广西科学 Guangxi Sciences 2007，14(1):33～34,43

关于不同分布 $\tilde{\varphi}$ 混合序列的加权和的强稳定性*

On the Strong Stability of Weighted Product Sums of $\tilde{\varphi}$-Mixing Random Sequences in Different Distribution

崔昊英，吴群英，黄海午

CUI Hao-ying，WU Qun-ying，HUANG Hai-wu

(桂林工学院数理系，广西桂林　541004)

(Department of Mathematics and Physics，Guilin Institute of Technology，Guilin，Guangxi，541004，China)

摘要：在文献[3]的基础上讨论一类较为广泛的 $\tilde{\varphi}$ 混合序列的一般加权和的强稳定性，推广了独立情形的 Jamsion 定理及相关定理.

关键词：$\tilde{\varphi}$ 混合序列　加权和　强稳定性　矩条件

中图法分类号：O211.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2007)01-0033-02

Abstract：It is discussed that the strong stability of $\tilde{\varphi}$ type weighted product sums of $\tilde{\varphi}$-mixing random sequences on the base of the result of the reference [3]. Jamsion theorem in independent situation is further developed and improved.

Key words：$\tilde{\varphi}$-mixing random sequences，weighted product sum，strong stability，moment condition

1　定义和引理

设 $\{X_i, i \in \mathrm{N}\}$ 是概率空间 (Ω, β, P) 上的随机变量序列，$F_S = \sigma(X_i, i \in S \subset \mathrm{N})$ 为 σ- 域，在 β 中给定 σ- 域 F, R，令 $\varphi(F,R) = \sup\{|P(B|A) - P(B)|; A \in F, P(A) > 0, B \in R\}$，引入如下的相依系数：对 $k \geqslant 0$，令

$\tilde{\varphi}(k) = \sup\{\varphi(F_s, F_T)$，有限子集 $S, T \subset \mathrm{N}$，且 $\mathrm{dist}(S,T) \geqslant k\}$，　　(*)

其中，$\mathrm{dist}(S,T)$ 表示集合 S,T 的距离. 显然，$0 \leqslant \tilde{\varphi}(k+1) \leqslant \tilde{\varphi}(k) \leqslant 1$，且 $\tilde{\varphi}(0) = 1$.

定义　对随机序列 $\{X_i, i \in \mathrm{N}\}$ 如存在 $k \in \mathrm{N}$，使 $\tilde{\varphi}(k) < 1$，则称 $\{X_i, i \in \mathrm{N}\}$ 是 $\tilde{\varphi}$ 混合序列.

注：在极限性质的讨论中，对 $\tilde{\varphi}$ 混合序列 $\{X_i, i \in \mathrm{N}\}$，即存在 $k_0 \in \mathrm{N}$，使 $\tilde{\varphi}(k_0) < 1$，如 $k_0 > 1$，可考虑 $\{X_i\}$ 的 k_0 个子列 $\{X_{k_0 i+j}, i \in \mathrm{N}\}$，$j = 0,1,2,\cdots,k_0 - 1$，而每一个子列的 $\tilde{\varphi}(1)$，即为原序列的 $\tilde{\varphi}(k_0)$，因此，对 $\tilde{\varphi}$ 混合序列，可不失一般性假设 $\tilde{\varphi}(1) < 1$.

$\tilde{\varphi}$ 混合与通常的 φ 混合有一定的类似，但并不相同，它们互不包含. 事实上，在通常的 φ 混合系数 $\varphi(k)$ 中，(*)式的 S,T 分别是 $[1,n]$ 和 $[n+k,\infty)$ 中的子集；另外，$\tilde{\varphi}$ 混合只要求存在某 $k \in \mathrm{N}$，使 $\tilde{\varphi}(k) < 1$，在这一点上要比 φ 混合的要求 $\varphi(n) \to 0, n \to \infty$ 弱得多，因此，$\tilde{\varphi}$ 混合是一类极为广泛的相依混合序列，对其进行研究是很有价值的. 文献[1]讨论了 $\tilde{\varphi}$ 混合序列的广义 Jamison 型加权和的强收敛性，得到了与独立情形一样的 Jamison 定理，并推广了 Jamison 定理，而文献[2]讨论了 $\tilde{\varphi}$ 混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性. 本文在文献[3]的基础上讨论一类较为广泛的 $\tilde{\varphi}$ 混合序列的一般加权和的稳定性，推广独立情形的相关定理.

