# 一类新的DY-型共轭梯度法的全局收敛性*

# The Global Convergence of a New Kind of DY-Conjugate Gradient Method

蒙诗德[1]，刘利英[2]，吴庆军[1]，黄宏波[3]

MENG Shi-de[1], LIU Li-ying[2], WU Qing-jun[1], HUANG Hong-bo[3]

(1. 玉林师范学院数学与计算机科学系，广西玉林 537000；2. 聊城大学数学科学学院，山东聊城 252059；3. 南宁地区教育学院数学系，广西南宁 530001)

(1. Department of Mathematics and Computer Science, Yulin Teacher's College, Yulin, Guangxi, 537000, China; 2. Department of Mathematics Science, Liaocheng University, Liaocheng, Shandong, 252059, China; 4. Department of Mathematics, Nanning Prefecture's Educational College, Nanning, Guangxi, 530001, China)

**摘要**：给出求解非线性无约束优化问题的新的DY-型共轭梯度公式和新算法，证明新公式和新算法在推广Wolfe规则下分别具有下降性和全局收敛性. 文献[14]提出的杂交共轭梯度公式中 $\beta_k$ 的取值是新的DY-型共轭梯度公式的特例.

**关键词**：无约束优化　共轭梯度法　线搜索　下降性　全局收敛性

**中图法分类号**：O224　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2006)04-0276-03

**Abstract**: In this paper, a new kind of DY-conjugate gradient formula and the corresponding method for solving nonlinear unconstrained optimization is proposed. The new conjugate gradient method with general Wolfe line search was proved to have the global convergence. By disscusing the hybrid conjugate gradient formula $\beta_k$ given by [14], we conclude that the above $\beta_k$ is only a specical cases of DY-conjugate gradient formula.

**Key words**: unconstrained optimization, conjugate gradient method, line search, descent property, global convergence

考虑无约束优化问题

$$\min\{f(x) \mid x \in R^n\}, \tag{0.1}$$

其中 $f: R^n \to R$ 为一阶可微的非线性函数，其梯度记为 $g: R^n \to R^n$. 求解无约束优化问题(0.1)的一般方法有迭代公式：

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k, \tag{0.2}$$

其中 $t_k$ 为搜索步长，一般采用某个线搜索来获得. 常用的步长规则主要有：精确线搜索步长规则，Armijo规则，Armijo-Goldstein规则，弱Wolfe-Powell规则，强Wolfe-Powell规则和推广Wolfe规则等，其中，推广Wolfe规则为：寻找一个 $t_k > 0$ 并满足：

$$f(x_k + t_k d_k) - f(x_k) \leqslant \max\{\delta t_k g_k^T d_k, -2\delta t_k^2 \| d_k \|^2\}, \tag{0.3}$$

$$g_{k+1}^T d_k \geqslant \max\{\sigma g_k^T d_k, -2\sigma t_k \| d_k \|^2\}, \tag{0.4}$$

其中，$\sigma \in (\delta, 1)$，$g_k = g(x_k) = \nabla f(x_k)$. 当 $t_k \| d_k \|$ 较大时，该线搜索能保证目标函数 $f(x)$ 比在Wolfe搜索下下降得更快[1]，并且能够找到更加合适的步长，使得目标函数下降.

共轭梯度法是求解大规模无约束优化问题的有效方法，其搜索方向 $d_k$ 被定义为：

$$d_k = \begin{cases} -g_k, k = 1, \\ -g_k + \beta_k d_{k-1}, k \geqslant 2, \end{cases} \tag{0.5}$$

其中 $\beta_k$ 是标量，关于 $\beta_k$ 的选取的主要几种公式见文献[2～8].

