极小 3 连通图的非基本边数

The Number of Non-essential Edges in Minimally 3-Connected Graphs

潘玉美，莫明忠

PAN Yu-mei，MO Ming-zhong

(柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系，广西柳州　545004)

(Department of Mathematics and Computer Science，Liuzhou Teachers College，Liuzhou，Guangxi，545004，China)

摘要：利用扇，断片及简约图的概念，得到不为轮的极小 3 连通图的非基本边数与其简约图的非基本边数相等，从而将求极小 3 连通图的非基本边数问题转化为求其简约图的非基本边数问题后，给出简约极小 3 连通图非基本边数的一个下界，刻画了达到下界的图类.

关键词：图　连通图　边数　扇　断片

中图法分类号：O157.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2007)01-0015-04

Abstract：The number of non-essential edges of the minimally 3-connnected graph G is the same as the that of its simplified graph G^* based on the concepts of fan，fragment and simplified graph. Therefore，the evaluation of non-essential edges of the graph G can be changed into that of the graph G^*. A lower bound for the number of non-essential edges of the graph G^* and the characterization of the graphs that reach the lower bound are given.

Key words：graph，connected graphs，the number of non-essential edges，fan，fragment

数学归纳法在图论中的广泛应用致使图的"简约"(reduction)日益受到重视. 图的"简约"是指在保持图的某种性质的前提下使图的阶数或边数减少的一系列运算的总和，图的边收缩便是其中之一. 自从 1963 年 W. T. Tutte 用可收缩边给出了 3 连通图的结构特征[1]，1980 年 C. Thomassen[2]用可收缩边给出了 Kuratowski 定理的一个简短证明之后，图论界有许多著名专家、学者对不同的简约方法进行了有益的探索和研究[3~7]，有些方式，如文献[5]已经有了重要的应用. 值得注意的是，上述简约方法中有许多是基于 3 连通图的.

极小 3 连通图与 3 连通图中的一种简约方式有密切的联系. 设 G 是一个 3 连通图，e 是 G 的一条边，$G-e$ 表示在 G 中去掉边 e 所得到的图，如果 $G-e$ 仍是 3 连通图，则称 e 是 G 的可删除边；G/e 表示将 G 中的边 e 去掉并把 e 的两个端点重合在一起所得到的图(如果得到的图出现重边，要将重边去掉)，如果 G/e 仍是 3 连通图，则称 e 是 G 的可收缩边. 如果 e 是 G 的可收缩边，G/e 的边数可以与 $G-e$ 的边数相等，也可能比 $G-e$ 的少. 由于 G/e 的边数变化的不确定性，给收缩边的应用带来了不便，为此人们引入了非基本边的概念. 如果 e 是 3 连通图 G 的可收缩边，并且 G/e 的边数与 $G-e$ 的相等，则称 e 是 G 的可简单收缩边. 如果 e 既不是可删除边也不是可简单收缩边，则称 e 是 G 的基本边，否则称 e 是 G 的非基本边[8]. 在一个 3 连通图中，如果删除其任何一条边后，所得的图不是 3 连通图，则称该图为极小 3 连通图[9]. 对于极小 3 连通图中的非基本边，在文献[7,10]中已分别有以下结果：

(1) 不是轮的极小 3 连通图至少有 3 条非基本边，恰有 3 条非基本边的极小 3 连通图当且仅当是分割轮或闭分割轮；恰有 4 条非基本边的极小 3 连通图当且仅当是三扇或双锁轮.

(2) 设 G 是不为轮的极小 3 连通图，则 G 恰有 5 条非基本边当且仅当 G 仅有 3 个或 4 个扇，$G\in \mathrm{P}$，其中 P 是一类图.

