-1}\Phi'_1X'_1y_1$ 为 Stein 型主成分估计[3],且

$$Cov\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1^*(c)\\ Z'_2y_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c^2\sigma_{11}\Phi_1\Lambda_1^{-1}\Phi_1 & c\sigma_{12}\Phi_1\Lambda_1^{-1}\Phi_1X'_1Z_2\\ c\sigma_{21}Z'_2X_1\Phi_1\Lambda_1^{-1}\Phi_1 & \sigma_{22}Z'_2Z_2\end{bmatrix}. \quad (1.1)$$

于是,根据引理1当 V 已知时,可以构造 β_1 的估计

$$\hat{\beta}_1^*(c) - c\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}\Phi_1\Lambda_1^{-1}\Phi'_1X'_1Z_2(Z'_2Z_2)^{-1}Z'_2y_2 = c\Phi_1\Lambda_1^{-1}\Phi'_1(X'_1y_1 - \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}X'_1N_2y_2), 0 \leqslant c \leqslant 1,$$

即为 Stein 型主成分改进 $\beta_1^*(c)$.

由引理1得到下列结论:

定理1 当 V 已知时,在均方误差意义下 Stein 型主成分改进估计 $\beta_1^*(c)$ 优于 Stein 型主成分估计 $\hat{\beta}_1^*(c)$,且

$$MSE(\beta_1^*(C)) = MSE(\hat{\beta}_1^*(c)) - c^2\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}tr\Lambda_1^{-2}\Phi'_1X'_1N_2X_1\Phi_1. \quad (1.2)$$

下面两个定理讨论了Stein 型主成分改进估计相对于协方差改进估计的优良性.

定理2 当 V 已知,且设计阵 X_1 呈病态时,在均方误差意义下 Stein 型主成分改进估计 $\beta_1^*(c)$ 优于协方差改进估计 $\tilde{\beta}_1$.

证明 $MSE(\beta_1^*(c)) = c\sigma_{11}tr\Lambda_1^{-1} - c^2\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}tr\Lambda_1^{-2}\Phi'_1X'_1N_2X_1\Phi_1 + \delta^*(c)$, (1.3)

其中 $\delta^*(c) = (E\hat{\beta}_1^*(c) - \beta_1)'(E\hat{\beta}_1^*(c) - \beta_1)$,

$MSE(\tilde{\beta}_1) = \sigma_{11}tr\Lambda^{-1} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}tr\Lambda^{-2}\Phi'X'_1N_2X_1\Phi$,

$$MSE(\tilde{\beta}_1) - MSE(\beta_1^*(c))$$
$$\sigma_{11}(tr\Lambda_1^{-1} - trc\Lambda_1^{-1}) - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}tr[\Lambda_1^{-2} - c\Lambda_1^{-2}]\Phi'_1X'_1N_2X_1\Phi_1 + \sigma_{11}tr\Lambda_2^{-1} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}tr\Lambda_2^{-2}\Phi'_2X'_1N_2X_1\Phi_2 - \delta^*(c) \geqslant \sigma_{11}(tr\Lambda_1^{-1} - trc\Lambda_1^{-1}) - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}tr[\Lambda_1^{-2} - c\Lambda_1^{-2}]\Phi'_1X'_1X_1\Phi_1 + \sigma_{11}tr\Lambda_2^{-1} - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}}tr\Lambda_2^{-2}\Phi'_2X'X_1\Phi_2 - \delta^*(c) = \sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)tr[\Lambda_1^{-1} - c\Lambda_1^{-1}] + \sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)tr\Lambda_2^{-1} - \delta^*(c), \quad (1.4)$$

当 X_1 呈病态时,$tr\Lambda_2^{-1}$ 很大,可使上式右端为正. 结论得证.