关于 $\beta_k$ 的选取公式在某些线搜索下的全局收敛性已被广泛研究，其中Powell[9]证明了FR方法在精确线搜索下具有全局收敛性；Al-Baali[10]在非精确线

收稿日期：2006-01-20

修回日期：2006-05-23

作者简介：蒙诗德(1956-)，男，广西玉林人，讲师，主要从事基础数学的教学和研究工作。

*玉林师范学院科研项目(2006YJYB30)资助。

搜索下证明了 FR 方法具有全局收敛性但数值结果较差;Polak-Ribieer 方法有很好的数值结果但其全局收敛性较差,因此 Touati-Ahmed 和 Story[11] 把 $\beta_k^{FR}$, $\beta_k^{PR}$ 结合起来,得到具有较好的数值结果和全局收敛性的方法;Han Jiye 等[12] 把公式中 $\beta_k$ 的取值范围进一步扩大,并证明了在强 Wolfe 线搜索下的全局收敛性;Gilbert 和 Nocedal[13] 提出一类杂交的共轭梯度公式,该算法仅比 FR 方法好些,其数值结果比 PR 方法差;Y. H. Dai 和 Y. Yuan[14] 提出了数值结果比 PR 方法好的杂交共轭梯度公式.

本文给出了一类新的共轭梯度类型公式和算法,证明该公式在推广 Wolfe 线搜索下具有下降性和全局收敛性. 并讨论文献[14] 所提出的杂交共轭梯度公式中 $\beta_k$ 的取值.

## 1 新的 DY-型共轭梯度公式及其下降性

### 1.1 新的 DY-型共轭梯度公式和新算法

新的 DY- 型共轭梯度公式为:

$$\beta_k = r_k \beta_k^{DY}, \tag{1.1}$$

其中 $\beta_k^{DY} = \dfrac{g_k^T g_k}{(g_k - g_{k-1})^T d_{k-1}}$,

$$r_k \in [-c, 1], c = \frac{1-\sigma}{1+\sigma}. \tag{1.2}$$

求解无约束优化问题的共轭梯度新算法如下.

步骤 1 任意给定 $x_1 \in R^n$,计算 $g_1$,若 $g_1 = 0$,则停止;否则转步骤 2.

步骤 2 令 $d_1 = -g_1, k = 1$.

步骤 3 令 $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$, $t_k$ 满足(0.3) 式和(0.4) 式.

步骤 4 计算 $g_{k+1}$,若 $\| g_{k+1} \| = 0$,则停;否则转步骤 5.

步骤 5 令 $d_k = -g_k + \beta_k d_{k-1}$,其中 $\beta_k$ 满足(1.1) 式和(1.2) 式,令 $k := k+1$,转步骤 2.

### 1.2 新公式的下降性

为了证明方便,给出 2 个假设.

**假设 1** 水平集 $\Omega = \{x \in R^n : f(x) \leqslant f(x_1)\}$ 有界.

**假设 2** 在水平集上梯度 $g$ Lipschitz 连续,即对于任意 $x, y \in \Omega$,存在正数 $L$,使得 $\| g(x) - g(y) \| \leqslant L \| x - y \|$.

**定理 1** 若假设 1,假设 2 成立,对于(0.2) 和(0.5) 式,步长因子 $\beta_k$ 由推广 Wolfe 线搜索条件(0.3) 和(0.4) 式确定,且 $\beta_k$ 满足(1.1) 和(1.2) 式. 若 $g_k \neq 0$,则 $d_k$ 具有下降性,即满足 $g_k^T d_k < 0$.

**证明** 当 $k = 1$ 时,$d_1 = -g_1$,上式显然成立. 假设 $k \geqslant 2$ 时,$g_k^T d_k < 0$,当 $k+1$ 时,(0.5) 式与 $g_{k+1}$ 两边作内积,并由文献[8] 的 $\beta_K^{DY} = \dfrac{g_k^T g_k}{(g_k - g_{k-1})^T d_{k-1}}$ 得

$$g_{k+1}^T d_{k+1} = - \| g_{k+1} \|^2 + r_{k+1} \frac{\| g_{k+1} \|^2}{d_k^T y_k} g_{k+1}^T d_k = \frac{-y_k^T d_k + r_{k+1} g_{k+1}^T d_k}{y_k^T d_k} \| g_{k+1} \|^2 = \frac{g_k^T d_k + (r_{k+1} - 1) g_{k+1}^T d_k}{y_k^T d_k} \| g_{k+1} \|^2 =$$

$$\frac{1 + (r_{k+1} - 1) \dfrac{g_{k+1}^T d_k}{g_k^T d_k}}{\dfrac{g_{k+1}^T d_k}{g_k^T d_k} - 1} \| g_{k+1} \|^2 = \frac{1 + (r_{k+1} - 1) l_k}{l_k - 1} \| g_{k+1} \|^2 = \zeta_{k+1} \| g_{k+1} \|^2,$$