收稿日期：2006-04-18

修回日期：2006-06-12

作者简介：潘玉美(1974-)，女，讲师，主要从事图论与组合研究。

由上可见，迄今人们仅研究了恰含有3条，4条或5条非基本边时图的结构，而在一般情形会有更多的非基本边，这种情形更有必要进行研究。本文利用扇，断片及简约图的概念，得到不为轮的极小3连通图的非基本边数与其简约图的非基本边数相等，从而将求极小3连通图的非基本边数问题转化为求其简约图的非基本边数问题，并给出简约极小3连通图非基本边数的一个下界，刻画了达到下界的图类。

1 扇及简约图的概念

在极小3连通图G中，一个长为3的圈叫做一个三边形，相交于一个3度顶点的三条边叫做G的一个三元组。设$k \geqslant 1$是奇数，$F=\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+2}\} \subseteq E(G)$，如果$F$满足下列两个条件，并且相对这两个条件是极大的，则称F是G的一个扇：

(i) 当i是奇数时，$\{a_i,a_{i+1},a_{i+2}\}$是三元组；

(ii) 当i是偶数时，$\{a_i,a_{i+1},a_{i+2}\}$是三边形。

称$a_i, i\in\{1,3,\cdots,k+2\}$为$F$的缘，$a_i, i\in\{2,4,\cdots,k+1\}$为$F$的辐，$a_1,a_{k+2}$为$F$的端边。边$a_1$不与$a_2$关联的端点记为$u$，边$a_{k+2}$不与$a_{k+1}$关联的端点记为$v$，边$a_2$不与$a_1$关联的端点记为$w$，则称$u,v$为$F$的端点，$w$为$F$的中心，$\langle F\rangle$中其余的点称为$F$的内点，这里$\langle F\rangle$是由$F$中的边导出的子图。显然，$F$中的每一个内点都是3度顶点，两个不同的扇无公共内点，当$k \geqslant 3$时，$F-\{a_1,a_{k+2}\}$中的边都是G的基本边。为以下叙述的方便，当$k=1$时，称F为Ⅰ-型扇，也叫做平凡扇；当$k=2$时，称F为Ⅱ-型扇；当$k\geqslant 3$时，称F为Ⅲ-型扇；当$k\geqslant 2$时，统称F为非平凡扇。

设G是不为轮的极小3连通图，如果G中有Ⅲ-型扇，对G中的每一个Ⅲ-型扇$F=\{a_1,a_2,\cdots,a_{k+2}\}$，依次将$F$中的缘$a_k,a_{k-2},\cdots,a_5$进行收缩，使得最后所得的图中无Ⅲ-型扇，并将它记为G^*，称G^*是G的一个简约图。显然，G^*也是不为轮的极小3连通图。

2 极小3连通图的一些性质

本文讨论的图都是有限、无向简单图，未说明的术语和记号参见文献[11]。

设G是连通图，$V(G)$，$E(G)$和$E_n(G)$分别表示G的顶点集，边集和非基本边集，$|G|$，$|E(G)|$和$|E_n(G)|$分别表示G的顶点数，边数和非基本边数。对于$x\in T\subseteq V(G)$，$E_n(x)$表示与x关联的非基本边集，$N_G(x)$，$d_G(x)$分别表示x在G中的邻域和度，在不发生混淆时，简记为$N(x)$，$d(x)$。并且$d_G(x)=|N_G(x)|$，$N_G(T)=\bigcup_{x\in T}N_G(x)-T$。$G-T$表示$V(G)-T$的导出子图，如果$G-T$不是连通图，则称$T$为$G$的点割。顶点数为$k$的点割称为$k$点割。设$T$是$G$的点割并且$|T|=\kappa(G)$，则称$T$是$G$的一个最小点割，其中$\kappa(G)$是$G$的连通度。此时如果$F$是$G-T$的至少一个连通分支但不是全部连通分支的并，则称$F$是$G$的断片，也称为$T$-断片。设$F$是图$G$的断片，$\overline{F}=V(G)-(F\cup N_G(F))$，则$\overline{F}$也是$G$的断片，并且$N(F)=T=N(\overline{F})$。$\Gamma_G$表示图$G$中所有最小点割的集合，$G$中所有有序对$(T,F)$的集合记为$\Gamma_F(G)$，其中$T$是$G$的最小点割，$F$是$T$-断片。对于图中的断片，有以下常用到的性质。