定理3 当 V 已知,且

$$\beta'_1D\beta_1 \leqslant \sigma_1(1 - \rho_{12}^2) \quad (1.5)$$

时,在均方误差意义下,Stein 型主成分改进估计 $\beta_1^*(c)$ 优于协方差改进估计 $\tilde{\beta}_1$. 其中

$$D = \Phi\begin{bmatrix}(1-c)^{-1}\Lambda_1 & \\ & \Lambda_2\end{bmatrix}\Phi'.$$

证明 将(2.4)式改写为 $MSE(\beta_1^*) - MSE(\beta_1^*(c)) = trM$. (1.6)

其中:

$$M = \sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)tr[\Lambda_1^{-1} - c\Lambda_1^{-1}] + \sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)tr\Lambda_2^{-1} - \Gamma(c),$$

$$\Gamma(c) = (c\Phi_1\Phi'_1 - I)\beta_1\beta'_1(c\Phi_1\Phi'_1 - I).$$

又因为:若 $A > 0, d > 0$ 为实数,x 为向量,则 $dA - xx' > 0 \Leftrightarrow x'A^{-1}x < d$. 可知 $M > 0$ 的充要条件为: $\beta'_1(c\Phi_1\Phi'_1 - I)[(1-c)\Phi_1\Lambda_1^{-1}\Phi'_1 + \Phi_2\Lambda_2^{-1}\phi'_2]^{-1}(c\Phi_1\Phi'_1 - I)\beta_1 < \sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)$,整理得: $\beta'_1[(1-c)\Phi_1\Lambda_1\Phi'_1 + \Phi_2\Lambda_2\Phi_2]\beta_1 < \sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)$

即为(2.2),也是(2.3)右端为正的一个充分条件.

定理4 当 $\| \beta_1 \|^2/\sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)\sum_{i=1}^{r}\lambda^{(1)-1} +$

$\| \beta_1 \|^2 < c < 1$,时,有 $MSE(\beta_1^*(c)) \leqslant MSE(\beta_1^*)$.

证明 由 $\Phi'_1\Phi_1 = I_r, \Phi'_2\Phi_2 = I_{p_1-r}, \Phi_1\Phi'_1 + \Phi_2\Phi'_2 = I_{p1} MSE\beta_1^*(c) - MSE(\beta_1^*) = trcov\beta_1^*(c) + \| E(\beta_1^*(c)) - \beta_1 \|^2 - trcov\beta_1^* - \| E(\beta_1^*) - \beta_1 \|^2 = (c^2-1)trcov\beta_1^* + (c^2-1)\| E(\beta_1^*) - \beta_1 \|^2 + (c-1)^2\beta_1'\beta_1 + 2c(c-1)(E(\beta_1^*) - \beta)' * \beta = (c^2-1)tr(\Phi'_1 Cov(\widetilde{\beta}_1)\Phi_1) + (c^2-1)\beta_1'\Phi_2\Phi'_2\beta_1 + (c-1)^2\beta_1'\beta_1 - 2c(c-1)\beta_1'\Phi_2\Phi'_2\beta_1 = (c^2-1)tr(\Phi'_1 Cov(\widetilde{\beta}_1)\Phi_1) + (c-1)^2\beta_1'\Phi_1\Phi'_1\beta_1 \triangleq M_1(c)$,

$M_1(c) = c^2(tr(\Phi'_1 Cov(\widetilde{\beta}_1)\Phi_1) + \| \Phi'_1\beta_1 \|^2) - 2c\| \Phi'_1\beta_1 \|^2 - tr\Phi_1 Cov(\widetilde{\beta}_1)\Phi'_1 + \| \Phi'_1\beta_1 \|^2$. (1.7)

所以 $M_1(c)$ 是关于 c 的一元二次函数,注意到:$Cov(\widetilde{\beta}_1) > 0$,其二次项系数 $a = (tr(\Phi_1 Cov(\widetilde{\beta}_1)\Phi'_1) + \| \Phi'_1\beta_1 \|^2) > 0$,一次项系数 $b = -2\| \Phi'_1\beta_1 \|^2$,由一元二次函数的性质得,在区间 $(-\frac{b}{2a}, 1)$ 上 $M_1(c)$ 为 c 的增函数.又 $M_1(1) = 0$,故在 $-\frac{b}{2a} \leqslant c \leqslant 1$ 时,$M_1(c) < 0$,即 $MSE(\beta_1^*(c)) \leqslant MSE(\beta_1^*)$.又

