广西科学 Guangxi Sciences 2007，14(1)：30～32

一类二阶三点边值问题无穷多个正解的存在性*

Existence of Multiple Positive Solutions of a Kind of Second-order Three-point Boundary Value Problem

汪灵枝，姚晓洁，秦发金
WANG Ling-zhi，YAO Xiao-jie，QIN Fa-jin

（柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系，广西柳州　545004）
（Department of Mathematics and Computer Science，Liuzhou Teachers College，Liuzhou，Guangxi，545004，China）

摘要：利用 Krasnosel'skii 锥拉伸与锥压缩不动点定理，研究一类二阶三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+\lambda a(t)f(t,u(t))=0,0<t<1, \\ u'(0)=0,u(1)+\alpha u'(\eta)=0 \end{cases}$$

的正解存在性问题，得到其无穷多个正解存在性的充分条件，改进和推广了文献[1]的相关结论.

关键词：微分方程　边值问题　正解　存在性
中图法分类号：O175.8　**文献标识码**：A　**文章编号**：1005-9164(2007)01-0030-03

Abstract：Using Krasnosl'skii fixed point theorem of cone expansion-compres type to investigate the existence of multiple positive solutions for a kind of second-order three-point boundary value problem $\begin{cases} u''(t)+\lambda a(t)f(t,u(t))=0,0<t<1, \\ u'(0)=0,u(1)+\alpha u'(\eta)=0 \end{cases}$. The result of the reference[1] is improved and extended.

Key words：differential systems，boundary value problem，positive solutions，existence

非线性常微分方程的边值问题是微分方程领域中的一个重要研究课题，在非线性扩散、气体动力学、流体力学等学科中有重要应用. 在边值问题解的研究中，关于一解、二解或三解的存在性的研究较多，而关于无穷多解存在性的研究较少. 最近，文献[1]研究了一类二阶三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+a(t)f(u(t))=0,0<t<1, \\ u'(0)=0,u(1)+\alpha u'(\eta)=0 \end{cases} \tag{1}$$

的两个正解存在性问题，文献[2]讨论一类三阶三点边值问题

$$\begin{cases} u'''(t)-\lambda a(t)f(u(t))=0,0<t<1, \\ u(0)=u'(\eta)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性问题，并利用 Krasnosel'skii 锥拉伸与锥压缩不动点定理，在要求 f 是单调递增的条件下，得到方程(2)具有无穷多个正解的充分条件. 借用文献[2～6]的思想方法，本文研究一类二阶三点边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+\lambda a(t)f(t,u(t))=0,0<t<1, \\ u'(0)=0,u(1)+\alpha u'(\eta)=0 \end{cases} \tag{3}$$

的正解存在性，其中 $0<\eta<1$，$\alpha>0$ 为常数，$a:[0,1]\to[0,\infty)$ 连续且存在 $t_0\in(0,1)$，使得 $a(t_0)>0$；$f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续. 利用 Krasnosel' skii 锥拉伸与锥压缩不动点定理，在不要求 f 是单调递增的条件下，得到其无穷多个正解存在性的充分条件，改进和推广文献[1]的相关结论.

引理 1[1]　设 $0<\eta<1$，$\alpha\in R$，则对 $y\in C[0,1]$，边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+y(t)=0,0<t<1, \\ u'(0)=0,u(1)+\alpha u'(\eta)=0 \end{cases} \tag{4}$$

有唯一解：

$$u(t)=\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s+\alpha\int_0^\eta y(s)\mathrm{d}s-\int_0^t(t-s)y(s)\mathrm{d}s,$$

且当 $\alpha>0$，$y\geqslant 0$ 时，$u(t)$ 在 $[0,1]$ 上非负. 进一步，若存在 $t_0\in(0,\eta)$ 使 $y(t_0)>0$，则 $u(t)$ 在 $[0,1]$ 上为正.

收稿日期：2006-06-28
作者简介：汪灵枝(1974-)，男，讲师，主要从事生物数学和智能算法研究。
*广西教育厅项目(200508234)资助。

引理 2[1] 设 $\alpha>0$ 且 $y\in C[0,1]$，$y\geqslant 0$，则边值问题(4)的唯一解 $u(t)$ 满足 $\min\limits_{t\in[0,\eta]}u(t)\geqslant\gamma\|u\|$，其中 $\gamma=\min\left\{\frac{1-\eta}{1+\alpha-\eta},1-\eta\right\}$.

定义 $K=\{u\in C[0,1]:u(t)\geqslant 0,\min\limits_{t\in[0,\eta]}u(t)\geqslant\gamma\|u\|\}$，易知 K 是 $C[0,1]$ 中的正锥. 定义算子 T: $C[0,1]\to C[0,1]$ 如下

$$Tu(t)=\lambda\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\lambda\alpha\int_0^\eta a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s-\lambda\int_0^t(t-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s. \tag{5}$$

仿文献[1]的证明易得如下引理 3.

