广西科学 Guangxi Sciences 2007，14(1):26～29

一类具连续分布滞量的偏微分方程的振动性

Oscillation for a Class of Partial Differential Equations with Continuous Distribution Delay

彭白玉
PENG Bai-yu

（衡阳师范学院数学系，湖南衡阳 421008）
(Mathematics Department，Hengyang Normal University，Hengyang，Hunan，421008，China)

摘要：讨论一类具有连续分布滞量的二阶非线性偏微分方程在 Robin，Dirichlet 边界条件下解的振动性，利用 Green 定理及微积分技巧，获得该类方程解振动的充分条件.

关键词：微分方程 振动性 连续分布滞量

中图法分类号：O175.29 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-9164(2007)01-0026-04

Abstract：It is discussed that the oscillation of a class of second order nonlinear partial differential equations with continuous distribution delay under Robin and Dirichlet boundary value conditions. The sufficient conditions for the oscillation of solutions of the equation are obtained by using Green's theorem and calculus techniques.

Key words：differential equation，oscillation，continuous distribution delay

近年来，具时滞的偏微分方程以其广泛的应用背景而受到人们的广泛重视[1~6]，但以往的研究的主要工作是针对关于离散分布滞量进行讨论，而对于连续分布滞量的偏微分方程解的振动性的研究还不多[7,8]. 而在许多实际的应用领域，由于现实问题的复杂性，用于描述这些问题的模型常常包含着季节性波动因素等影响，因而无论在数学理论上，还是在应用意义上，都有必要研究更为广泛意义下的方程——具有连续分布滞量的偏微分方程. 本文将讨论如下的具连续分布滞量的二阶非线性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a(t)\Delta u(x,t)+\sum_{k=1}^{s}a_k(t)\Delta u(x,\rho_k(t))-\int_a^b f(x,t,\zeta,u[x,g(t,\zeta)])\mathrm{d}\sigma(\zeta),(x,t)\in\Omega\times R_+\equiv G \quad (1)$$

解的振动性问题，其中 $\Omega\subset R^n$ 是有界域，$\partial\Omega$ 逐片光滑，$R_+=[0,\infty)$，且 $\Delta u(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$.

考虑如下两类边界条件：

条件 1 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}+r(x,t)u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times R_+$；

条件 2 $u(x,t)=0,(x,t)\in\partial\Omega\times R_+$，

其中 N 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量，$r(x,t)\in C(\partial\Omega\times R_+,R_+)$.

本文我们总假设下列条件成立：

假设 1 $a(t),a_k(t),\rho_k(t)\in C(R_+,R_+)$，$\rho_k(t)\leqslant t$，$\rho_k(t)$ 是不减的，且 $\lim\limits_{t\to\infty}\rho_k(t)=\infty,k=1,2,\cdots,s$；

假设 2 $g(t,\zeta)\in C(R_+\times[a,b],R)$，$g(t,\zeta)\leqslant t,\zeta\in[a,b]$，$g(t,\zeta)$ 关于 t,ζ 分别是非减的，并且 $\lim\limits_{t\to\infty}\min\limits_{\zeta\in[a,b]}\{g(t,\zeta)\}=\infty$；$\sigma(\zeta)\in([a,b],R)$ 非减，方程(1)中的积分为 Stieltjes 积分；

假设 3 $f(x,t,\zeta,u)\in C(\Omega\times R_+\times[a,b]\times R_+,R)$，且存在函数 $q(t,\zeta)\in C([t_0,\infty)\times[a,b],R_+)$ 及函数 $F(u)\in C(R,R)$，在 $(0,\infty)$ 上 $F(u)$ 是正的下凸函数且 $F(-u)=-F(u)$，使得 $f(x,t,\zeta,u)\operatorname{sgn}u\geqslant q(t,\zeta)F(u)\operatorname{sgn}u$.

由于方程(1)中的积分是 Stieltjes 积分，因而方程(1)包含了时滞偏微分方程 $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=a(t)\Delta u(x,t)+\sum_{k=1}^{s}a_k(t)\Delta u(x,\rho_k(t))-\sum_{j=1}^{m}q_j(x,$

收稿日期：2006-04-18

作者简介：彭白玉(1965-)，男，讲师，主要从事泛函微分方程振动理论研究。

$t)f_j(u[x,g_j(t)]),(x,t)\in G.$

定义 方程(1),条件 $i(i=1,2)$ 的解 $u(x,t)\in C^2(G)\cap C^1(\overline{G})$ 在 G 内称为振动的,若它具有任意大的零点,即 $\forall\ \mu>0,\exists\ (x_0,t_0)\in\Omega\times[\mu,\infty)$,使得等式 $u(x_0,t_0)=0$ 成立. 否则称 $u(x,t)$ 在 G 内是非振动的.