其中,$l_k = \dfrac{g_{k+1}^T d_k}{g_k^T d_k}$, $\zeta_{k+1} = \dfrac{1 + (r_{k+1} - 1) l_k}{l_k - 1}$. 由归纳假设得 $g_k^T d_k < 0$,又由(0.4) 式得

$$l_k \leqslant \sigma.$$

由 $\beta_k \leqslant \sigma$ 及(1.2) 得

$$1 + (r_{k+1} - 1) l_k \geqslant 1 + (r_{k+1} - 1)\sigma \geqslant 1 + \left(-\frac{1-\sigma}{1+\sigma} - 1\right)\sigma = \frac{1-\sigma}{1+\sigma} = c > 0.$$

另一方面 $l_k - 1 < \sigma - 1 < 0$,从而有 $\zeta_{k+1} = \dfrac{1 + (r_{k+1} - 1) l_k}{l_k - 1} < 0$. 则 $g_{k+1}^T d_{k+1} = \zeta_{k+1} \| g_{k+1} \|^2 < 0$.

由数学归纳法,定理得证,新公式具有下降性.

## 2 新算法的全局收敛性

先给出引理 1.

**引理 1** 若假设 1,假设 2 成立,对(0.2) 和(0.5) 式,步长因子 $\beta_k$ 由推广 Wolfe 线搜索条件(0.3) 和(0.4) 式确定,且 $\beta_k$ 满足(1.1) 和(1.2) 式. 则 Zoutendijk 成立,即 $\sum\limits_{k \geqslant 1} \dfrac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^2} < +\infty$.

**证明** 由定理 1 得,$g_k^T d_k < 0$,所以$\{f(x_k)\}$ 为单调下降有界数列,即$\{f(x_k)\}$ 为收敛数列.

(i) 若 $\sigma g_k^T d_k > -2\sigma t_k \| d_k \|^2$,则

$$d_k^T y_k = d_k (g_{k+1} - g_k)^T \geqslant \sigma g_k^T d_k - g_k^T d_k \geqslant (\sigma - 1) g_k^T d_k > 0. \tag{2.1}$$

由假设 2 得

$$d_k^T y_k = d_k^T (g_{k+1} - g_k) \leqslant L t_k \| d_k \|^2. \tag{2.2}$$

由(2.1) 和(2.2) 式得

$$t_k \geqslant \frac{\sigma - 1}{L} \frac{g_k^T d_k}{\| d_k \|^2} > 0.$$

由(0.3) 式,有

$$f_k - f_{k+1} \geqslant -\max\{\delta t_k g_k^T d_k, -2\delta t_k^2 \| d_k \|^2\} =$$

$\min\{-\delta t_k g_k^T d_k, 2\delta t_k^2 \| d_k \|^2\}$.

由 $\sigma g_k^T d_k > -2\sigma t_k \| d_k \|^2$，则 $-\delta t_k g_k^T d_k \leqslant 2\delta t_k^2 \| d_k \|^2$，从而

$$f_k - f_{k+1} \geqslant -\delta t_k g_k^T d_k \geqslant$$

$$-\delta \frac{\sigma - 1}{L} \frac{g_k^T d_k}{\| d_k \|^2} g_k^T d_k = \frac{\delta(1-\sigma)}{L} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^2}.$$

(ii) 若 $\sigma g_k^T d_k \leqslant -2\sigma t_k \| d_k \|^2$，则

$$d_k^T y_k = d_k (g_{k+1} - g_k)^T \geqslant -2\sigma t_k \| d_k \|^2 - g_k^T d_k. \tag{2.3}$$

由(2.2)和(2.3)式，得 $t_k \geqslant -\frac{1}{2\sigma + L} \frac{g_k^T d_k}{\| d_k \|^2}$.

由 $\sigma g_k^T d_k \leqslant -2\sigma t_k \| d_k \|^2$ 得 $-\delta t_k g_k^T d_k \geqslant 2\delta t_k^2 \| d_k \|^2$.

