广西科学 Guangxi Sciences 2007，14(1)：35～38

常数利率双二项风险模型的破产问题*

Bankruptcy Problems in the Double Binomial Risk Model with Constant Interest Force

唐国强[1,2]

TANG Guo-qiang[1,2]

(1.华东师范大学统计系，上海 200062；2.桂林工学院数理系，广西桂林 541004)

(1.Department of Statistics, East China Normal University, Shanghai, 200062, China; 2.Department of Mathematics and Physics, Guilin Institute of Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要：在双二项风险模型的基础上，考虑常数利率下的破产问题，利用停时的性质、破产量的递推公式和控制收敛定理，得到描述破产严重程度的破产前赢余分布和破产时间分布的公式.

关键词：双二项风险模型　盈余分布　时间分布

中图法分类号：O211.5　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2007)01-0035-04

Abstract: On the base of the double binomial risk model, ruin problems with constant interest force are discussed. Make use of the character of stop time, the recursion formula of ruin amounts and control convergence theorem, the expressions of the distribution of the surplus immediately before ruin and the distribution of the time in the red are derived, which describe the severity of ruin.

Key words: double binomial risk model, distribution of the surplus immediately, distribution of the time

经典风险模型通常表达如下[1,2]：给定保险公司一定的初始资本允许它承保具有某种统计分布的风险，并允许它根据风险的特点连续的(或离散的)收取保费.风险理论主要从定量的角度研究保险公司经营的安全性.按照收取保费的方式可以把风险模型分为离散模型和连续模型两种.讨论的最多的连续时间模型是复合泊松模型，讨论的最多的离散时间模型是复合二项模型.复合二项模型假定在每一单位时间内索赔或者不发生，或者只发生一次.在经典的复合二项风险模型中，保险公司按照单位时间常数速率取的保单.但在实际中，不同单位时间收取的保单数常常不一样，是一个随机变量，可能服从某一离散分布.根据这一实际情况，文献[3]将经典的复合二项风险模型进行推广，将保单收入过程推广为一个与索赔过程独立的二项过程，成为双二项风险模型，并研究了双二项风险模型的终极破产概率，得到了 Lundberg 上界.

经典风险模型没有考虑到利率的影响.在实际操作中，保险公司的大部分盈余来自于投资的收入，所以有固定利率的风险模型正日益受到人们的关注.文献[4,5]研究了常利率下复合泊松模型，文献[6]考虑了常利率下离散时间风险模型.除了用破产概率研究保险公司的财务状况和偿付能力外，还可以用破产前瞬时盈余、破产持续时间及破产时赤字等描述破产严重程度[7].

本文考虑了常数利率的双二项风险模型，得到了描述破产严重程度的破产前瞬时盈余分布和破产持续时间分布的递推公式，得到的结果是文献[3]的继续和推广.

1 模型的引入和实际背景

在完全离散的经典风险模型中，取定一个单位时间 a 后，可以假定在任意一个时间区$((n-1)a, na]$中，仅可能出现：一方面，或有一个客户投保，或没有客户投保；另方面，或有一次索赔发生，或没有索赔发生.不失一般性，以下取 $a=1$.这样可以用 $\zeta_n=1$ 表示在该区间有一个客户投保，以 $\zeta_n=0$ 表示没有客户

收稿日期：2006-03-20

作者简介：唐国强(1971-)，男，讲师，主要从事极限理论和保险精算研究工作。

*广西自然科学基金项目(0447096)资助。

投保；以 $\eta_n=1$ 表示在该区间有一次索赔发生，以 $\eta_n=0$ 表示无索赔发生. 假定 $\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\cdots$ 独立同分布(i.i.d.)的随机变量序列，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots$ 为独立同分布(i.i.d.)的随机变量序列且满足：

$P_r(\zeta_n=1)=p_1, P_r(\zeta_n=0)=q_1=1-p_1,(0<p_1<1)$,

$P_r(\eta_n=1)=p_2, P_r(\eta_n=0)=q_2=1-p_2,(0<p_2<1)$.

在上述假定下，$M(n)=\zeta_1+\zeta_2+\cdots+\zeta_n$(约定 $M(0)=0$)，$N(n)=\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_n$(约定 $N(0)=0$) 分别表示至时刻 n 为止的投保人数及至时刻 n 为止所发生的索赔次数. 显然，$\{M(n);n\geqslant 0\}$，$\{N(n);n\geqslant 0\}$ 分别是以 p_1,p_2 为参数的二项序列. 给定初始资本 u，收取的费率为 c，每次索赔的分布 $\{X_i,i\geqslant 1\}$ 是 i.i.d. 随机变量序列，分布为 $F_X(x)$. 不考虑利率，保险公司的盈余过程 $U(n)$ 可表示为：

$$U(n)=u+cM(n)-\sum_{i=1}^{N(n)}X_i, \tag{1.1}$$

考虑常数利率 r 后，收入在每个区间的开始，索赔给付在区间的结束，盈余过程 $U(n)$ 可表示如下：

$$U(n)=u(1+r)^n+c\sum_{i=1}^{n}\zeta_i(1+r)^{n-i+1}-\sum_{i=1}^{n}X_i\eta_i(1+r)^{n-1}, \tag{1.2}$$

令 $Y_i=X_i\eta_i-c\zeta_i(1+r)$，则 $\{Y_i,i\geqslant 1\}$ 是 i.i.d. 的随机变量序列，设其分布为 $F_Y(y)$，由 X_i,ζ_i,η_i 的分布共同确定. 为保证保险公司的正常运作，必须附加一定的风险负荷，通常要求 $E(Y_i)<0$. 则盈余过程 $U(n)$ 可改写为：

$$U(n)=u(1+r)^n-(1+r)^nS(n), \tag{1.3}$$

其中 $S(n)=\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{(1+r)^i}$.