1 方程(1)在边界条件 1 下的振动性

定理 1 若 $F(u)$ 是不减的,且

$$\int_{t_0}^{\infty}\int_a^b q(t,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}t=\infty, \tag{2}$$

则方程(1) 在边界条件 1 下的所有解在 G 内振动.

证明 假设方程(1) 在边界条件 1 下有一个非振动解 $u(x,t)$,不失一般性,设 $u(x,t)>0,(x,t)\in\Omega\times[t_0,\infty)$,$t_0$ 为某一正常数(对于 $u(x,t)<0$ 的情形,令 $\bar{u}(x,t)=-u(x,t)$,可类似证明),则由假设 1 和假设 2 知,存在 $t_1>t_0$,使得 $g(t,\zeta)\geqslant t_0,(t,\zeta)\in[t_1,\infty)\times[a,b]$,且同时有 $\rho_k(t)\geqslant t_0,t\geqslant t_1$,因此 $u[x,g(t,\zeta)]>0,(x,t,\zeta)\in\Omega\times[t_1,\infty)\times[a,b]$, $u(x,\rho_k(t))>0,(x,t)\in\Omega\times[t_1,\infty),k=1,2,\cdots,s.$

在区域 Ω 上方程(1) 两边对 x 积分有

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left[\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x\right]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x\right]=$$
$$a(t)\int_\Omega\Delta u(x,t)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{s}a_k(t)\int_\Omega\Delta u(x,\rho_k(t))\mathrm{d}x-$$
$$\int_\Omega\int_a^b f(x,t,\zeta,u[x,g(t,\zeta)])\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}x,t\geqslant t_1. \tag{3}$$

由 Green 公式及边界条件 1 可得

$$\int_\Omega\Delta u(x,t)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(x,t)}{\partial N}\mathrm{d}S=-\int_{\partial\Omega}r(x,t)u(x,t)\mathrm{d}S\leqslant 0,t\geqslant t_1, \tag{4}$$

$$\int_\Omega\Delta u(x,\rho_k(t))\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(x,\rho_k(t))}{\partial N}\mathrm{d}S=-\int_{\partial\Omega}r(x,\rho_k(t))u(x,\rho_k(t))\mathrm{d}S\leqslant 0,t\geqslant t_1, \tag{5}$$

其中 $\mathrm{d}S$ 是 $\partial\Omega$ 上的面积元素.

交换积分顺序,由假设 3 及 Jensen 不等式有

$$\int_\Omega\int_a^b f(x,t,\zeta,u[x,g(t,\zeta)])\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}x=$$
$$\int_a^b\int_\Omega f(x,t,\zeta,u[x,g(t,\zeta)])\mathrm{d}x\mathrm{d}\sigma(\zeta)\geqslant$$
$$\int_a^b q(t,\zeta)\left(\int_\Omega F(u[x,g(t,\zeta)])\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\geqslant$$
$$\int_a^b q(t,\zeta)F\left(\left(\int_\Omega\mathrm{d}x\right)^{-1}\int_\Omega u[x,g(t,\zeta)]\mathrm{d}x\right)\left(\int_\Omega\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}\sigma(\zeta),$$
$$t\geqslant t_1. \tag{6}$$

令 $V(t)=\left(\int_\Omega\mathrm{d}x\right)^{-1}\int_\Omega u(x,t)\mathrm{d}x$,显然,$V(t)>0,t\geqslant t_1$,于是由(3) ~ (6) 式有 $V''(t)+V'(t)+\int_a^b q(t,\zeta)F(V[g(t,\zeta)])\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant 0,t\geqslant t_1$,从而有

$$[e^tV'(t)]'+e^t\int_a^b q(t,\zeta)F(V[g(t,\zeta)])\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant 0,\quad t\geqslant t_1. \tag{7}$$