本文一律以 C 记与 n 无关的正常数，“<<“表示通常的“O”，$S_j \triangleq \sum_{i=1}^{j} X_i, S_j(k) \triangleq \sum_{i=k}^{j+k} X_i$.

引理[3] 设 $\{X_i, i \in \mathrm{N}\}$ 是 $\tilde{\varphi}$ 混合序列，满足 $EX_i = 0, EX_i^2 < \infty$，则存在仅依赖于 $\tilde{\varphi}$ 的常 C，使对 $\forall\ k, n \geqslant 1$，有 $ES_n^2(k) \leqslant C \sum_{i=k}^{n+k} EX_i^2$.

收稿日期：2006-06-05

作者简介：崔昊英(1980-)，男，硕士研究生，主要从事极限理论研究。

* 广西高校百名中青年学科带头人资助项目(桂教人[2005]64 号)资助。

2 定理及其证明

定理 设正数列$\{\omega_i, i \geqslant 1\}$,$W_n = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \omega_i, n > 1$以及$\tilde{\varphi}$混合序列$\{X_i, i \geqslant 1\}$满足条件:

$$W_n \uparrow \infty, \omega_n W_n^{-1} \to 0, n \to \infty, \tag{1}$$

$$\sup_{i\geqslant 1} E|X_i - EX_i| < \infty, \tag{2}$$

$$W_n^{-1} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \omega_i E|X_i - EX_i| I_{(|X_i - EX_i| \geqslant b_i)} \to 0, n \to \infty, \tag{3}$$

$$\sum_{i\geqslant 1} P(|X_i - EX_i| \geqslant b_i) < \infty, \tag{4}$$

$$\sum_{i\geqslant 1} b_i^{-2} \mathrm{var}(X_i - EX_i) I_{(|X_i - EX_i| < b_i)} < \infty, \tag{5}$$

则$T_n = W_n^{-1} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \omega_i (X_i - EX_i) \to 0, n \to \infty$, a. s. 其中$b_i = \omega_i^{-1} W_i, i \geqslant 1$.

证明 不妨设$EX_i = 0, i \geqslant 1$,记$X_i^+ = X_i I_{(X_i \geqslant 0)}, X_i^- = -X_i I_{(X_i \leqslant 0)}, i \geqslant 1. T_n^\pm = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \omega_i X_i^\pm$, $n \geqslant 1$.

因为$EX_i = 0$,所以$ET_n = ET_n^+ - ET_n^- = E\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \omega_i X_i^+ - E\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \omega_i X_i^- = E\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \omega_i (X_i^+ - X_i^-) = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} E\omega_i X_i = 0$.

故要证明$T_n \to 0$只需证明

$$W_n^{-1}(T_n^\pm - ET_n^\pm) \to 0, n \to \infty, \text{a. s.} \tag{6}$$

再记$X_i^{\pm *} = X_i^{\pm *} I_{(X_i^\pm < b_i)}, T_n^{\pm *} = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \omega_i X_i^{\pm *}$, $i \geqslant 1, n \geqslant 1$.

由$W_n^{-1}(T_n^\pm - ET_n^\pm) = W^{-1}((T_n^\pm - T_n^{\pm *}) + (T_n^{\pm *} - ET_n^{\pm *}) - E(T_n^\pm - T_n^{\pm *})) \triangleq T_{n1} + T_{n2} + T_{n3}$,

又因为$\sum_{i=1}^{\infty} P(X_i^\pm \neq W_i^{\pm *}) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X_i^\pm > b_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P(|X_i| > b_i) < \infty$,所以$X_i^\pm - X_i^{\pm *} \to 0$, a. s.

故由 Toeplitz 引理得$T_{n1} \to 0$, a. s. $n \to \infty$.

又由(3)式有$|T_{n3}| = W_n^{-1} E(T_n^\pm - T_n^{\pm *}) = W_n^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i E|X_i^\pm| I_{X_i^\pm > b_i} \leqslant W^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i E|X_i| I_{(|X_i| > b_i)} \to 0$,所以

$$W_n^{-1}(T_n^\pm - ET_n^\pm) \to 0, \text{a. s.} \Leftrightarrow W_n^{-1}(T_n^{\pm *} - ET_n^{\pm *}) \to 0, \text{a. s.} \tag{7}$$

为此,对任$a > 1$,设$n_k = \inf\{n, W_n \geqslant a^k\}, k \geqslant 1$.下面先证明

$$W_{n_k}^{-1}[T_{n_k}^{\pm *} - ET_{n_k}^{\pm *}] \to 0, n \to \infty, \text{a. s.} \tag{8}$$

由 Kronecker 引理,$\forall \varepsilon > 0$,只要证出$\sum_{i=1}^{\infty} P(W_{n_k}^{-1} |T_{n_k}^{\pm *} - ET_{n_k}^{\pm *}| \geqslant \varepsilon) < \infty$即可证得(8)式.