$tr(\Phi'_1 Cov(\widetilde{\beta}_1)\Phi_1) = tr(\sigma_{11}\Phi'_1(X'_1X_1)^{-1}\Phi_1 - \Phi'_1(\sigma_{12}^2/\sigma_{22})(X'_1X_1)^{-1}X'_1N_2X_1(X'_1X_1)^{-1}\Phi_1) \geqslant tr\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)tr\Phi'_1(X'_1X_1)^{-1}\Phi_1 = \sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{(1)-1}$.

因为 $0 \leqslant N_2 \leqslant I$, $(X'_1X_1)^{-1}X'_1N_2X_1(X'_1X_1)^{-1} \leqslant (X'_1X_1)^{-1}X'_1X_1(X'_1X_1)^{-1} = (X'_1X_1)^{-1}$,所以 $-\frac{b}{2a} = \| \Phi'_1\beta_1 \|^2/(tr\Phi_1 Cov(\widetilde{\beta}_1)\Phi'_1 + \| \Phi'_1\beta_1 \|^2) \leqslant \| \beta_1 \|^2/(\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{(1)-1} + \| \beta_1 \|^2)$.所以当

$\| \beta_1 \|^2/\sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{(1)-1} + \| \beta_1 \|^2 < c < 1$ 时,有 $MSE(\beta_1^*(c)) \leqslant MSE(\beta_1^*)$.

定理3和定理4只有在两个回归不相关时,才有好的效果,否则,ρ_{12} 接近于1,定理条件不成立.

2 两步 Stein 型主成分改进估计

在通常情况下 V 是未知的,此时我们得到相应的两步 Stein 型主成分改进估计:

$$\beta_1^*(c,T) = c\Phi_1\Phi'_1(X'_1X_1)^{-1}(X'_1y - \frac{s_{12}}{s_{22}}X'_1N_2y_2), \quad (2.1)$$

这里 $s = (s_{ij})$ 是 $V = (\sigma_{ij})$ 的估计.V 的估计可以有各种形式.考虑 V 常用的一个估计,即 $s_{ij} = \hat{e}_i'e_j/(n-r)$, $\hat{e}_i = \widetilde{N}y_i, \widetilde{N} = I - \widetilde{X}(\widetilde{X}'\widetilde{X})^{-}\widetilde{X}$, A^- 表示 A 的广义逆矩阵.$\widetilde{X} = (X_1, X_2)$, $r = rk(\widetilde{X})$ 为确定计,假设 $e = (e_1, e_2)$ 的行向量总是相互独立服从 $N(0, V)$ 分布,则可以证明[1]引理2:

(i) $\widetilde{\beta}_1(T)$ 是 β_1 的无偏估计;

(ii) X'_1e_1; $X'_1N_ie_i$; $X'_1P_2e_1$ 与所有 $s_{ij}(i,j=1,2)$ 相互独立;

(iii) $E(\frac{s_{12}}{s_{22}}) = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{22}}$; $E(\frac{s_{12}}{s_{22}})^2 = \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}\rho_{12}^2 + \frac{\sigma_{11}}{\sigma_{22}}(1-\rho_{12}^2)\frac{1}{n-r-2}$.

定理5 当 $\frac{\| \beta_1 \|^2}{(\sigma_{11}-\delta)\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{(1)-1} + \| \beta_1 \|^2} < c < 1$ 时,两步Stein型主成分改进估计优于两步主成分改进估计,即 $MSE\beta_1^*(c,T) < MSE\beta_1^*(T)$.其中 $\sigma_{11} - \delta = \sigma_{11}(1-\rho_{12}^2)(1 + \frac{1}{n-r-2})$.