从而

$$f_k - f_{k+1} \geqslant 2\delta t_k^2 \| d_k \|^2 \geqslant$$

$$2\delta \frac{1}{(2\sigma + L)^2} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^4} \| d_k \|^2 = \frac{2\delta}{(2\sigma + L)^2} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^2},$$

令 $d = \min\{\frac{\delta(1-\sigma)}{L}, \frac{2\delta}{(2\sigma + L)^2}\}$，则

$$f_k - f_{k+1} \geqslant d \frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^2},$$

两边求和得

$$\sum_{k=1}^{N} [f(x_k) - f(x_{k+1})] \geqslant \sum_{k=1}^{N} d \frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^2},$$

由于$\{f(x_k)\}$为收敛数列，两边取极限得：

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^2} < +\infty.$$

因此，Zoutendijk 条件成立，引理1得证.

**定理2** 若假设1，假设2成立，对于(0.2)和(0.5)式，步长因子 $\beta_k$ 由推广 Wolfe 线搜索条件(0.3)和(0.4)式确定，且 $\beta_k$ 满足(1.1)和(1.2)式. 则算法或者终止于稳定点或者

$$\liminf_{k \to \infty} \| g_k \| = 0. \tag{2.4}$$

**证明** 若定理不成立，则存在 $\gamma > 0$，使

$$\| g_k \|^2 > \gamma, \forall k \geqslant 1. \tag{2.5}$$

(0.5)式与 $g_k$ 两边作内积并注意到 $\beta_k$ 的取值得

$$g_k^T d_k = \frac{g_{k-1}^T d_{k-1} + (r_k - 1) g_k^T d_{k-1}}{y_{k-1}^T d_{k-1}} \| g_k \|^2,$$

所以

$$\beta_k^{DY} = \frac{\| g_k \|^2}{y_{k-1}^T d_{k-1}} = \frac{g_k^T d_k}{g_{k-1}^T d_{k-1} + (r_k - 1) g_k^T d_{k-1}},$$

由 $\beta_k = r_k \beta_k^{DY}$ 得

$$\beta_k = \frac{r_k g_k^T d_k}{g_{k-1}^T d_{k-1} + (r_k - 1) g_k^T d_{k-1}} =$$

$$\frac{r_k}{1 + (r_k - 1) \frac{g_k^T d_{k-1}}{g_{k-1}^T d_{k-1}}} \frac{g_k^T d_k}{g_{k-1}^T d_{k-1}} =$$

$$\frac{r_k}{1 + (r_k - 1) l_{k-1}} \frac{g_k^T d_k}{g_{k-1}^T d_k} = \zeta_k \frac{g_k^T d_k}{g_{k-1}^T d_{k-1}},$$

其中，

$$l_{k-1} = \frac{g_k^T d_{k-1}}{g_{k-1}^T d_{k-1}},$$

$$\zeta_k = \frac{r_k}{1 + (r_k - 1) l_{k-1}}. \tag{2.6}$$

又由于 $d_k + g_k = \beta_k d_{k-1}$，有

$$\| d_k \|^2 = \beta_k^2 \| d_{k-1} \|^2 - 2 g_k^T d_k - \| g_k \|^2,$$

两边同除以$(g_k^T d_k)^2$，以及由 $g_k^T d_k = \zeta_k \| g_k \|^2$，$\beta_k = \zeta_k \frac{g_k^T d_k}{g_{k-1}^T d_{k-1}}$ 得

$$\frac{\| d_k \|^2}{(g_k^T d_k)^2} = \zeta_k^2 \frac{\| d_{k-1} \|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} - \frac{1}{\| g_k \|^2} \left(\frac{2}{\zeta_k} + \frac{1}{\zeta_k^2}\right) =$$

$$\zeta_k^2 \frac{\| d_{k-1} \|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} + \frac{1}{\| g_k \|^2} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{\zeta_k}\right)^2\right). \tag{2.7}$$