由$\omega_n W_n^{-1} \to 0$可得$\frac{\omega_n}{W_n} = \frac{W_n - W_{n-1}}{W_n} = 1 - \frac{W_{n-1}}{W_n} \to 0$,所以$\frac{W_{n-1}}{W_n} \to 1$.因此,取$1 < r < a$,则$\exists N$,当$n > N$时:$\frac{W_n}{W_{n-1}} < r \Rightarrow W_n < rW_{n-1} < \cdots < r^{n-N} W_N = C(\frac{r}{a})^n \cdot a^n$,所以$W_n = o(a^n)$,所以当$n$充分大时,$[a^k, a^{k+1}]$一定有$W_n$的点,故有$W_{n_k} < a^{k+1}$.结合$n_k$的定义有$a^{k-1} < W_{n_k - 1} < a^k \leqslant W_{n_k} < a^{k+1}$.

由马尔可夫不等式,引理以及$\sum_{k=i}^{\infty} a^{-2k} << a^{-2i}$得

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(W_{n_k}^{-1} |T_{n_k}^{\pm *} - ET_{n_k}^{\pm *}| \geqslant \varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_{n_k}^{-2} E(T_{n_k}^{\pm *} - ET_{n_k}^{\pm *})^2}{\varepsilon^2} << \sum_{k=1}^{\infty} W_{n_k}^{-2} E(\sum_{i=1}^{n_k} (\omega_i X_i^{\pm *} - \omega_i EX_i^{\pm *}))^2 << \sum_{k=1}^{\infty} W_{n_k}^{-2} \sum_{i=1}^{n_k} E(\omega_i X_i^{\pm *} - E(\omega_i X_i^{\pm *}))^2 = \sum_{k=1}^{\infty} W_{n_k}^{-2} \cdot \sum_{i=1}^{n_k} E\omega_i^2 (X_i^{\pm *} - EX_i^{\pm *})^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} W_{n_k}^{-2} \sum_{i=1}^{n_k} E\omega_i^2 (X_i^{\pm *})^2 = \sum_{k=1}^{\infty} W_{n_k}^{-2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} E\omega_j^2 (X_j^{\pm *})^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=i}^{\infty} a^{-2k} \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} E\omega_j^2 (X_j^{\pm *})^2 << \sum_{i=1}^{\infty} a^{-2(i+1)} \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} \omega_j^2 E(X_j^{\pm *})^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} W_j^{-2} \omega_j^2 E(X_j^{\pm *})^2 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{-2} E(X_i^2 I_{(X_i^\pm < b_i)} + b_i^2 I_{(X_i^\pm \geqslant b_i)}) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} b_i^{-2} EX_i^2 I_{(|X_i| < b_i)} + \sum_{i=1}^{\infty} P(|X_i| \geqslant b_i),$$

由(4)式知$\sum_{i=1}^{\infty} P(|X_i| \geqslant b_i) < \infty$,由(5)式知$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^{-2} EX_i^2 I_{(|X_i| < b_i)} < \infty$,所以

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(W_{n_k}^{-1} |T_{n_k}^{\pm *} - ET_{n_k}^{\pm *}| \geqslant \varepsilon) < \infty,$$

即(8)式成立.

由$X_i^{\pm *}, i \geqslant 1$的非负性及(8)式可知:$\forall n, \exists k$,使$n_{k-1} \leqslant n < n_k$,所以

(下转第 43 页 Continue on page 43)

大学出版社,1990.

[2] 徐泽水.判断矩阵一致性修正的新方法[J].系统工程理论与实践,2000,20(4):86-89.

[3] 刘万里,雷治军.关于AHP中判断矩阵校正方法的研究[J].系统工程理论与实践,1997,17(6):30-39.

[4] 王雪华,秦学志,杨德礼.AHP中判断矩阵一致性修正的模式识别法[J].系统工程理论与实践,1997,17(11):56-59.