性质[12]　设$(T,F)\in\Gamma_F(G)$与$(T',F')\in\Gamma_F(G)$，如果$F\cap F'\neq\phi$，则有$|F\cap T'|\geqslant|\overline{F'}\cap T|$，$|F'\cap T|\geqslant|\overline{F}\cap T'|$；如果$F\cap F'\neq\phi$并且$F\cap F'$不是断片，则$|F\cap T'|>|\overline{F'}\cap T|$，$|F'\cap T|>|\overline{F}\cap T'|$，$\overline{F}\cap\overline{F'}=\phi$。

由文献[13]有以下引理1～3。

引理1　极小3连通图中每一个3圈上至少有两个3度顶点。

引理2　极小3连通图G中的边e是基本边，当且仅当e在G的一个三边形中，或G中有包含e的3点割。

引理3　设G是不为轮的极小3连通图，e是G的一条基本边，则下列三者之一成立：

(1) e在G的一个非平凡扇中，该扇的两条端边都是非基本边；

(2) e恰在G的一个平凡扇中，该扇的两条端边都是非基本边；

(3) e在G的两个平凡扇中，e是它们的公共边，并且这两个扇的其余边都是非基本边。

由引理3知极小3连通图中每一条基本边至少与一个3度顶点关联。

引理4　设G^*是G的一个简约图，$e=xy\in E(G^*)$，则e是G^*的非基本边当且仅当e是G的非基本边。

证明　设$F=\{a_1,a_2,\cdots,a_{k-2},a_{k-1},a_k,a_{k+1},a_{k+2}\}$是$G$的一个Ⅲ-型扇，$G'=G/a_k$是由$G$通过收缩扇$F$中的缘$a_k$而得到。显然，要证明引理的结论当且仅当证明：$e=xy$是$G'$的非基本边当且仅当$e$是$G$的非基本边。设$G$中的扇$F$收缩为$G'$中的扇$F'=\{a_1,a_2,\cdots,a_{k-2},a_{k-1},a_{k+2}\}$，$w$是$F$的顶点，$a_{k+1}=ws$，易见$E(G')=E(G)-\{a_k,a_{k+1}\}$，$V(G')=V(G)-\{s\}$。

充分性：假设e是G的非基本边，则e不在G的三边形中，因而e是G'的边。假设e是G'的基本边，由引理3知e在G'的扇F^*中。如果F^*是G'的非平凡扇，

那么e在G'的三边形中,e不是F^*的端边,因而e在G的非平凡扇中,且e不是该扇的端边,所以e是G的基本边,矛盾.如果F^*是G'的平凡扇,则e不在G'的三边形中,因而G'中存在包含e的3点割T,设$T=\{x,y,t\}$.如果$yt\in E(G')$,则$yt\in E(G)$,否则,y,t是G的某一个Ⅲ-型扇的内点,因而$d_G(y)=3$.而$y\in T$,则y必须与$G-T$的分支中至少两个顶点相邻,所以$d_G(y)\geqslant 4$,矛盾;如果$yt\notin E(G')$,则$yt\notin E(G)$,否则同上可导出矛盾.因而T也是G的3点割,xy是G的基本边,矛盾.

必要性:设e是G'的非基本边,显然e也是G的边.假设e是G的基本边.如果e在G的三边形中,则e在G的非平凡扇中,那么e在G'的非平凡型扇中,因而e是G'的基本边,矛盾.如果e不在G的三边形中,由引理2,G中有包含e的3点割S.设$S=\{x,y,t\}$,A是关于S的断片.如果$t\in V(G')$,则S也是G'的3点割,由引理2知e是G的基本边,矛盾;如果$t\notin V(G')$,则$t=s$,因而$a_{k+2}=sv$.设$a_k=sv'$,则$N_G(s)=\{w,v,v'\}$,此时如果$v'=x$(或y),则$\{s,y\}$(或$\{s,x\}$)是G'的2点割,与G'是3连通图矛盾.因此不失一般性,可设$v'\in A$如果$|A|\geqslant 2$,那么$S'=\{x,y,v'\}$是G'的3点割,得出e是G'的基本边,矛盾.所以$A=\{v'\}$因而$xy=a_{k-3}$,xy在G'中的三边形$wv'v''w$中,其中$a_{k-3}=wv''$,矛盾.