引理 3 $T:K\to K$ 是全连续算子.

易知 $u\in C[0,1]$ 是边值问题(3)的解，当且仅当 $u\in C[0,1]$ 是 T 的不动点.

我们的主要研究工具是如下锥上不动点定理.

引理 4[7] (Krasnosel'skii 不动点定理) 设 E 是一 Banach 空间，K 为 E 中的一个锥，又设 Ω_1,Ω_2 为 E 中的两个开子集，$0\in\Omega_1\subset\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$，算子 $A:K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)\to K$ 全连续，且使得下列条件之一成立：

(i) $\|Au\|\leqslant\|u\|,\forall u\in K\cap\partial\Omega_1$；$\|Au\|\geqslant\|u\|,\forall u\in K\cap\partial\Omega_2$，

(ii) $\|Au\|\geqslant\|u\|,\forall u\in K\cap\partial\Omega_1$；$\|Au\|\leqslant\|u\|,\forall u\in K\cap\partial\Omega_2$，

则 A 在 $K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 中至少有一个不动点.

记

$A=[\frac{1+\alpha-\eta}{1-\eta}\int_0^1(1-s)a(s)ds]^{-1}$，$B=[(1+\alpha-\eta)\int_0^\eta a(s)ds]^{-1}$，

$\varphi(l)=\max\{f(t,s):0\leqslant t\leqslant 1,0\leqslant s\leqslant l\}$，$\Psi(l)=\min\{f(t,s):0\leqslant t\leqslant\eta,\gamma l\leqslant s\leqslant l\}$，

$\underline{\varphi_0}=\varliminf\limits_{l\to 0}\frac{\varphi(l)}{l}$，$\underline{\varphi_\infty}=\varliminf\limits_{l\to\infty}\frac{\varphi(l)}{l}$，$\overline{\Psi_0}=\varlimsup\limits_{l\to 0}\frac{\Psi(l)}{l}$，$\overline{\Psi_\infty}=\varlimsup\limits_{l\to\infty}\frac{\Psi(l)}{l}$，

$\underline{f_0}=\varliminf\limits_{l\to 0}\min\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,l)}{l}$，$\overline{f_0}=\varlimsup\limits_{l\to 0}\max\limits_{t\in[0,1]}\frac{f(t,l)}{l}$，$\underline{f_\infty}=\varliminf\limits_{l\to\infty}\min\limits_{t\in[0,\eta]}\frac{f(t,l)}{l}$，$\overline{f_\infty}=\varlimsup\limits_{l\to\infty}\max\limits_{t\in[0,\eta]}\frac{f(t,l)}{l}$.

定理 1 如果 $B\underline{\varphi_0}<A\overline{\Psi_0}$，若 $\lambda\in\left(\frac{B}{\overline{\Psi_0}},\frac{A}{\underline{\varphi_0}}\right)$（特别地，$\overline{\Psi_0}=\infty,\underline{\varphi_0}=0$），则边值问题(3)存在无穷多个正解 $\{u_k\}_{k=1}^\infty$ 且 $\|u_k\|\to 0(k\to\infty)$.

证明 由 $\lambda\in\left(\frac{B}{\overline{\Psi_0}},\frac{A}{\underline{\varphi_0}}\right)$ 知，$\underline{\varphi_0}<\frac{A}{\lambda}$ 且 $\overline{\Psi_0}>\frac{B}{\lambda}$，因此存在正数列 $\{a_k\}$，$\{b_k\}$ 且 $a_k\to 0$，$b_k\to 0(k\to\infty)$ 使得

$$\varphi(a_k)<\frac{Aa_k}{\lambda},\Psi(b_k)>\frac{Bb_k}{\lambda},k=1,2,\cdots$$

不失一般性，设 $a_1>b_1>a_2>b_2>\cdots>a_k>b_k>\cdots$，对任意 k，记 $\Omega_{1k}=\{u\in K:\|u\|<b_k\}$，$\Omega_{2k}=\{u\in K:\|u\|<a_k\}$.