证明 因为 $E\widetilde{\beta}_1(T) = \beta_1$,

所以 $Cov(\widetilde{\beta}_1(T)) = E[E((\widetilde{\beta}_1(T) - \beta_1)(\widetilde{\beta}_1(T) - \beta_1)' | S)] = E[(\sigma_{11}X'_1X_1)^{-1} - (2\sigma_{12}\frac{s_{12}}{s_{22}} - \sigma_{22}(\frac{s_{12}}{s_{22}})^2)(X'_1X_1)^{-1}X'_1N_2X_1(X'_1X_1)^{-1} | S] = \sigma_{11}(X'_1X_1)^{-1} - \delta(X'_1X_1)^{-1}X'_1N_2X_1(X'_1X_1)^{-1}$, (2.2)

其中 $\delta = 2\sigma_{12}E(\frac{s_{12}}{s_{22}}) - \sigma_{22}E(\frac{s_{12}}{s_{22}})^2 = (1 + \frac{1}{n-r-2})\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_{22}} - \frac{\sigma_{11}}{n-r-2}$.

又因为 $\beta_1^*(T) = \Phi_1\Phi'_1\widetilde{\beta}_1(T)$, $\beta_1^*(c,T) = c\Phi_1\Phi'_1\widetilde{\beta}_1(T)$,

所以 $Cov\beta_1^*(T) = \Phi_1\Phi'_1 Cov\widetilde{\beta}_1(T)\Phi_1\Phi'_1$, $E\beta_1^*(T) = \Phi_1\Phi'_1\beta_1$, (2.3)

$Cov\beta_1^*(C,T) = c^2\Phi_1\Phi'_1 Cov\widetilde{\beta}_1(T)\Phi_1\Phi'_1$, $E\beta_1^*(c,T) = c\Phi_1\Phi'_1\beta_1$, (2.4)

所以 $MSE\beta_1^*(c,T) - MSE(\beta_1^*(T)) = c^2 tr\Phi'_1 Cov\widetilde{\beta}_1(T)\Phi_1 + \| c\Phi_1\Phi'_1\beta_1 - \beta_1 \|^2 - tr\Phi'_1 Cov\widetilde{\beta}_1(T)\Phi_1 - \| \Phi_1\Phi'_1\beta_1 - \beta_1 \|^2 = c^2 tr\Phi'_1 Cov\widetilde{\beta}_1(T)\Phi_1 + \beta'_1(c\Phi_1\Phi'_1 - I)'(c\Phi_1\Phi'_1 - I)\beta_1 - tr\Phi'_1 Cov\widetilde{\beta}_1(T)\Phi_1 - \| \Phi_1\Phi'_1\beta_1 - \beta_1 \|^2 = c^2(tr\Phi'_1 Cov\widetilde{\beta}_1(T)\Phi_1 + \| \Phi'_1\beta_1 \|^2) - 2c\| \Phi'_1\beta_1 \|^2 + \beta'_1\beta_1 - tr\Phi'_1 Cov\widetilde{\beta}_1(T)\Phi_1 - \| \Phi_1\Phi'_1\beta_1 - \beta_1 \|^2 \triangleq M_2(c)$,

(下转第193页 Continue on page 193)

$x = (1.0000, 0.0000, 1.0000, 0.0000)^T$,

$F(x) = (0.0000, 1.0000, 0.0000, 3.0000)^T$.

参考文献：

[1] HARKER P T, PANG J S. Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problem: asurvey of theory algorithms and applications[J]. Math Programming, 1990, 48: 161-220.

[2] PANG J S. Complementarity problems[M]//HORST R, PARDALOSE P, eds. Handbook of Global Optimization. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1995: 271-338.

[3] NOOR M A, Al-Said E A. An iterative techniquefor generalized strongly nonlinear complementarty problems [J]. Appl Math Lett, 1999(12): 75-79.

[4] NOOR M A. Fixed point approach for complementarty-problems[J]. J Math Anal Appl, 1988, 133: 437-448.

[5] NOOR M A. Iteraitve methods for a class of complementarty problems [J]. Engineering Analysis, 1986, 3 (4): 221-224.

[6] NOOR M A, ZARAE S. An iteraitve scheme for complementarty problems [J]. Math Anal Appl, 1988, 133: 366-382.

