k-接近一致光滑 Banach 空间*

k-Nearly Uniformly Smooth Banach Spaces

王翠玲[1]，魏文展[2]，周玲丽[3]

WANG Cui-ling[1]，WEI Wen-zhan[2]，ZHOU Ling-li[3]

(1. 集美大学理学院，福建厦门 361021；2. 广西经贸职业技术学院，广西南宁 530021；3. 山东交通学院，山东济南 250023)

(1. School of Sciences，Jimei University，Xiamen，Fujian，361021，China；2. Guangxi Economic Trade Polytechnic，Nanning，Guangxi，530021，China；3. Shandong Jiaotong University，Ji'nan，Shandong，250023，China)

摘要：定义 k- 接近一致光滑模，利用其给出 k- 接近一致光滑(k-NUS)空间的概念，证明 k- 接近一致光滑空间与 k- 接近一致凸空间是对偶概念，同时引入具有 w_k^* 性质的空间，给出 k- 接近一致光滑空间的一个特征刻画，并讨论($k+1$)- 接近一致光滑空间与接近一致光滑和 k- 一致光滑(kUS)空间的关系.

关键词：Banach 空间　接近一致光滑空间　w_k^* 性质

中图法分类号：O177.3　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2006)04-0267-04

Abstract：In this paper，the notion of k- nearly uniformly smooth Banach spaces is introduced，which is a generalization of nearly uniformly smooth Banach spaces，and it is proved that k- nearly uniformly smooth spaces and k- nearly uniformly convex spaces are the dual notions；every k- nearly uniformly smooth spaces is reflexive；one characterization of k- nearly uniformly smooth Banach spaces is given；finally，it is proved that k- uniformly smooth spaces imply ($k+1$) -nearly uniformly smooth spaces，but its converse is not necessarily true.

Key words：Banach spaces，nearly uniformly smooth spaces，w_k^* property

自 R. Huff 在 1980 年于文献[1]中引入接近一致凸(NUC)空间后，Kutzarova 在 1991 年于文献[2]中又引入 k-β 和 k-接近一致凸(k-NUC)空间. 接近一致凸空间的对偶概念接近一致光滑(NUS)空间由 J. Banas 在文献[3]中给出. 本文定义 k- 接近一致光滑模，利用其给出 k- 接近一致光滑(k-NUS)空间的概念，证明 k- 接近一致光滑空间与 k- 接近一致凸空间是对偶概念，即 Banach 空间 X 为 k- 接近一致光滑空间当且仅当 X^* 为 k- 接近一致凸空间. 同时我们引入具有 w_k^* 性质的空间，给出 k- 接近一致光滑空间的一个特征刻画，并讨论($k+1$)- 接近一致光滑空间与接近一致光滑和 k- 一致光滑(kUS)空间的关系.

收稿日期：2006-05-25

作者简介：王翠玲(1979-)，女，山东高密人，助教，主要从事控制论方面的教学和研究工作。

*广西科学基金(0448036)和广西教育厅科研项目(2004 年)联合资助。

1 定义和记号

在本文中，X 为实 Banach 空间，X^* 为 X 的对偶空间；B 与 B° 分别代表 X 的闭单位球与开单位球，而 B^* 代表 X^* 的单位球；S 与 S^* 分别代表 X 与 X^* 的单位球面；coE 代表集合 E 的凸包，$dist(\theta,E)=\inf\{\|x\|:x\in E\}$；$\mu(A)$ 表示集合 A 的 Hausdoff 非紧测度，$\mu(A)=\inf\{\varepsilon>0:A$ 能被有限多个半径不超过 ε 的球覆盖$\}$.

对序列 $\{x_n\}\subset B$ 令 $sep\{x_n\}\equiv\inf\{\|x_n-x_m\|:n\neq m\}$，则易知对 $\forall\ \{x_n\}\subset B$，存在子序列 $\{x_{n_m}\}\subset\{x_n\}$，使 $\frac{1}{2}sep\{x_{n_m}\}\leqslant\mu\{x_n\}\leqslant 3sep\{x_{n_m}\}$. 设

