广西科学 Guangxi Sciences 2006，13(4)：247～248

关于非负正定矩阵的Löder序和预偏序的一个注记*

A Note on the Lower Partial Ordering and Space Preordering of Hermitian Non-negative Definite Matrices

刘晓冀

LIU Xiao-ji

(广西民族大学计算机与信息学院，广西南宁 530006)

(College of Computer and Information Science, Guangxi University for Nationaliteis, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要：指出对于非负正定矩阵的平方阵的减序，矩阵的非负正定性可以减弱为Hermmite矩阵，同时利用矩阵的组合关系，给出Hermmite矩阵的平方矩阵的$*$序的等价刻画.

关键词：矩阵 $*$序 减序

中图法分类号：O153.3 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-9164(2006)04-0247-02

Abstract: We point out that the result on minus partial on the squares of non-negative definite matrix is hold for the Hermmite matrices, and investigate the relation between the minus and star partial ordering of the matrices. Further, a equivalencies for the star partial ordering of the Hermmite matrices is given using the linear combinations.

Key words: Hermmite matrix, star partial ordering, minus partial ordering

利用矩阵A,B列的线性组合关系，J. K. Baksalary等[1]给出矩阵$*$序、减序、左(右)$*$序的等价刻画.文献[2]进一步利用矩阵的组合关系给出非负正定矩阵Löder序和预偏序的等价刻画，以及非负正定矩阵的平方阵的Löder序和减序的等价刻画，并指出矩阵的非负正定性对于该文的结果是至关重要的.本文指出对于非负正定矩阵的平方阵的减序，矩阵的非负正定性可以减弱为Hermmite矩阵，同时对于矩阵的$*$序，利用矩阵的组合关系给出一个等价刻画.

1 定义及主要引理

设$C_{m\times n}$为复数域上阶为$m\times n$的矩阵构成的集合，$\delta(A)$、$r(A)$、$R(A)$分别表示矩阵A的奇异值构成的集合、秩和值域.

定义1 矩阵A、B具有$*$-序(记为$A\overset{*}{\leqslant}B$)是指矩阵A、B满足：

$$AB^*=(AB^*)^*,A^*B=(A^*B)^*.$$

定义2 矩阵A、B具有减序(记为$A\leqslant B$)是指矩阵A、B满足：

$$r(B-A)=r(B)-r(A).$$

定义3 矩阵A、B具有减序(记为$A\prec B$)是指矩阵A、B满足：

$$R(A)\subseteq R(B),R(A^*)\subseteq R(B^*).$$

引理1[1] 设A,B是复矩阵，则：

(1)$A\overset{*}{\leqslant}B\Leftrightarrow A=BK$，其中$K$满足$K^*=K=K^2$；

(2)$A\leqslant B\Leftrightarrow A=BK$，其中$K$满足$K=K^2$.

引理2[2] 设A,B分别是半正定矩阵，则

(1)$A\overset{L}{\leqslant}B\Leftrightarrow A=BK$，其中$K$的特征值$\delta(K)\subseteq[0,1]$；

(2)$A^2\overset{L}{\leqslant}B^2\Leftrightarrow A=BK$，其中$K$满足$\delta(KK^*)\subseteq[0,1]$；

(3)$A^2\leqslant B^2\Leftrightarrow A=BK$，其中$K$满足$KK^*K=K,KK^*BB^+=BB^+KK^*$.

对于引理2的(1)和(2)，矩阵的半正定性条件是必要的，否则结论将不成立.但对于平方矩阵的减序来说，则未必如此.

收稿日期：2006-02-07

作者简介：刘晓冀(1972-)，男，博士，副教授，主要从事广义逆的代数理论和矩阵偏序理论研究。

*广西自然科学基金(0575032,0640016)，广西教育厅科研项目(桂教科研200507126)，广西高校百名中青年学科带头人资助计划和广西民族大学重大科研项目联合资助。

2 主要结果

定理1 设A,B分别是Hermitian矩阵,则$A^2\leqslant B^2$当且仅当$A=BK$,其中K满足$KK^*K=K$,$KK^*BB^+=BB^+KK^*$.

证明 与文献[2]中定理4的证明类似.

利用定理1,可以得出比文献[2]的定理5更为一般的定理2和定理3。

定理2 设A,B分别是Hermitian矩阵,则$A^2\leqslant B^2$,$A\leqslant B$当且仅当$A\overset{*}{\leqslant}B$.

证明 若$A\overset{*}{\leqslant}B$,由引理1,存在矩阵K满足$K=K^*=K^2$,使得$A=BK$,于是有$A\leqslant B$,注意到$AB^+=AA^+$,则$KK^*K=K$,$KK^*BB^+=BB^+KK^*$,由定理1,则$A^2\leqslant B^2$.

反之,若$A^2\leqslant B^2$,由定理1,存在矩阵K(事实上$K=B^+A$)满足,$KK^*K=K$,$KK^*BB^+=BB^+KK^*$,使得$A=BK$,$A\leqslant B$,则$K=B^+A$必满足$K=K^2$,我们只需证明$K=K^*$即可.