令 $u\in\partial\Omega_{2k}$，则 $\|u\|=a_k$，故 $0\leqslant u(s)\leqslant a_k,s\in[0,1]$. 所以有

$$f(s,u(s))\leqslant\varphi(a_k)\leqslant\frac{Aa_k}{\lambda},s\in[0,1]. \tag{6}$$

由(5)式、(6)式得

$$\|Tu\|=\max_{t\in[0,1]}\{\lambda\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\lambda\alpha\int_0^\eta a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s-\lambda\int_0^t(t-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\}\leqslant\lambda\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\lambda\alpha\int_0^\eta a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s=\lambda\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\lambda\frac{\alpha}{1-\eta}\int_0^\eta(1-\eta)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\lambda\frac{\alpha}{1-\eta}\int_0^\eta(1-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\lambda\frac{\alpha}{1-\eta}\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s=\lambda\frac{1+\alpha-\eta}{1-\eta}\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\leqslant\lambda\frac{1+\alpha-\eta}{1-\eta}\int_0^1(1-s)a(s)\frac{Aa_k}{\lambda}\mathrm{d}s=a_k,$$

因此

$$\|Tu\|\leqslant\|u\|,\forall u\in K\cap\partial\Omega_{2k}. \tag{7}$$

如果 $\forall u\in K\cap\partial\Omega_{1k}$，那么 $\|u\|=b_k$ 且 $\min\limits_{s\in[0,\eta]}u(s)\geqslant\gamma b_k$，故 $\gamma b_k\leqslant u(s)\leqslant b_k,0\leqslant s\leqslant\eta$. 所以有

$$f(s,u(s))\geqslant\Psi(b_k)\geqslant\frac{Bb_k}{\lambda},0\leqslant s\leqslant\eta. \tag{8}$$

于是由(5)式得

$$Tu(\eta)=\lambda\int_0^1(1-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\lambda\alpha\int_0^\eta a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s-\lambda\int_0^\eta(\eta-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s=\lambda\int_\eta^1(1-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+\lambda\int_0^\eta[(1-s)+\alpha-(\eta-s)]a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s=\lambda\int_\eta^1(1-s)a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s+(1+\alpha-\eta)\lambda\int_0^\eta a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant(1+\alpha-\eta)\lambda\int_0^\eta a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s, \tag{9}$$

由(8)式和(9)式得

$$Tu(\eta)\geqslant(1+\alpha-\eta)\lambda\int_0^\eta a(s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\geqslant(1+\alpha-\eta)\lambda\int_0^\eta a(s)\frac{Bb_k}{\lambda}\mathrm{d}s=b_k,$$

因此

$$\| Tu \| \geqslant Tu(\eta) \geqslant \| u \|, \forall\, u \in K \cap \partial\Omega_{1k}. \tag{10}$$

结合(7)式和(10)式,根据引理4知,T有不动点$u_k \in K \cap (\overline{\Omega}_{2k} \backslash \Omega_{1k})$,故$b_k \leqslant \| u_k \| \leqslant a_k$.由$a_k \to 0, b_k \to 0(k \to \infty)$得$\| u_k \| \to 0(k \to \infty)$.

由定理1可得以下两个推论.

推论1 假设存在$l_0 > 0$,使得$\inf\limits_{0 \leqslant l \leqslant l_0} \min\limits_{t \in [0,1]} \dfrac{f(t,l)}{\varphi(l)} \geqslant \eta_1 > 0$, $\sup\limits_{0 \leqslant l \leqslant l_0} \max\limits_{t \in [0,1]} \dfrac{f(t,\gamma l)}{\Psi(l)} \leqslant \eta_2 < \infty$,若$\eta_2 B \underline{f_0} < \gamma \eta_1 A \overline{f_0}$,则对每个$\lambda \in \left(\dfrac{\eta_2 B}{\gamma \overline{f_0}}, \dfrac{\eta_1 A}{\underline{f_0}} \right)$(特别地,如果$\underline{f_0} = 0, \overline{f_0} = \infty$,有$0 < \lambda < \infty$),边值问题(3)存在无穷多个正解$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$且$\| u_k \| \to 0(k \to \infty)$.

证明 由题设,注意到$l \in [0, l_0]$时,有

$$\varphi(l) \leqslant \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t,l)}{\eta_1}, \Psi(l) \geqslant \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t,\gamma l)}{\eta_2},$$

从而

$$\underline{\varphi_0} = \varliminf_{l \to 0} \frac{\varphi(l)}{l} \leqslant \frac{1}{\eta_1} \varliminf_{l \to 0} \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t,l)}{l} = \frac{1}{\eta_1} \underline{f_0} \leqslant \frac{1}{\eta_1} \times \frac{\eta_1 A}{\lambda} = \frac{A}{\lambda},$$

$$\overline{\Psi_0} = \varlimsup_{l \to 0} \frac{\Psi(l)}{l} \geqslant \frac{1}{\eta_2} \varlimsup_{l \to 0} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t,\gamma l)}{\eta_2} = \frac{\gamma}{\eta_2} \varlimsup_{l \to 0} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t,\gamma l)}{\gamma l} = \frac{\gamma}{\eta_2} \overline{f_0} > \frac{\gamma}{\eta_2} \times \frac{\eta_2 B}{\gamma \lambda} = \frac{B}{\lambda}.$$

根据定理1可知,边值问题(3)存在无穷多个正解$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$且$\| u_k \| \to 0(k \to \infty)$.