[7] CHEN X, QI L, SUN D. Global and superlinear convergence of the smoothing Newton method and its application to general box constrained variational inequalities[J]. Math of Computation, 1998, 67: 519-540.

[8] KANZOW C, PIEPER H. Jacobian smoothing methods for nonlinear complementarity problems [J]. SIAM J Optim, 1999, 9: 342-373.

[9] PANG J S. Newton's method for B-differentiable equations[J]. Math Oper Res, 1990, 15: 311-341.

[10] HARKER P T, XIAO B. Newton's method for the nonliner complementarity problems: a B-differentiable equation approach [J]. Math Oper Res, 1990, 48: 339-358.

[11] YMADA K, YAMASHITA N, FUKUSHIMA M. A new derivative-free descent method for the nonlinear complementarity problem [M]//DIPILLO G, GINNESSI F, eds. Nonlinear Optimization and Related Topics. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000: 436-487.

（责任编辑：邓大玉　凌汉恩）

（上接第 186 页 Continue from page 186）

$$\frac{dM_2(c)}{dc} = 2c(tr\Phi'_1 Cov\beta_1(T)\Phi_1 + \|\Phi'_1\beta_1\|^2) - 2\|\Phi'_1\beta_1\|^2. \quad (2.5)$$

所以当 $\frac{\|\Phi'_1\beta_1\|^2}{tr\Phi'_1 Cov(\bar{\beta}_1(T))\Phi_1 + \|\Phi'_1\beta_1\|^2} < c < 1$ 时，$\frac{dM_2(c)}{dc} > 0$，又 $M_2(1) = 0$，故在上述区间 $M_2(c) < 0$，即 $MSE\beta_1^*(c,T) < MSE\beta_1^*(T)$，

$tr\Phi'_1 Cov(\bar{\beta}_1(T))\Phi_1 = tr[\sigma_{11}\Phi'_1(X'_1X_1)^{-1}\Phi_1 - \delta\Phi'_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1N_2X_1(X'_1X_1)^{-1}\Phi_1] \geqslant \sigma_{11}tr\Phi'_1(X'_1X_1)^{-1}\Phi_1 - \delta tr\Phi'_1(X'_1X_1)^{-1}X'_1X_1(X'_1X_1)^{-1}\Phi_1 = (\sigma_{11} - \delta)tr\Phi'_1(X'_1X_1)^{-1}\Phi_1 = (\sigma_{11} - \delta)\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{(1)-1}$，

所以，$\frac{\|\Phi'_1\beta_1\|^2}{tr\Phi'_1 Cov(\bar{\beta}_1(T))\Phi_1 + \|\Phi'_1\beta_1\|^2} \leqslant \frac{\|\beta_1\|^2}{(\sigma_{11} - \delta)\sum_{i=1}^{r}\lambda_i^{(1)-1} + \|\beta_1\|^2}$， (2.6)

且由引理 2 可得 $\sigma_{11} - \delta = \sigma_{11}(1 - \rho_{12}^2)(1 + \frac{1}{n-r-2})$，命题得证.

同样方法可以证明[4]：

定理6　在定理5的条件下，两步Stein型主成分改进估计优于协方差改进估计，即 $MSE(\beta_1^*(c,T)) < MSE\bar{\beta}_1(T)$.

3　结束语

对于线性回归系统(1)的第二个方程的回归系数 β_2，当设计阵 X_2 呈病态时同样可以构造相应的 Stein 型主成分改进估计.

致谢

作者感谢山东大学博士生导师林路教授的宝贵意见.

参考文献：

[1] 王松桂，线性回归系统回归系数的一种新估计[J]. 中国科学：A 辑，1988(10)：1033-1040.

[2] 刘爱义. 相依回归方程组主成分估计的改进[J]. 数理统计与应用概率，1993(2)：70-75.

[3] 于义良，宋卫星. 回归系数的 Stein 型主成分估计[J]. 数学研究，1995(3)：85-88.

[4] 林路. 相依非线性回归系统中的附加信息 Bayes 拟似然[J]. 数学学报，2002(6)：1227-1234.

（责任编辑：邓大玉　凌汉恩）