由引理4立即可得

定理1 不为轮的极小3连通图G的非基本边数与其简约图G^*的非基本边数相等.

3 简约极小3连通图的非基本边数

以下G^*指的都是简约极小3连通图.

引理5 G^*中每条边至多在一个三边形中.

证明 设xy是G^*的任意一条边.如果xy在一个三边形中,则xy是基本边,因而在一个非平凡扇中,所以至多在两个三边形中.假设xy在G^*的两个三边形$axya$和$bxyb$中.由引理1知三边形$axya$和$bxyb$中各至少有两个3度顶点.由对称性,可分以下两种情形讨论:

(1) $d(a)=d(b)=3$.则$ab\notin E(G^*)$,否则$\{x,y\}$是G^*的2点割,与G^*是3连通图矛盾.设$N(a)=\{x,y,s\}$,$N(b)=\{x,y,t\}$,那么$s\neq t$,否则G^*中有2点割,矛盾.因而G^*中有包含$\{sa,ax,ay,xy,yb,xb,bt\}$的Ⅲ-型扇,这与G^*中无Ⅲ-型扇矛盾.

(2) $d(a)\geqslant 4$或$d(b)\geqslant 4$.则$d(x)=d(y)=3$,那么$\{a,b\}$是G^*的2点割,矛盾.

令$U_i=\{x\in V(G^*)\mid d_{G^*}(x)=3,|E_{G^*}(x)\cap E_n(G^*)|=i\},i=0,1,2,3;W_i=\{x\in V(G^*)\mid d_{G^*}(x)\geqslant 4,|E_{G^*}(x)\cap E_n(G^*)|=i\},i\geqslant 0$.

显然,$V(G^*)=(\cup_{i=0}^{3}U_i)\cup(\cup_{i\geqslant 0}W_i)$.

引理6 G^*中每个3度顶点至少与一条非基本边关联.

证明 引理要证$U_0=\phi$.假设$U_0\neq\phi$,设$x\in U_0$,$N(x)=\{a,b,c\}$,那么xa,xb,xc都是G^*基本边.这时由引理5知a,b,c中至多有一对顶点相邻.

如果a,b,c中有一对顶点,比如b与c相邻,则xa不在任何三边形中,因为xa是基本边,所以G^*中存在包含xa的3点割T,b,c分别在$G-T$的两个不同分支中,这与$bc\in E(G^*)$矛盾.

如果a,b,c中任意两点都不相邻,则xa,xb,xc都不在三边形中,因而G^*中有分别包含xa,xb的3点割T和T'.设F和F'分别是T-断片和T'-断片,因为$x\in T\cap T'$,所以可设$b\in F,a\in F'$,因而$c\in\overline{F}\cap\overline{F'}\neq\phi$,由断片性质知,$|T\cap\overline{F'}|\geqslant|F\cap T'|$,$|\overline{F}\cap T'|\geqslant|T\cap F'|$,而$a\in T\cap F'$,$b\in F\cap T'$,$|T|=|T'|=3$,所以$|T\cap\overline{F'}|=|\overline{F}\cap T'|=1$,$T\cap F'=\{a\}$,$F\cap T'=\{b\}$.设$T\cap\overline{F'}=\{s\}$,$\overline{F}\cap T'=\{t\}$,由于$d(x)=3$,所以$F\cap F'=F\cap\overline{F'}=\overline{F}\cap F'=\phi$,因而$F=\{b\}$,$F'=\{a\}$,$ab\in E(G^*)$,与$ab\notin E(G^*)$的假设矛盾.