$F(f,\delta)=\{x:x\in B,f(x)\geqslant 1-\delta\}$，其中 $f\in S^*$；

$F^*(x,\delta)=\{f:f\in B^*,f(x)\geqslant 1-\delta\}$，其中 $x\in B$；

$A(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})\equiv$

$$\sup\left\{\left|\begin{matrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \cdots & f_1(x_{k+1})\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_k(x_1) & f_k(x_2) & \cdots & f_k(x_{k+1})\end{matrix}\right| : f_1,f_2,\cdots,f_k\in S^*\right\};$$

$$A^*(f_1,f_2,\cdots,f_{k+1})\equiv$$

$$\sup\left\{\left|\begin{matrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_{k+1}(x_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_1(x_k) & f_2(x_k) & \cdots & f_{k+1}(x_k)\end{matrix}\right| : x_1,x_2,\cdots,x_k\in S\right\}.$$

定义 1.1[4] X 称为严格凸空间，如果对任意 $x,y\in S$ 且 $x\neq y$，则 $\|\frac{x+y}{2}\|<1$.

定义 1.2[4] 设 $k\geqslant 2$ 是一个整数，称 X 是 kR 空间，如果对任何 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}\subset X$，满足

$$\lim_{n_1,\cdots,n_k\to\infty}\|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}\|=1,$$

则 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X 中 Cauchy 序列（从而收敛于 X 中某个元 x_0）.

定义 1.3[5] X 称是 k- 一致凸（kUC）空间，如果对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，任取 $x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}\in S$，若 $\|\sum_{i=1}^{k+1}x_i\|>k+1-\delta$，则 $A(x_1,x_2,\cdots,x_{k+1})<\varepsilon$.

定义 1.4[4] X 称是 k- 一致光滑（kUS）空间，如果对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，对任何 $f_1,f_2,\cdots,f_{k+1}\in S^*$，若 $\|\sum_{i=1}^{k+1}f_i\|>k+1-\delta$，则 $A^*(f_1,f_2,\cdots,f_{k+1})<\varepsilon$.

定义 1.5[1] 称 X 为接近一致凸（NUC）空间，若对 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当点列 $\{x_n\}\subset B$，且 $sep\{x_n\}\geqslant\varepsilon$ 时，有 $co\{x_n\}\cap(1-\delta)B\neq\Phi$.

定义 1.6[2] 称 X 为 k- 接近一致凸（k-NUC）空间，若对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当点列 $\{x_n\}\subset B$，且 $sep\{x_n\}>\varepsilon$ 时，有 $x_{n_1},\cdots,x_{n_k}\in\{x_n\}$，使得

$$\frac{1}{k}\|x_{n_1}+\cdots+x_{n_k}\|\leqslant 1-\delta.$$

定义 1.7[4] 称 X 具有 UKK 性质，若对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在 $0<\delta<1$，使得对任意点列 $\{x_n\}\subset B,x_n\xrightarrow{w}x,sep\{x_n\}\geqslant\varepsilon$，则 $\|x\|<\delta$.

定义 1.8[4] 称 X 具有 $B.S.P$ 性质，若对每个有界序列 $\{x_n\}\subset B$，有一个子列 $\{y_n\}\subset\{x_n\}$，使得

$$\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)\to x_0\in X.$$

J. Banas 在文献[3]中引入与接近一致凸相对应的函数，称为接近凸模；定义：

$\beta_X(t)=\sup\{\mu(E):E\subset B,E=coE,dist(\theta,E)\geqslant 1-t\},(t\geqslant 0)$，

而 $\Delta_X(\varepsilon)=\inf\{1-dist(\vartheta,E):E\subset B,E=coE,\mu(E)\geqslant\varepsilon\}$ 称为非紧凸模. 并用此两种函数研究了接近一致凸空间的性质.

类似地，我们也引入以下函数来研究 k- 接近一致凸空间的性质.

令

$\Delta_X^{(k)}(\varepsilon)=\inf\{1-\inf\limits_{E_k\subset E}dist(\vartheta,E_k):E\subset B,E=coE,\mu(E)\geqslant\varepsilon\}$；

$\beta_X^{(k)}(t)=\sup\{\mu(E):E\subset B,E=coE,\inf\limits_{E_k\subset E}dist(\theta,E_k)\geqslant 1-t\}$，

其中 E_k 表示 E 中某 k 个点的凸包. 即 $E_k\subset E,\exists\ x_1,x_2,\cdots,x_k\in E$ s.t. $E_k=co\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$. 称 $\Delta_X^{(k)}(\cdot)$，$\beta_X^{(k)}(\cdot)$ 分别为 X 的 k- 非紧凸模和 k- 接近一致凸模.