显然由(1.2)式和 $1 + (r_k - 1) l_{k-1} \geqslant c > 0$ 得

$$1 + (r_k - 1) l_{k-1} \geqslant -r_k,$$

而且，由于 $l_{k-1} < 1$ 和 $r_k \leqslant 1$，可以得到 $(1 - r_k)(1 - l_{k-1}) \geqslant 0$，即 $1 + (r_k - 1) l_{k-1} \geqslant r_k$. 因此，$1 + (r_k - 1) l_{k-1} \geqslant |r_k|$，由 $\zeta_k$ 的定义(2.6)，得

$$|\zeta_k| \leqslant 1. \tag{2.8}$$

由(2.7)和(2.8)得

$$\frac{\| d_k \|^2}{(g_k^T d_k)^2} \leqslant \frac{\| d_{k-1} \|^2}{(g_{k-1}^T d_{k-1})^2} + \frac{1}{\| g_k \|^2}. \tag{2.9}$$

对(2.9)式两边求和，且由 $\| d_1 \|^2 = -g_1^T d_1 = \| g_1 \|^2$，得

$$\frac{\| d_k \|^2}{(g_k^T d_k)^2} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\| g_i \|^2}.$$

由(2.5)式，可以得到 $\frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^2} \geqslant \frac{\gamma^2}{k}$，从而有

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^2} = +\infty.$$

这与 Zoutendijk 条件矛盾，因此(2.4)式成立，定理2证毕.

## 3 讨论

Y. H. Dai 和 Y. Yuan[14] 得出的一类杂交共轭梯度公式

$$\beta_k = \max\{-c\beta_k^{DY}, \min\{\beta_k^{HS}, \beta_k^{DY}\}\},$$

其中 $c = \frac{1-\sigma}{1+\sigma} > 0$. 下面我们对这个公式的 $\beta_k$ 的取值进行讨论.

(i) 当 $\beta_k^{HS} \geqslant \beta_k^{DY}$ 时，$\min\{\beta_k^{HS}, \beta_k^{DY}\} = \beta_k^{DY}$，并且在 Wolfe 线搜索条件 $\beta_k^{DY} \geqslant 0$，故 $\beta_k = \beta_k^{DY}$. 此时，相当于公式(1.1)式中 $r_k = 1$.

(ii) 当 $-c\beta_k^{DY} < \beta_k^{HS} < \beta_k^{DY}$ 时，$\beta_k = \beta_k^{HS}$，此时，可令 $\beta_k = r_k \beta_k^{DY}$，其中 $r_k \in (0,1)$.

(iii) 当 $\beta_k^{HS} \leqslant -c\beta_k^{DY}$ 时，$\beta_k = -c\beta_k^{DY}$.

(下转第 281 页 Continue on page 281)

不成立，则存在 $\rho > 0$，使

$$\| g_k \| \geqslant \rho, \forall k. \tag{20}$$

由引理 2 知

$$g_{k+1}^T d_{k+1} = \frac{\| g_{k+1} \|^2 g_k^T d_k}{\delta_k} = \frac{1}{\mu} \beta_k g_k^T d_k, \tag{21}$$

则

$$\beta_k = \mu \frac{g_{k+1}^T d_{k+1}}{g_k^T d_k}. \tag{22}$$

将式(3) 写成

$$d_{k+1} + g_{k+1} = \beta_k d_k,$$

故

$$\| d_{k+1} \|^2 = \beta_k^2 \| d_k \|^2 - 2 g_{k+1}^T d_{k+1} - \| g_{k+1} \|^2.$$

上式两端同除以$(g_{k+1}^T d_{k+1})^2$，利用式(21) 得

$$\frac{\| d_{k+1} \|^2}{(g_{k+1}^T d_{k+1})^2} = \mu^2 \frac{(g_{k+1}^T d_{k+1})^2 \| d_k \|^2}{(g_k^T d_k)^2 (g_{k+1}^T d_{k+1})^2} - \frac{2}{g_{k+1}^T d_{k+1}}$$

$$- \frac{\| g_{k+1} \|^2}{(g_{k+1}^T d_{k+1})^2} = \mu^2 \frac{\| d_k \|^2}{(g_k^T d_k)^2} - \left( \frac{1}{\| g_{k+1} \|} + \frac{\| g_{k+1} \|}{g_{k+1}^T d_{k+1}} \right)^2 + \frac{1}{\| g_{k+1} \|^2} \leqslant \mu^2 \frac{\| d_k \|^2}{(g_k^T d_k)^2} + \frac{1}{\| g_{k+1} \|^2}.$$