由引理1和引理6可得:

推论1 G^*中每个三边形至少与两条非基本边关联.

由引理6的证明易得:

推论2 设$x\in V(G^*)$,$N(x)=\{a,b,c\}$,若xa,xb都是基本边,而xc是非基本边,则$ab\in E(G^*)$.

证明 因为xc是非基本边,所以xc不在任何三边形中.假设$ab\notin E(G^*)$,那么xa,xb也不在任何三边形中,由于xa,xb都是基本边,因而G^*中有分别包含xa,xb的3点割,由引理6的证明可导出矛盾.

对$x\in V(G^*)$,我们定义

$N^{(1)}(x)=\{y\in N_{G^*}(x)\mid xy$是$G^*$的非基本边$\}$,

$N^{(2)}(x)=\{y\in N_{G^*}(x)\mid xy$是$G^*$的基本边$\}$,

$\Gamma_x=\{T\in\Gamma_{G^*}\mid T\supseteq\{x,y\},y\in N^{(2)}(x)\}$.

设$d(x)\geqslant 4$,$y\in N^{(2)}(x)$,则xy是G^*的基本边,由引理2知xy在G^*的3点割中或三边形中.如果$xyzx$是三边形,因为$d(x)\geqslant 4$,根据引理1,$d(y)=d(z)=3$.令$N(z)=\{x,y,w\}$,那么$\{x,y,w\}$是G^*的3点割,因此G^*中总有包含xy的3点割.

引理7 设$x\in V(G^*)$,$d(x)\geqslant 4$,若存在$a\in$

$N^{(2)}(x) \cap U_1$，则存在 $b \in N^{(2)}(x) \cap U_1$ 使得 $ab \in E(G^*)$.

证明 设 $N(a) = \{x,b,c\}$ 因为 ax 是基本边以及 $a \in U_1$，由推论 2 知 $xb \in E(G^*)$ 或 $xc \in E(G^*)$. 可设 $xb \in E(G^*)$，由引理 1 及 $d(x) \geqslant 4$，有 $d(b) = 3$. 由于 bx,ba 在三边形中，所以 bx,ba 是基本边，由引理 6 知 $b \in U_1$. 因此引理结论成立.

引理 8 设 $x \in V(G^*)$，$d(x) \geqslant 4$，$X \subseteq V(G^*)$，若 $N^{(1)}(x) \subseteq X$，并且存在 $T \in \Gamma_x$，使得 $G - T$ 有一分支与 X 不交，则 $(N^{(2)}(x) - X) \cap U_1 \neq \phi$.

证明 令 $\Gamma' = \{T | T \in \Gamma_x$ 且 $G - T$ 中有一分支与 X 不交$\}$. 由题设知，$\Gamma' \neq \phi$. 取 A 是关于 Γ' 中的 3 点割的阶最小的断片，$N(A) = T$，并且 $A \cap X = \phi$，因为 $x \in T$，所以存在 $a \in A$，使得 $xa \in E(G^*)$，而 $N^{(1)}(x) \subseteq X$，$A \cap X = \phi$，所以 $a \in N^{(2)}(x)$，因而存在 $S \in \Gamma_x$，$S \supseteq \{x,a\}$，令 B 是关于 S 的断片，则 $x \in T \cap S$，$a \in A \cap S$，如果 $A \cap B \neq \phi$，由于 $\{x,a\} \subseteq S$，且 A 是最小的断片，所以 $A \cap B$ 不是断片，因而由断片性质知，$\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$，$|A \cap S| > |\overline{B} \cap T|$，从而 $|A| > |\overline{B}|$，而 $\overline{B}$ 也是关于 Γ' 中的 3 点割的断片，这与 A 是最小的矛盾. 因此，$A \cap B = \phi$，同理，$A \cap \overline{B} = \phi$. 因为 $|S| = |T| = 3$，$x \in T \cap S$，所以 $|A| = |A \cap S| = 2$ 或 1. 如果 $|A| = 2$，则 $S \cap \overline{A} = \phi$，而 $\overline{A}$ 是连通的，所以 $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$ 或者 $\overline{A} \cap B = \phi$. 不妨设 $\overline{A} \cap \overline{B} = \phi$，则 $\overline{A} \cap B \neq \phi$，由断片性质知，$|T \cap B| \geqslant |A \cap S| = 2$，从而 $|T \cap B| = 2$，$\overline{B} \cap T = \phi$，因此 $\overline{B} = \phi$，这与 $\overline{B}$ 是断片矛盾. 所以 $|A| = 1$，$A = \{a\}$，并且 $N(a) = T$，$d(a) = 3$，又因为 $T \in \Gamma_x$，所以 $T \neq \overline{K_3}$，因此 a 在 G^* 的一个三边形中，由引理 6 知 $a \in U_1$，故 $(N^{(2)}(x) - X) \cap U_1 \neq \phi$.