J. Banas 也在文献[3]中给出空间 X 的接近一致光滑模：

$$\sum\nolimits_X(\varepsilon)=\sup\{\mu(F^*(x,\varepsilon)):x\in S\}.$$

并利用接近一致光滑模给出了 X 为接近一致光滑空间的定义.

定义 1.9[3] X 称为接近一致光滑（NUS）空间，若 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sum\nolimits_X(\varepsilon)=0$.

为寻求 k- 接近一致凸空间的对偶空间，相应于接近一致光滑模，对 $k\geqslant 2$ 我们定义：

$\sum\nolimits_X^{(k)}(\varepsilon)=\sup\{\mu(E):E\subset B^*,E=coE,\forall\ E_k\subset E,\exists\ x\in S,\text{s.t. }E_k\subset F^*(x,\varepsilon)\}$，

其中 E_k 表示 E 中某 k 个点的凸包，称函数 $\sum\nolimits_X^{(k)}(\cdot)$ 为 X 的 k- 接近一致光滑模. 利用 k- 接近一致光滑模，我们给出 k- 接近一致光滑空间的定义.

定义 1.10 X 称为 k- 接近一致光滑空间，若 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\sum\nolimits_X^{(k)}(\varepsilon)=0$.

2 主要定理及其证明

定理 2.1 X 为 k- 接近一致凸空间当且仅当对每个 $\varepsilon>0,\Delta_X^{(k)}(\varepsilon)>0$.

证明 若 X 为 k- 接近一致凸空间，而 $\exists\ \varepsilon_0>0$，使 $\Delta_X^{(k)}(\varepsilon_0)=0$. 则对 $\forall\ \delta,0<\delta<1$，存在 E_δ 为 B 中的凸子集使 $\mu(E_\delta)\geqslant\varepsilon_0$，并且 $\forall\ E_k\subset E_\delta,dist(\theta,E_k)>1-\delta$. 由 $\mu(E_\delta)\geqslant\varepsilon_0$ 知，存在 $\{x_n\}\subset E_\delta$，使 $sep\{x_n\}\geqslant\frac{\varepsilon_0}{3}$. 根据 X 为 k- 接近一致凸空间知，对 $\varepsilon=\frac{\varepsilon_0}{3}$ 一定存在 $0<\delta^1<1$ 及 $x_{n_1},\cdots,x_{n_k}\in\{x_n\}$，使得

$$\frac{1}{k}\|x_{n_1}+\cdots+x_{n_k}\|\leqslant 1-\delta^1.$$

但由上面 δ 的任意性，取 $\delta=\frac{\delta_1}{2}$ 便知矛盾. 反之易证.

引理 2.1[3] X 为接近一致凸空间当且仅当 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\beta_X(\varepsilon)=0$.

类似引理 2.1 的证明方法可得：

定理 2.2 X 为 k- 接近一致凸空间当且仅当

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\beta_X^k(\varepsilon)=0$.

定理 2.3 $\beta_X^{(k)}(t)=\sup\{\mu(E):E\subset B,E=coE,\forall E_k\subset E,\exists f\in S^* \text{ s.t. } E_k\subset F(f,t)\}$.

证明 易见

$$\beta_X^{(k)}(t)\geqslant\sup\{\mu(E):E\subset B,E=coE,\forall E_k\subset E,\exists f\in S^* \text{ s.t. } E_k\subset F(f,t)\}. \quad (1)$$

又对每个 $E\subset B,E=coE$,任取 $E_k\subset E$,有 $dist(\theta,E_k)\geqslant 1-t$,则知 $E_k\cap(1-t)B^\circ=\Phi$.由分离定理知,存在 $f\in S^*$,使

$$\inf_{x\in E_k}f(x)\geqslant\sup_{x\in(1-t)B}f(x)=1-t,$$

从而 $E_k\subset F(f,t)$,故

$$\beta_X^{(k)}(t)\leqslant\sup\{\mu(E):E\subset B,E=coE,\forall E_k\subset E,\exists f\in S^* \text{ s.t. } E_k\subset F(f,t)\}. \quad (2)$$

联合(1),(2)式定理 2.3 得证.

定理 2.4 X 为 k- 接近一致光滑空间当且仅当 X^* 为 k- 接近一致凸空间.