又因

$$\frac{\| d_1 \|^2}{(g_1^T d_1)^2} = \frac{1}{\| g_1 \|^2}, \| g_k \| \geqslant \rho, 0 < \mu < 1,$$

故

$$\frac{\| d_k \|^2}{(g_k^T d_k)^2} \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \mu^{2i} \frac{1}{\| g_{k+i} \|^2} \leqslant \frac{1}{\rho^2} \sum_{i=0}^{k-1} \mu^{2i} \approx \frac{1}{\rho^2} \frac{1}{1-\mu^2}.$$

上式表明

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{(g_k^T d_k)^2}{\| d_k \|^2} = \infty, \tag{23}$$

这与引理 2 矛盾，故定理成立. 证毕.

**参考文献：**


[1] SHI ZHEN JUN. A class of descent methods and its global convergence [J]. Journal of Qufu Normal University, 2000, 26(3): 4-6.

[2] DU XUE WU. Global convergence of a class of unconstrained minimization methods including the FR method [J]. OR Transactions, 2004, 8(4): 1-9.

[3] 袁亚湘，孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京：科学出版社，1997：98-106.

[4] 时贞军. 基于共轭梯度法的下降算法[J]. 曲阜师范大学学报，1999，25(1)：5-6.

[5] 颜世建. 共轭下降法[J]. 南京师大学报，1996，19(2)：12-14.

[6] 陈元媛，曹兴涛，杜守强. 一种新的非线性共轭梯度法的全局收敛性[J]. 青岛大学学报，2004，17(2)：22-24.


(责任编辑：邓大玉　凌汉恩)

(上接第 278 页 Continue from page 278)

所以，文献[14]提出的杂交共轭梯度公式是本文所给一类新的 DY-型共轭梯度公式的特例.

**参考文献：**


[1] CHEN Y, CAO X, DU S. A nonlinear conjugate gradient methods with a global convergence property[J]. Jounal of Qingdao University: Natural Science Edition, 2004, 17 (2): 22-24.

[2] HESTENESAND M R, STIEFEL E. Method of conjugate gradient for solving linear equations[J]. J Res Nat Bur Stand, 1952, 49: 409-436.

[3] FLETCHER R, REEVES C. Function minimization by conjugate gradients[J]. Compute J, 1964, 7: 149-154.

[4] POLAK E, RIBIERE G. Note Sur la convergence de directions conjugees [J]. Rev Francaise Informat Recherche Operationelle, 3e Année, 1969, 16: 35-43.

[5] POLYAK B T. The conjugate gradient method in extreme problems [J]. USSR Comp Math and Math Phys, 1969, 9: 94-112.

[6] FLETCHER R. Practical method of optimization, vol Ⅰ: unconstrained optimization[M]. 2nd edition. New York: Wiley, 1987.

[7] LIU Y, STOREY C. Efficient generalized conjugate gradient algorithms, part 1: theory [J]. Journal of Optimization Theory and Alication, 1991, 69: 129-137.

[8] DAI Y, YUAN Y. A nonlinear conjugate gradient with a strong global convergence properties[J]. SIAM Journal of Optimization, 1999, 10: 177-182.

[9] POWELL M J D. Nonconvex minimization calculations and the conjugate gradient methds, in: Lecture notes in Mathematics vol J [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984: 122-141.

[10] M Al-BAALI. Descent property and global convergence of the Fletcher-Reeves method with inexact line search [J]. IMA J Numer Anal, 1985, 5: 121-124.

[11] TOUATI-AHAMED D, STOREY C. Globally convergence hybrid conjugate gradient methods [J]. Joueal of Optimization Theory and Applications, 1990, 64(2): 379-397.

[12] HAN JIYE, LIU GUANGHUI, YIN HONGXIA. Convergence properties of conjugate gradient methods with strong Wolfe line search[J]. J Systems Science and Mathematics Science, 1998, 11(2): 112-116.

[13] GILBERT J C, NOCEDAL J. Global convergence of conjugate gradient methods for optimization[J]. SIAM J Optimization, 1992, 2: 21-42.

[14] DAI Y H, YUAN Y. An efficient hybrid conjugate gradient method for unconstrained optimization [J]. Annals of OR, 2001, 103: 33-47.


(责任编辑：韦廷宗　邓大玉)