推论 3 设 $x \in V(G^*)$，$x \in W_1$，则 $|N^{(2)}(x) \cap U_1| \geqslant 2$，从而 x 至少包含在 G^* 的一个三边形中.

证明 令 $X = N^{(1)}(x) = \{x'\}$，$T \in \Gamma_x$，A 是关于 T 的断片，则 A 和 $\overline{A}$ 中至少有一个不包含 x'，由引理 8 知，$N^{(2)}(x) \cap U_1 = (N^{(2)}(x) - X) \cap U_1 \neq \phi$. 取 $a \in N^{(2)}(x) \cap U_1$，则存在 $S \in \Gamma_x$，$S \supseteq \{x,a\}$，设 B 是关于 S 的断片，令 $X = \{x',a\}$，则 B 和 $\overline{B}$ 中至少有一个与 X 不交，由引理 8，$(N^{(2)}(x) - \{a\}) \cap U_1 = (N^{(2)}(x) - X) \cap U_1 \neq \phi$. 所以 $|N^{(2)}(x) \cap U_1| \geqslant 2$. 由引理 7 知，$x$ 至少包含在 G^* 的一个三边形中.

推论 4 设 $x \in V(G^*)$，$x \in W_0$，则 $|N^{(2)}(x) \cap U_1| \geqslant 4$，从而 x 至少包含在 G^* 的两个三边形中.

证明 令 $X = N^{(1)}(x) = \phi$，$T \in \Gamma_x$，A 是关于 T 的断片，则 $A,\overline{A}$ 与 X 相交均为空集，所以由引理 8 得，$N^{(2)}(x) \cap U_1 \neq \phi$. 取 $a_1 \in N^{(2)}(x) \cap U_1$，则存在 $S_1 \in \Gamma_x$，$S_1 \supseteq \{x,a_1\}$，B 是关于 S_1 的断片，令 $X = \{a_1\}$，则 $B,\overline{B}$ 都与 X 不交，所以 $(N^{(2)}(x) - \{a_1\}) \cap U_1 \neq \phi$. 取 $a_2 \in (N^{(2)}(x) - \{a_1\}) \cap U_1$，则存在 $S_2 \in \Gamma_x$，$S_2 \supseteq \{x,a_2\}$，设 C 是关于 S_2 的断片. 令 $X = \{a_1, a_2\}$，则 C 和 $\overline{C}$ 中至少有一个与 X 不交，所以 $(N^{(2)}(x) - \{a_1,a_2\}) \cap U_1 \neq \phi$，取 $a_3 \in (N^{(2)}(x) - \{a_1,a_2\}) \cap U_1$，由引理 5 和引理 7 有 $|N^{(2)}(x) \cap U_1| \geqslant 4$，从而 x 至少包含在 G^* 的两个三边形中.

引理 9 若 $x,y \in \bigcup_{i\geqslant 0} W_i$，$x \neq y$，则 $N^{(2)}(x) \cap N^{(2)}(y) \cap U_1 = \phi$.