证明 若 X 为 k- 接近一致光滑空间,要证明 X^* 为 k- 接近一致凸空间,由定理 2.1 知,只须证明对 $\forall\varepsilon>0$,有 $\Delta_{X^*}^{(k)}(\varepsilon)>0$ 即可.若不成立,则有 $\varepsilon_0>0$,使 $\Delta_{X^*}^{(k)}(\varepsilon_0)=0$,从而对 $\forall m\in N$,有 $E^m\subset B^*,E^m=coE^m$,且 $\mu(E^m)\geqslant\varepsilon_0$ 以及对一切 $E_k^{(m)}\subset E^m$(即 E^m 中任意 k 个点的凸包 $E_k^{(m)}$),有

$$dist(\theta,E_k^{(m)})\geqslant 1-\frac{1}{m}. \quad (3)$$

由(3)式以及分离定理和 Goldstine-Weston 稠密性定理不难得到对每个 $E_k^{(m)}\subset E^m$,都存在 $x\in S$ 使得 $\forall g\in E_k^{(m)},g(x)>1-\frac{2}{m}$.从而知 $E_k^{(m)}\subset F^*(x,\frac{2}{m})$,故 $\sum_X^{(k)}(\frac{2}{m})\geqslant\varepsilon_0$.此与 X 为 k- 接近一致光滑空间矛盾.

若 X^* 为 k- 接近一致凸空间,则 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\beta_{X^*}^{(k)}(\varepsilon)=0$.又易见 $\beta_{X^*}^{(k)}(\varepsilon)\geqslant\sum_X^{(k)}(\varepsilon)$,从而知当 X^* 为 k- 接近一致凸空间时,X 为 k- 接近一致光滑空间.

引理 2.2[2] k-NUC 空间具有 $B.S.P$ 性质.

定理 2.5 k- 接近一致光滑空间具有 $B.S.P$ 性质.

证明 由定理 2.4 及引理 2.2 便得证.

定理 2.6 若 X 为 k- 接近一致光滑空间,则 X^* 具有 $B.S.P$ 性质.

证明 由 X 为 k- 接近一致光滑空间知 X^* 为 k- 接近一致凸空间,而 k- 接近一致凸空间具有 $B.S.P$ 性质,定理得证.

定理 2.7 若 X 为 k- 接近一致光滑空间,则 X 一定为接近一致光滑空间.

证明 易见 $\sum_X(\varepsilon)\leqslant\sum_X^{(k)}(\varepsilon)$,再由接近一致光滑空间和 k- 接近一致光滑空间的定义便得证.

设 $k\geqslant 2$,X 具有 w_k^* 性质,若对于 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,使得对任意点列 $\{f_n\}\subset B^*$,$f_n\xrightarrow{w^*}f$,$\|f\|<1-\varepsilon$,则有 $f_{n_1},f_{n_2},\cdots,f_{n_k}\in\{f_n\}$,满足

$$\inf_{x\in S}\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}|f_{n_i}(x)-1|\geqslant\delta.$$

令 $w_k^*(\varepsilon)=\inf\{\sup\limits_{\{n_1,n_2,\cdots,n_k\}\subset N}\inf\limits_{x\in S}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}|f_{n_i}(x)-1|:\{f_n\}\subset B^*,f_n\xrightarrow{w^*}f,\|f\|<1-\varepsilon\}$ 不难得到:

注 2.1 X 具有 w_k^* 性质当且仅当对每个 $\varepsilon>0$,$w_k^*(\varepsilon)>0$.

定理 2.8 下面 ① 和 ② 等价:

① X 为$(k+1)$- 接近一致光滑空间;

② X 为接近一致光滑空间,且具 w_{k+1}^* 性质.

证明 ①⇒② 由定理 2.7,只须证明若 X 为$(k+1)$- 接近一致光滑,则 X 具有 w_{k+1}^* 性质即可.$\forall\varepsilon>0,\{f_n\}\subset B^*,f_n\xrightarrow{w^*}f,\|f\|<1-\varepsilon$.

(Ⅰ)若$\{f_n\}$中有无限项,满足 $\|f_n\|\leqslant 1-\frac{\varepsilon}{2}$,令 $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$,有 $f_{n_1},\cdots,f_{n_{k+1}}\in\{f_n\}$,使得

$$\frac{1}{k+1}\|f_{n_1}+\cdots+f_{n_{k+1}}\|<1-\frac{\varepsilon}{4},$$

从而 $\forall x\in S(X)$,$\frac{1}{k+1}(f_{n_1}+\cdots+f_{n_{k+1}})(x)<1-\frac{\varepsilon}{4}$.经分析可得 $\inf\limits_{x\in S}\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k}|f_{n_i}(x)-1|\geqslant\delta$.