由(7) 式有 $[e^tV'(t)]'\leqslant -e^t\int_a^b q(t,\zeta)F(V[g(t,\zeta)])\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant 0,t\geqslant t_1$. 因此 $e^tV'(t)$ 在 $[t_1,\infty)$ 上单调减少,从而可推得 $V'(t)$ 在 $[t_1,\infty)$ 上单调减少. 事实上,对任意 $t_1\leqslant t_2<t_3$,有 $e^{t_3}V'(t_3)\leqslant e^{t_2}V'(t_2)$,于是 $V'(t_3)\leqslant e^{t_2-t_3}V'(t_2)\leqslant V'(t_2)$. 进而可推得

$$V'(t)\geqslant 0,t\geqslant t_1. \tag{8}$$

事实上,若(8) 式不成立,则必存在 $T\geqslant t_1$,使得 $V'(T)<0$,所以当 $t\geqslant T$ 时,由 $V'(t)$ 单调减少知 $V'(t)\leqslant V'(T)$,从而有

$$V(t)-V(T)\leqslant V'(T)(t-T). \tag{9}$$

在(9) 式中,令 $t\to\infty$,得到 $\lim\limits_{t\to\infty}V(t)=-\infty$,但这与"$V(t)>0$"矛盾,故(8) 式成立.

注意到 $g(t,\zeta)$ 关于 t,ζ 分别是非减的,$F(u)$ 是不减的及(8) 式有

$g(t_1,a)\leqslant g(t,a)\leqslant g(t,\zeta),t\geqslant t_1,\zeta\in[a,b],$

$V[g(t_1,a)]\leqslant V[g(t,\zeta)],t\geqslant t_1,\zeta\in[a,b],$

$F(V[g(t_1,a)])\leqslant F(V[g(t,\zeta)]),t\geqslant t_1,\zeta\in[a,b].$

于是由(7) 式有

$$[e^tV'(t)]'+e^tF(V[g(t_1,a)])\int_a^b q(t,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant 0,t\geqslant t_1. \tag{10}$$

从 t_1 到 $t(t>t_1)$ 积分(10) 式可得

$$e^tV'(t)-e^{t_1}V'(t_1)+e^{t_1}F(V[g(t_1,a)])\int_{t_1}^{t}\int_a^b q(s,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}s\leqslant 0. \tag{11}$$

在(11) 式中,令 $t\to\infty$,并结合 $e^tV'(t)$ 在 $[t_1,\infty)$ 上单调减少及 $[e^tV'(t)]'\geqslant 0$ 可得 $\int_{t_1}^{\infty}\int_a^b q(t,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}t<\infty$,但这与(2) 式矛盾,故定理 1 得证.

定理 2 若 $\dfrac{F(u)}{u}\geqslant\lambda=cons\ t>0,u\neq 0$,且(2) 式成立,则方程(1) 在边界条件 1 的所有解在 G 内振动.

证明 假设方程(1) 在边界条件 1 下有一个非振动解 $u(x,t)$,则存在 $t_1>0$,当 $(x,t)\in\Omega\times[t_1,\infty)$ 时,不妨设 $u(x,t)>0,u(x,\rho_k(t))>0,k=1,2,\cdots,s$,且对于 $(x,t,\zeta)\in\Omega\times[t_1,\infty)\times[a,b]$ 有 $u[x,g(t,\zeta)]>0$(对于 $u(x,t)<0$ 的情形,令 $\bar{u}(x,t)=-u(x,t)$,可类似证明). 于是类似定理 1 的证明可得不等式(7),且当 $t\geqslant t_1$ 时,$[e^tV'(t)]'\geqslant 0$,$e^tV'(t)$ 单调减少,

$V'(t)$ 单调减少及 $V'(t)\geqslant 0$.

注意到对 $F(u)$ 的假设,由(7)式可得

$$[e^tV'(t)]'+\lambda e^t\int_a^b q(t,\zeta)V[g(t,\zeta)]\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant 0,\quad t\geqslant t_1. \tag{12}$$

注意到对 $g(t,\zeta)$ 的假设及 $V'(t)\geqslant 0,t\geqslant t_1$,有

$$g(t_1,a)\leqslant g(t,a)\leqslant g(t,\zeta),t\geqslant t_1,\zeta\in[a,b],$$

$$V[g(t_1,a)]\leqslant V[g(t,\zeta)],t\geqslant t_1,\zeta\in[a,b].$$

于是由(12)式有

$$[e^tV'(t)]'+\lambda e^tV[g(t_1,a)]\int_a^b q(t,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant 0,\quad t\geqslant t_1. \tag{13}$$

从 t_1 到 $t(t>t_1)$ 积分(13)式可得

$$e^tV'(t)-e^{t_1}V'(t_1)+\lambda e^{t_1}V[g(t_1,a)]\int_{t_1}^t\int_a^b q(s,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}s\leqslant 0. \tag{14}$$

在(14)式中,令 $t\to\infty$,并结合 $e^tV'(t)$ 在$[t_1,\infty)$上单调减少及$[e^tV'(t)]'\geqslant 0$ 可得 $\int_{t_1}^{\infty}\int_a^b q(t,\zeta)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}t<\infty$,但这与(2)式矛盾,故定理 2 得证.