事实上,由$KK^*K=K$,则$K=U\begin{pmatrix}I&0\\0&0\end{pmatrix}V^*$,其中$U,V$分别为酉矩阵,令$V^*U=\begin{bmatrix}T_{11}&T_{12}\\T_{21}&T_{22}\end{bmatrix}$,由$K=K^2$,则$T_{11}=I$,而$V^*U$是酉矩阵,则$T_{12}=0$,$T_{21}=0$,$T_{22}$是酉矩阵,故

$$K=U\begin{pmatrix}I&0\\0&0\end{pmatrix},\text{则 }K=K^*.$$

定理3 设A,B分别是Hermitian矩阵,则$A\prec B$,$AB=BA$当且仅当$A=BK$,其中K满足$K=K^*$.

利用矩阵的组合关系下面给出Hermitian矩阵的平方矩阵的 $*$ 序等价刻画.

定理4 设A,B分别是Hermitian矩阵,则$A^2\leqslant B^2$当且仅当$A=BK$,其中K满足$KK^*B^2=B^2KK^*$和KK^*的非零特征值为1.

证明 若$A=BK$,令

$$B=U\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}U^*,K=U\begin{pmatrix}K_{11}&K_{12}\\K_{21}&K_{22}\end{pmatrix}U^*,$$

U是酉矩阵.由$BK=K^*B$,则

$K_{12}=0$,$K_{21}=0$,$DK_{11}=K_{11}^*D$,和$A=U\begin{pmatrix}DK_{11}&0\\0&0\end{pmatrix}U^*$.

因为$KK^*B^2=B^2KK^*$,则$K_{11}K_{11}^*D^2=D^2K_{11}K_{11}^*$,注意到$KK^*$的非零特征值为1,设

$$K_1K_1^*=V\begin{pmatrix}I&0\\0&0\end{pmatrix}V^*,D^2=V\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}\\D_{21}&D_{22}\end{bmatrix}V^*,$$

其中V是酉矩阵,则$D_{12}=0$,$D_{21}=0$,于是有

$DK_{11}DK_{11}DK_{11}DK_{11}=DK_{11}K_{11}^*D^2K_{11}K_{11}^*D=DV\begin{pmatrix}D_{11}&0\\0&0\end{pmatrix}V^*D$;

$DK_{11}DK_{11}D^2=DK_{11}K_{11}^*D^2D=DV\begin{pmatrix}D_{11}&0\\0&0\end{pmatrix}V^*D$,

则$A^4=A^2B^2$,即$A^2\overset{*}{\leqslant}B^2$.

若$A^2\overset{*}{\leqslant}B^2$,则$A^2(A^2)^+=B^2(A^2)^+$,则$A=BBA^+$,设$K=BA^+$.令

$$B=U\begin{pmatrix}D&0\\0&0\end{pmatrix}U^*,K=U\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}\\K_{21}&K_{22}\end{bmatrix}U^*,$$

其中U是酉矩阵,D是可逆对角矩阵.由$BK=K^*B$,得到

$K_{12}=0$,$K_{21}=0$,$DK_{11}=K_{11}^*D$,$K_{22}=0$和$A=U\begin{pmatrix}DK_{11}&0\\0&0\end{pmatrix}U^*$.

由$A^2\overset{*}{\leqslant}B^2$,则

$DK_{11}DK_{11}DK_{11}DK_{11}=DK_{11}DK_{11}D^2$.故$K_{11}K_{11}^*D^2K_{11}K_{11}^*=K_{11}K_{11}^*D^2$,则$K_{11}K_{11}^*D^2=D^2K_{11}K_{11}^*$,即$KK^*B^2=B^2KK^*$.设

$$K_{11}K_{11}^*=V\begin{pmatrix}D_1&0\\0&0\end{pmatrix}V^*,D^2=V\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}\\D_{21}&D_{22}\end{bmatrix}V^*,$$

其中V是酉矩阵,D_1是对角矩阵,则$D_{12}=0$,$D_{21}=0$,于是$D_1D_{11}D_1=D_1D_{11}$,则$D_1=I$,即KK^*的非零特征值为1.

参考文献:

[1] BAKSALARY J K,MITRA S K. Left-star and right-star partial orderings[J]. Linear Alg Apply,1991,149:73-89.

[2] GROB J. Lower partial ordering and space preordering of Hermitian non-negative definite matrices[J]. Linear Alg Apply,2001,326:215-223.

[3] BAKSALARY J K,PUKESHEIM F. On the Lower, minus and star partial ordering of nonnegative definite matrices and their squares[J]. Linear Alg Apply,1991,151:135-141.

[4] BAKSALARY J K,KALA R. On criteria for estimablity in multivariate linear models[J]. Math Operationsforsch Statits,1976,7:5-9.

[5] HARTWIG R E,STYAN G P H. On some characterizations of the the star partial ordering for the matrices and rank subtractivity[J]. Linear Alg Apply,1986,82:145-161.

[6] RAO C R,MITRA S K. Generalized inverse of matrices and its applications[M]. New York:Wiely,1971.

[7] MITRA S K. Group inverse and sharp order[J]. Linear Alg Apply,1987,92:17-37.

[8] MITRA S K. On parallel summability of matrices[J]. Linear Alg Apply,1986,83:1-27.

(责任编辑:凌汉恩 邓大玉)