[5] 魏翠萍,章志敏.一种改进判断矩阵一致性的算法[J].系统工程理论与实践,2000,20(8):62-66.

[6] 李梅霞.AHP中判断矩阵一致性改进的一种新方法[J].系统工程理论与实践,2000,20(2):122-125.

[7] 徐泽水.判断矩阵一致性改进的一种实用方法[J].系统工程,1998,16(6):61-63.

[8] 张群会,龙熙华.AHP中判断矩阵一致性改进的迭代算法[J].数学的实践与认识,2001,31(5):565-568.

[9] 骆正清.AHP中不一致性判断矩阵调整的新方法[J].系统工程理论与实践,2004,24(6):84-92.

[10] J I PELAEZ, M T LAMATA. A new measure of congsistency for positive reciprocal matrices [J]. Computers and mathematics with applications, 2003 (46):1840-1845.

[11] 吕跃进.标度系统一致性矩阵容量的计算方法[J].数学的实践与认识,2003,33(9):102-107.

(责任编辑:邓大玉)

(上接第34页 Continue from page 34)

$$\frac{T_{n_{k-1}}^{\pm *}-ET_{n_k}^{\pm *}}{W_{n_k}} \leqslant \frac{T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}}{W_n} \leqslant \frac{T_{n_k}^{\pm *}-ET_{n_{k-1}}^{\pm *}}{W_{n_{k-1}}}, \frac{T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n_k}}{W_{n_{k-1}}} \frac{T_{n_k}^{\pm *}-ET_{n_k}^{\pm *}}{W_{n_k}} + \frac{E\left|\sum_{j=n_{k-1}}^{n_k} \omega_j X_j^{\pm *}\right|}{W_{n_{k-1}}} \leqslant a^2 \frac{T_{n_k}^{\pm *}-ET_{n_k}^{\pm *}}{W_{n_k}} + \sup_i E|X_i|(a^2-1) \Rightarrow \varlimsup_{n\to\infty} W_n^{-1}(T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}) \leqslant \sup_i E|X_i|(a^2-1), \text{a. s.}$$

又

$$\frac{T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}}{W_n} \geqslant \left(T_{n_{k-1}}^{\pm *}-ET_{n_{k-1}}^{\pm *}-\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} E\omega_i X_i^{\pm *}\right)/W_{n_k} = \frac{T_{n_{k-1}}^{\pm *}-ET_{n_{k-1}}^{\pm *}}{W_{n_{k-1}}} \frac{W_{n_{k-1}}}{W_{n_k}} - \frac{\sup_i E|X_i|(W_{n_k}-W_{n_{k-1}})}{W_{n_k}} \geqslant \frac{1}{a^2} \frac{T_{n_{k-1}}^{\pm *}-ET_{n_{k-1}}^{\pm *}}{W_{n_{k-1}}} + \sup_i E|X_i|\left(-1+\frac{W_{n_{k-1}}}{W_{n_k}}\right) \geqslant \frac{1}{a^2} \frac{T_{n_{k-1}}^{\pm *}-ET_{n_{k-1}}^{\pm *}}{W_{n_{k-1}}} + \sup_i E|X_i|\left(-1+\frac{1}{a^2}\right),$$

所以

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}}{W_n} \geqslant \sup_i E|X_i|\left(-1+\frac{1}{a^2}\right), \text{a. s.}$$

综合即得

$$\sup_i E|X_i|\left(-1+\frac{1}{a^2}\right) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \frac{T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}}{W_n} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}}{W_n} \leqslant \sup_i E|X_i|(a^2-1), \text{a. s.}$$

令 $a\to 1$,可得 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{T_n^{\pm *}-ET_n^{\pm *}}{W_n}=0$, a. s. 再由(7)式得(6)式.定理得证.

参考文献:

[1] 伍艳春.$\tilde{\varphi}$混合序列的广义Jamison型加权和的强收敛性[J].广西科学,2004,11(1):10-12.

[2] 唐国强,伍艳春.$\tilde{\varphi}$混合序列加权和的完全收敛性和强收敛性[J].桂林工学院学报,2004,24(1):100-102.

[3] 吴群英,林亮.$\tilde{\varphi}$混合序列的完全收敛性和强收敛性[J].工程数学学报,2004,21(1):75-80.

(责任编辑:韦廷宗)