(Ⅱ)若$\{f_n\}$中有无限项满足 $\|f_n\|>1-\frac{\varepsilon}{2}$,不妨设$\{f_n\}$中所有项均满足 $\|f_n\|>1-\frac{\varepsilon}{2}$,取 $n_1=1$,则 $\|f_{n_1}\|>1-\frac{\varepsilon}{2}$,对 f_{n_1} 有 $x_1\in S$,使 $f_{n_1}(x_1)>1-\frac{\varepsilon}{2}$,由 $f_n\xrightarrow{w^*}f$,知对 $\frac{\varepsilon}{4}$ 及 x_1,有 N_1,当 $n>N_1$ 时有 $|f_n(x_1)-f(x_1)|<\frac{\varepsilon}{4}$.则

$$|f_n(x_1)|<\frac{\varepsilon}{4}+|f(x_1)|\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\|f\|<1-\frac{3}{4}\varepsilon.$$

取 $f_{n_2}\in\{f_n\}_{n>N_1}$,则

$$\|f_{n_1}-f_{n_2}\|\geqslant|(f_{n_1}-f_{n_2})(x_1)|\geqslant|f_{n_1}(x_1)|-|f_{n_2}(x_1)|>(1-\frac{\varepsilon}{2})-(1-\frac{3}{4}\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{4}.$$

同理可找到 $f_{n_3}\in\{f_n\}$,使得 $d(f_{n_3},\{f_{n_1},f_{n_2}\})>\frac{\varepsilon}{4}$.依此类推,便得$\{f_n\}$的子列$\{f_{n_i}\}_{i=1}^\infty$,使得 $sep\{f_{n_i}\}\geqslant\frac{\varepsilon}{8}$.又由 X 为 k- 接近一致光滑知,对 $\frac{\varepsilon}{8}>0$,有 $\delta_1>0$ 及 $g_1,g_2,\cdots,g_{k+1}\in\{f_n\}$,使

$$\inf_{x\in S}\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}|g_i(x)-1|\geqslant\delta_1. \tag{4}$$

(若(4)式不成立，则对 $\forall\ m\in N$ 及 $g_1,g_2,\cdots,g_{k+1}\in\{f_{n_i}\}$ 有 $x\in S$，使得 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k+1}|g_i(x)-1|<\frac{1}{m}$. 则 $E_{k+1}=co\{g_1,\cdots,g_{k+1}\}\subset F^*(x,\frac{1}{m})$，故 $\sum_X^{(k+1)}(\frac{1}{m})\geqslant\frac{\varepsilon}{8}$，$\forall\ m\in N$. 此与 X 为 k- 接近一致光滑矛盾.)

综上知，对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta^1=\min\{\delta,\delta_1\}$，使 $w^*_{k+1}(\varepsilon)\geqslant\delta^1>0$. 故 X 具 w^*_{k+1} 性质.

②⇒ ① 若 ① 不成立，则 $\exists\ \varepsilon_0>0$，使 $\sum_X^{(k)}(\varepsilon_0)=0$. 从而对 $\forall\ m\in N$，有 $E^m\subset B^*$，$E^m=coE^m$，满足对每个 $E^{(m)}_{k+1}\subset E^m$，有 $x\in S$，使得 $E^{(m)}_{k+1}\subset F^*(x,\frac{1}{m})$，并且 $\mu(E^m)\geqslant\varepsilon_0$，由此知存在 $\{f^{(m)}_n\}\subset E^m$，使 $sep\{f^{(m)}_n\}\geqslant\frac{1}{3}\varepsilon_0$. 而由 X 为接近一致光滑知 X^* 为自反，且有 UKK 性质，从而存在 $\{f^{(m)}_n\}$ 的子列，不妨仍记为 $\{f^{(m)}_n\}$，使得 $f^{(m)}_n\xrightarrow{w^*}f$，且存在 $\delta=\delta(\frac{\varepsilon_0}{3})>0$，使得 $\|f\|<1-\delta$. 对此 $\delta>0$，又由 X 具 w^*_{k+1} 性质知，存在 $\delta_1=\delta_1(\delta)>0$ 及 $f^{(m)}_{n_1},\cdots,f^{(m)}_{n_{k+1}}\in\{f^{(m)}_n\}$，使得

$$\max_{1\leqslant i\leqslant k+1}|f^{(m)}_{n_i}(x)-1|>\delta_1,\forall\ x\in S. \tag{5}$$

取充分大的 m，使 $\frac{1}{m}<\delta_1$. 令 $C=co\{f^{(m)}_{n_1},\cdots,f^{(m)}_{n_{k+1}}\}\subseteq E^m$. 由(5)式知对每个 $x\in S$，C 不能包含在 $F^*(x,\frac{1}{m})$ 中. 此与我们题设矛盾. 从而 ②⇒ ① 成立.