证明 假设 $a \in N^{(2)}(x) \cap N^{(2)}(y) \cap U_1$，则由推论 2 知，$xy \in E(G^*)$，即 $axya$ 构成一个三边形，而 $d(x) \geqslant 4$，$d(y) \geqslant 4$，这与引理 1 矛盾，因而引理 9 成立.

由推论 3，推论 4 与引理 9 可得

引理 10 $|U_1| \geqslant 2|W_1| + 4|W_0|$.

设 H 是顶点的度为 3 或 4 的极小 3 连通图，H 中的扇都是 Ⅱ-型扇，H 中每一个 4 度顶点恰是两个 Ⅱ-型扇的中心，所有这些 Ⅱ-型扇中的 3 度顶点的集合为 $U_1(H)$. 因此 $V(H) = U_1(H) \cup W_0(H)$，即 H 中的 3 度顶点都属于 $U_1(H)$，H 中的 4 度顶点都属于 $W_0(H)$，$|U_1(H)| = 4|W_0(H)|$. 易见 H 是简约极小 3 连通图，H 中与 4 度顶点关联的边都是基本边，$|E_n(H)| = \frac{2}{5}|H|$，记所有 H 这样的图类为 Λ.

定理 2 $|E_n(G^*)| \geqslant \frac{3}{8}|G^*| + \frac{1}{8}|W_0|$，并且等号成立当且仅当 $G^* \in \Lambda$.

证明 令 $A = \bigcup_{x \in W_0} N(x) \cap U_1$，$B = U_1 - A$，显然，$U_1 = A \cup B$ 且 $A \cap B = \phi$.

由推论 4 知，

$$\frac{1}{4}|A| \geqslant |W_0|, \tag{1}$$

于是，由引理 6，$V(G^*) = (\bigcup_{i=1}^{3} U_i) \cup (\bigcup_{i\geqslant 0} W_i)$，再由 U_i 和 W_i 的定义有

$$2|E_n(G^*)| = \sum\nolimits_{i=1}^{3} i|U_i| + \sum\nolimits_{i\geqslant 1} i|W_i| = |A| + |B| + 2|U_2| + 3|U_3| + \sum\nolimits_{i\geqslant 1} i|W_i| \geqslant \frac{3}{4}|A| + |W_0| + |B| + 2|U_2| + 3|U_3| + \sum\nolimits_{i\geqslant 1} i|W_i| = \frac{3}{4}|G^*| + \frac{1}{4}|W_0| + \frac{1}{4}|B| + \frac{5}{4}|U_2| + \frac{9}{4}|U_3| + \sum\nolimits_{i\geqslant 1}(i - \frac{3}{4})|W_i| \geqslant \frac{3}{4}|G^*| + \frac{1}{4}|W_0|,$$