2 方程(1)在边界条件 2 下的振动性

为了讨论方程(1)在边界条件 2 下的振动性,我们在 Ω 上考虑 Dirichlet 问题:

$$\begin{cases}\Delta U+\alpha U=0, & x\in\Omega,\\ U=0, & x\in\partial\Omega,\end{cases} \tag{15}$$

其中 α 是常数.

令 α_0 是问题(15)的最小特征值,则据文献[9]知,$\alpha_0>0$,且 $\forall\, x\in\Omega$,其相应的特征函数 $\phi(x)>0$.

定理 3 若定理 1 的条件成立,则方程(1)在边界条件 2 下的所有解在 G 内振动.

证明 假设方程(1)在边界条件 2 下有一个非振动解 $u(x,t)$,则存在 $t_1>0$,当 $(x,t)\in\Omega\times[t_1,\infty)$ 时,不妨设 $u(x,t)>0,u(x,\rho_k(t))>0,k=1,2,\cdots,s$,且对于 $(x,t,\zeta)\in\Omega\times[t_1,\infty)\times[a,b]$ 有 $u[x,g(t,\zeta)]>0$(对于 $u(x,t)<0$ 的情形,令 $\bar{u}(x,t)=-u(x,t)$,可类似证明).

方程(1)两边同乘以 $\phi(x)$ 并在 Ω 上对 x 积分,可得

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big[\int_\Omega u(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x\Big]+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\int_\Omega u(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x\Big]=a(t)\int_\Omega\Delta u(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^s a_k(t)\int_\Omega\Delta u(x,\rho_k(t))\phi(x)\mathrm{d}x-\int_\Omega\int_a^b f(x,t,\zeta,u[x,g(t,\zeta)])\phi(x)\cdot\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}x,t\geqslant t_1. \tag{16}$$

由 Green 公式及边界条件 2 可得

$$\int_\Omega\Delta u(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega u(x,t)\Delta\phi(x)\mathrm{d}x=-\alpha_0\int_\Omega u(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,t\geqslant t_1, \tag{17}$$

$$\int_\Omega\Delta u(x,\rho_k(t))\phi(x)\mathrm{d}x=\int_\Omega u(x,\rho_k(t))\Delta\phi(x)\mathrm{d}x=-\alpha_0\int_\Omega u(x,\rho_k(t))\phi(x)\mathrm{d}x\leqslant 0,t\geqslant t_1. \tag{18}$$

交换积分顺序,由假设 3 及 Jensen 不等式有

$$\int_\Omega\int_a^b f(x,t,\zeta,u[x,g(t,\zeta)])\phi(x)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\mathrm{d}x=\int_a^b\int_\Omega f(x,t,\zeta,u[x,g(t,\zeta)])\phi(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}\sigma(\zeta)\geqslant$$

$$\int_a^b q(t,\zeta)\Big(\int_\Omega F(u[x,g(t,\zeta)])\phi(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}\sigma(\zeta)\geqslant$$

$$\int_a^b q(t,\zeta)F\Big(\Big(\int_\Omega\phi(x)\mathrm{d}x\Big)^{-1}\int_\Omega u[x,g(t,\zeta)]\phi(x)\mathrm{d}x\Big)\cdot\Big(\int_\Omega\phi(x)\mathrm{d}x\Big)\mathrm{d}\sigma(\zeta),t\geqslant t_1. \tag{19}$$

令 $W(t)=\Big(\int_\Omega\phi(x)\mathrm{d}x\Big)^{-1}\int_\Omega u(x,t)\phi(x)\mathrm{d}x$,显然,$W(t)>0,t\geqslant t_1$,于是由(16)~(19)式有

$$W''(t)+W'(t)+\int_a^b q(t,\zeta)F(V[g(t,\zeta)])\mathrm{d}\sigma(\zeta)\leqslant 0,t\geqslant t_1. \tag{20}$$

余下证明与定理 1 证明中的相应部分类似,详证从略.