推论2 假设存在$l_0 > 0$,若$f(t,l)$关于l在$[0, l_0]$上单调递增,若$B \underline{f_0} < \gamma A \overline{f_0}$,则对每个$\lambda \in \left(\dfrac{B}{\gamma \overline{f_0}}, \dfrac{A}{\underline{f_0}} \right)$(特别地,如果$\underline{f_0} = 0, \overline{f_0} = \infty$,有$0 < \lambda < \infty$),边值问题(3)存在无穷多个正解$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$且$\| u_k \| \to 0(k \to \infty)$.

证明 由$f(t,l)$关于l在$[0, l_0]$上单调递增,则有

$$\varphi(l) = f(t,l), \Psi(l) = f(t,\gamma l), 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

从而有

$$\eta_1 = \inf_{0 \leqslant l \leqslant l_0} \min_{t \in [0,1]} \frac{f(t,l)}{\varphi(l)} = 1, \eta_2 = \sup_{0 \leqslant l \leqslant l_0} \max_{t \in [0,1]} \frac{f(t,\gamma l)}{\varphi(l)} = 1.$$

故根据推论1可知,边值问题(3)存在无穷多个正解$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$且$\| u_k \| \to 0(k \to \infty)$.

类似上面的证明,可得下面的结论成立.

定理2 如果$B \underline{\varphi_\infty} < A \overline{\Psi_\infty}$,则对每个$\lambda \in \left(\dfrac{B}{\overline{\Psi_\infty}}, \dfrac{A}{\underline{\varphi_\infty}} \right)$(特别地,$\overline{\Psi_\infty} = \infty, \underline{\varphi_\infty} = 0$),则边值问题(3)存在无穷多个正解$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$且$\| u_k \| \to \infty(k \to \infty)$.

推论3 假设存在$l_0 > 0$,使得$\inf\limits_{l_0 \leqslant l < \infty} \min\limits_{t \in [0,\eta]} \dfrac{f(t,l)}{\varphi(l)} \geqslant \eta_1 > 0$, $\sup\limits_{l_0 \leqslant l < \infty} \max\limits_{t \in [0,\eta]} \dfrac{f(t,\gamma l)}{\Psi(l)} \leqslant \eta_2 < \infty$,若$\eta_2 B \underline{f_\infty} < \gamma \eta_1 A \overline{f_\infty}$,则对每个$\lambda \in \left(\dfrac{\eta_2 B}{\gamma \overline{f_\infty}}, \dfrac{\eta_1 A}{\underline{f_\infty}} \right)$(特别地,如果$\underline{f_\infty} = 0, \overline{f_\infty} = \infty$,有$0 < \lambda < \infty$)),边值问题(3)存在无穷多个正解$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$且$\| u_k \| \to \infty(k \to \infty)$.

推论4 假设存在$l_0 > 0$,若$f(t,l)$关于l在$[l_0, \infty)$上单调递增,若$B \underline{f_\infty} < \gamma A \overline{f_\infty}$,则对每个$\lambda \in \left(\dfrac{B}{\gamma \overline{f_\infty}}, \dfrac{A}{\underline{f_\infty}} \right)$(特别地,如果$\underline{f_\infty} = 0, \overline{f_\infty} = \infty$,有$0 < \lambda < \infty$),边值问题(3)存在无穷多个正解$\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$且$\| u_k \| \to \infty(k \to \infty)$.

参考文献:

[1] 李淑红,孙永平.一类二阶三点边值问题多重正解的存在性[J].浙江工业大学学报,2006,34(1):114-118.

[2] 孙永平,张新光.三阶三点边值问题无穷多个正解的存在性[J].工程数学学报,2004,21(4):661-664.

[3] 姚庆六.广义Gelfand模型的正解[J].高校应用数学学报:A辑,2001,16:407-413.

[4] 王大斌.测度链上非线性微分方程特征值问题的多解性[J].兰州理工大学学报,2005,31(3):131-133.

[5] 姚庆六.一类半线性椭圆边值问题的正对径解的存在性与多解性[J].应用泛函分析学报,2000,4(2):371-376.

[6] 姚庆六.一类半线性椭圆方程在环域上的正对径解的存在性与多解性[J].数学年刊,2001,22A(5):633-638.

[7] 郭大均.非线性泛函分析[M].济南:山东科学技术出版社,1987.

(责任编辑:邓大玉)