所以

$$|E_n(G^*)| \geqslant \frac{3}{8}|G^*| + \frac{1}{8}|W_0|. \tag{2}$$

（下转第 21 页 Continue on page 21）

I : uber den grossten primtriler binarer formen[J]. Math Ann,1933,107(3):691-730.
[2] GEL'FOND A O. Sur la divisibilite de la difference des puissances de deux nombres entiers parune puissance d'un iderl premier[J]. Mat Sb,1940(1):7-25.
[3] TERAI N. The diophantine equation $a^x+b^y=c^z$ [J]. Proc Japan Acad Ser A Math Sci,1994,70(1):22-26.
[4] 乐茂华.关于指数丢番图方程 $a^x+b^y=c^z$ 的 Terai 猜想[J].数学学报,2003,46(2):245-250.
[5] CAO Z F,DONG X L. An application of a lower bound for linear forms in two logarithms to the Terai-Jesmanovicz conjecture[J]. Acta Arith,2003,110(2):153-164.
[6] LE M H. A conjecture concerning the exponential Diophantine equation $a^x+b^y=c^z$ [J]. Acta Arith,2003,106(3):345-353.
[7] 胡永忠,袁平之.指数丢番图方程 $a^x+b^y=c^z$ [J].数学学报,2005,48(6):1175-1178.
[8] MORDELL L J. Diophantine equations[M]. London: Academic Press,1969.
[9] 乐茂华. Gel'found-Baker 方法在丢番图方程中的应用[M].北京:科学出版社,1998:44-45.
[10] TERAI N. The diophantine equation $a^x+b^y=c^z$ (Ⅱ)[J]. Proc Japan Acad Ser A Math Sci,1995,71(1):109-110.
[11] LE M H. A note on the diophantine equation $(m^3-3m)^x+(3m^2-1)^y=(m^2+1)^z$ [J]. Proc Japan Acad Ser A Math Sci,1997,73(2):148-149.
[12] CAO Z F. A note on the diophantine equation $a^x+b^y=c^z$ [J]. Acta Arith,1999,91(1):85-93.
[13] DONG X L,CAO Z F. On Terai-jesmanowicz conjecture concerning the diophantine equation $a^x+b^y=c^z$ [J]. Chinese Math Ann,2000,21A(4):709-714.
[14] 曹珍富.不定方程及其应用[M].上海:上海交通大学出版社,2000:149-158.
[15] VOUTIER P M. Primitive divisons of Lucas and Lehmer sequences[J]. Math Comp,1995,64(3):869-888.
[16] BILU Y,HANROT G,VOUTIER P M. Existence of primitive divisons of Lucas and Lehmer numbers[J]. J Reine Anger Math,2001,539(1):75-122.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第 18 页 Continue from page 18)

等式(2)成立的充要条件是:(1)式取等号,即 $|A|=4|W_0|$,以及 $B=\phi,U_2=U_3=\phi,W_i=\phi,i=1,2,\cdots$,从而 $U_1=A,V(G^*)=U_1\cup W_0$,并且 $|U_1|=4|W_0|$,于是,$|G^*|=|U_1|+|W_0|$,$|W_0|=\frac{1}{5}|G^*|$,此时有,$|E_n(G^*)|=\frac{3}{8}|G^*|+\frac{1}{8}\times\frac{1}{5}|G^*|=\frac{2}{5}|G^*|$,因此,$G^*\in\Lambda$.

参考文献:

[1] TUTTE W T. How to draw a graph[J]. Proc London Math Soc,1963,13:743-768.
[2] THOMASSEN C. Planarity and duality of finite and infinite graphs[J]. J Combin Theory Ser B,1980,29:244-271.
[3] DEAN N,HEMMINGER R L,TOFT B. On contractible edges in 3-connected graphs[J]. Congr Nuner,1987,38:291-293.
[4] MCCUAIG W. Contractible triples in 3-connected graphs[J]. J Combin Theory Ser B,1994,60:308-314.
[5] BARNETTE D W. Cotractible circuits in 3-connected graphs[J]. Discrete Math,1998,187:19-29.
[6] KREISELL M. Contractible non-edge in 3-connected graphs[J]. J Combin Theory Ser B,1998,74:192-201.
[7] REID T J,WU H. A longest cycle version of Tutt's wheels theorem[J]. J Combin Theory Ser B,1997,70:202-215.
[8] TUTTE W T. A theory of 3-connected graphs[J]. Nederl Wetensch Proc Ser A,1961,64:441-455.
[9] DAWES R W. Minimally 3-connected graphs[J]. J Combin Theory Ser B,1986,40:159-168.
[10] 陈仪朝,苏健基.恰含 5 条非基本边的极小 3 连通图[J].广西师范大学学报:自然科学版,2004,22(3):29-34.
[11] BONDY J A,MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. New York:North-Holland,1981.
[12] MADER W. Eine eigenschaff der atome endlicher graphen[J]. J Arch Math,1971,22:333-336.
[13] 潘玉美.简约极小 3 连通图非基本边的分布[J].柳州师专学报,2005,20(3):109-111.

(责任编辑:韦廷宗)