3 *k-NUS* 空间与其他一些空间的关系

引理 3.1[2] 对 $k>1$，若 X 为 k-NUC 空间，则 X 为 $(k+1)$-NUC 空间.

定理 3.1 对 $k>1$，若 X 为 k- 接近一致光滑空间，则 X 为 $(k+1)$- 接近一致光滑空间.

证明 由 X 为 k- 接近一致光滑空间知 X^* 为 k- 接近一致凸空间，从而由 X^* 为 $(k+1)$- 接近一致凸空间，知 X 为 $(k+1)$- 接近一致光滑空间.

引理 3.2[2] X 为 kUC 空间，则 X 为 $(k+1)$-NUC 空间.

引理 3.3[2] X 为 k-NUC 空间并且也为严格凸空间，则 X 为 kR 空间.

定理 3.2 X 为 k- 一致光滑空间，则 X 为 $(k+1)$- 接近一致光滑空间.

证明 若 X 为 k- 一致光滑空间，则 X^* 为 k- 一致凸空间，再由上面引理 2.4 知 X^* 为 $(k+1)$- 接近一致凸空间，最后根据定理 2.4 知 X 为 $(k+1)$- 接近一致光滑空间.

例 3.1 存在接近一致光滑空间，但对 $\forall\ k\geqslant 2$，其不为 k- 接近一致光滑空间.

证明 取 X 为 Basernstein II 空间[4]，则由文献[4]知，X 为接近一致凸空间，但不具有 $B.S.P$ 性质. 由 X 为接近一致凸空间知 X^* 为接近一致光滑空间，但由于其不具有 $B.S.P$ 性质，知对 $\forall\ k\geqslant 2$，X^* 不为 k- 接近一致光滑空间.

例 3.2 $\forall\ k\geqslant 2$，存在 X 为 $(k+1)$- 接近一致光滑空间，但不为 k- 接近一致光滑空间.

证明 设 $k\geqslant 2$，$i_1<i_2<\cdots<i_k$，对每个 $i=(a_1,a_2,\cdots)\in l_2$，令

$$\|x\|^2_{i_1\cdots i_k}=(\sum_{j=1}^{k}|a_{i_j}|)^2+\sum_{i\neq i_1,\cdots,i_k}a_i^2.\ X_{i_1\cdots i_k}=(l_2,\|\cdot\|_{i_1\cdots i_k}),$$

则由文献[4]知 X 为 k- 一致凸空间且严格凸空间，但不为 kR 空间. 由此知 X^* 为 $(k+1)$- 接近一致光滑空间，而不为 k- 接近一致光滑空间，否则 X 为 k- 接近一致凸空间. 再由 X 为严格凸空间知 X 为 kR 空间. 矛盾.

例 3.3 $\forall\ k\geqslant 2$，存在 $(k+1)$- 接近一致光滑空间，而非 k- 一致光滑空间.

证明 由文献[2]知，存在 X 为 $(k+1)$- 接近一致凸空间，而非 k- 一致凸空间. 从而知存在 X^* 为 $(k+1)$- 接近一致光滑空间而非 k- 一致光滑空间.

参考文献：

[1] HUFF R. Banach spaces which are Nearly Uniformly Convex [J]. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1980(10): 743-749.

[2] KUTZAROVA D. k-β and k- Nearly Uniformly Convex Banach spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1991, 162: 322-338.

[3] BANAS J. Compactness conditions in the Geometric Theory of Banach spaces[J]. Nonlinear Analysis, 1991, 718(16): 669-782.

[4] 俞鑫泰. Banach 空间几何理论[M]. 上海：华东师范大学出版社，1986: 264-267.

[5] SULLIVAN F. A generalization of Uniformly Rotund Banach spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1979, 31: 628-636.

(责任编辑：邓大玉　凌汉恩)