类似于定理 2 的证明可得如下定理.

定理 4 若定理 2 的条件成立,则方程(1)在边界条件 2 下的所有解在 G 内振动.

例 考虑方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[u(x,t)]+\frac{\partial}{\partial t}[u(x,t)]=\frac{3}{2}\Delta u(x,t)+\Delta u\Big(x,t-\frac{\pi}{2}\Big)-\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}u(x,t+\zeta)\mathrm{d}\zeta,(x,t)\in(0,\pi)\times(0,\infty)\equiv G, \tag{21}$$

及边界条件

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,t\geqslant 0. \tag{22}$$

这里 $a(t)\equiv\frac{3}{2},a_1(t)\equiv 1,q(t,\zeta)\equiv\frac{1}{4},F(u)=u$,$g(t,\zeta)=t+\zeta$.不难验证定理 4 的条件成立,故方程(21)和(22)的所有解在 G 内振动.事实上,$u(x,t)=\sin x\cos t$ 就是这样的一个解.

参考文献:

[1] 何猛省,高述春.双曲时滞偏微分方程解的振动性质[J].科学通报,1992,37(13):1163-1166.

[2] LALLI B S,YU Y H,CUI B T. Oscillation of hyperbolic equations with functional argumenrs [J]. Appl Math Comput,1993,53:97-110.

[3] CHEN W D,YU Y H. Oscillation criteria of solutions for

a class of boundary value problems[J]. J Math Res Exp, 1995,15(1):29-34.

[4] CUI B T. Oscillation properties of the solutions of hyperbolic equations with deviating arguments [J]. Demonstratio Math,1996,29:61-68.

[5] 崔宝同,俞元洪,林诗仲.具有时滞的双曲型微分方程解的振动性[J].应用数学学报,1996,19(1):80-88.

[6] LI YONGKUN,HUANG YONGMING. Oscillation of nonlinear hyperbolic equations with deviating argumengts [J]. J of Yunnan Univ,1997,19(5):429-435.

[7] 王培光,傅希林,俞元洪.一类时滞双曲方程的振动准则[J].数学研究与评论,1998,18(1):105-111.

[8] 王培光,葛渭高.一类非线性偏泛函微分方程的强迫振动性[J].系统科学与数学,2000,20(4):454-461.

[9] VLADIMIROV V S. Equations of mathematical physics [M]. Moscow:Nauka,1981.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第 25 页 Continue from page 25)

存在性问题的探讨,本身是一件很有意义的事.据作者所知,还没有人在这方面做出比较好的工作.对于显含线性部分的扰动系统,本文定理依然适用.结合指数型二分性粗糙理论,我们很容易将此方法推广到系统

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x_t) + \varepsilon g(t,x,\varepsilon)$$

和

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,x_t) + \varepsilon g(t,x,\varepsilon)$$

甚至

$$\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,x_t) + \varepsilon g(t,x_t,\varepsilon)$$

的研究.

致谢:

非常感谢导师杨启贵教授给予的指导和帮助.

参考文献:

[1] FINK A M. Almost periodic differential equations[M]. New York:Springer-Verlag,1974.

[2] HE CHONGYOU. Existence of almost periodic solutions of perturbation systems[J]. Ann of Diff Eqs,1992,9(2):173-181.

[3] XIA YONGHUI,LIN MUREN,CAO JINDE. The existence of almost periodic solutions of certain perturbation systems[J]. J Math Anal Appl,2005,310:81-96.

[4] 林振声.概周期微分方程和积分流形[M].上海:上海科技出版社,1987.

[5] 何崇佑.概周期微分方程[M].北京:高等教育出版社,1992.

[6] 郑祖庥.泛函微分方程[M].合肥:安徽教育出版社,1994.

[7] 冯春华.微分方程概周期解的研究[D].北京:北京理工大学,1999.

[8] 冯春华.时滞 Duffing 方程的概周期解[J].广西科学,2002,9(3):169-170,173.

[9] 冯春华,刘永建,葛渭高.时滞 Lotka-Volterra 竞争型系统的概周期解[J].应用数学学报,2005,28(3):458-465.

[10] COPPEL W A. Dichotomies in stability theory[M]. New-York:Springer-Verlag,1978.

(责任编辑:韦廷宗)