停时 $\tau(u)$ 为破产时刻，即保险公司的赢余首次小于 0 的时刻，

$$\tau(u)=\inf_n\{n:n>0,U(n)<0\}=\inf_n\{n:n>0,S(n)>u\}. \tag{1.4}$$

下面讨论在停时 $\tau(u)$，保险公司破产前瞬时赢余和破产持续时间两个破产严重程度的问题.

2 破产前盈余的分布

保险公司的财务状况和偿付能力是保险人和投保人都十分关心的问题，为了弄清楚保险公司出现入不敷出的实际状况，研究破产前瞬时保险公司的盈余情况是非常必要的. 1988 年 Dufresne 和 Gerber[8] 首次引入描述破产前盈余分布状况的函数，有关问题立即成为破产理论中的重要研究论题. 本节在引入利率的双二项风险模型下，对这一问题进行讨论.

引入破产前盈余分布函数 $F(u,x)$，定义为：

$$F(u,x)=P_r\{U(\tau-1)>x,\tau(u)<\infty\,|\,U(0)=u\},x>0. \tag{2.1}$$

定理 1 在双二项风险模型 $\{U(n);n\geqslant 0\}$ 下，破产前盈余分布函数 $F(u,x)$ 满足

$$F(u,x)=h_1(u,x)+\int_{-\infty}^{u(1+r)}F(u(1+r)-s,x)\mathrm{d}F_Y(s),$$

其中 $h_1(u,x)=\begin{cases}1-F_Y(u(1+r)),\text{若 } x\leqslant u;\\ 0,\qquad \text{若 } x>u.\end{cases}$

证明 $F(u,x)$ 描述了准备金为 u 时破产前瞬时盈余大于 x 的概率，由(2.1)式有

$$F(u,x)=\sum_{n=1}^{\infty}P_r\{U(\tau-1)>x,\tau(u)=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}P_r\{S(n)>u,S(n-1)<u-\frac{x}{(1+r)^{n-1}},S(n-2)\leqslant u,\cdots,S(1)\leqslant u\}=\sum_{n=1}^{\infty}h_n(u,x), \tag{2.2}$$

其中 $h_n(u,x)$ 是破产时刻为 n 的瞬时盈余大于 x 的概率. 则

$$h_1(u,x)=P_r\{S(1)>u,S(0)<u-x\}=\begin{cases}1-F_Y(u(1+r)),\text{若 } x\leqslant u;\\ 0,\qquad \text{若 } x>u.\end{cases} \tag{2.3}$$

由定义得到

$$h_2(u,x)=P_r\{S(2)>u,S(1)<u-\frac{x}{1+r}\}=P_r\{\frac{Y_1}{1+r}+\frac{Y_2}{(1+r)^2}>u,\frac{Y_1}{1+r}<u-\frac{x}{1+r}\}=\int_{-\infty}^{(u(1+r)-x)^-}P_r\{S(1)>u(1+r)-s\}\mathrm{d}F_Y(s)=\int_{-\infty}^{(u(1+r)-x)^-}h_1(u(1+r)-s,x)\mathrm{d}F_Y(s)=\int_{-\infty}^{u(1+r)}h_1(u(1+r)-s,x)\mathrm{d}F_Y(s)-\int_{u(1+r)-x}^{u(1+r)}h_1(u(1+r)-s,x)\mathrm{d}F_Y(s). \tag{2.4}$$

注意，(2.4) 式中 $\int_{u(1+r)-x}^{u(1+r)}h_1(u(1+r)-s,x)\mathrm{d}F_Y(s)$ 为 0，这是由于在该项中 $s\in[u(1+r)-x,u(1+r))$，即 $x>u(1+r)-s>0$，由(2.3)可知此时 $h_1(u(1+r)-s,x)=0$. 由此(2.4)式为

$$h_2(u,x)=\int_{-\infty}^{u(1+r)}h_1(u(1+r)-s,x)\mathrm{d}F_Y(s).$$

类似有，

$$h_3(u,x)=P_r\{S(3)>u,S(2)<u-\frac{x}{(1+r)^2},S(1)\leqslant u\}=P_r\{\frac{Y_1}{1+r}+\frac{Y_2}{(1+r)^2}+\frac{Y_3}{(1+r)^3}>u,\frac{Y_1}{1+r}+\frac{Y_2}{(1+r)^2}<u-\frac{x}{(1+r)^2},Y_1\leqslant u(1+$$

$r)\} = \int_{-\infty}^{u(1+r)} P_r\{S(2) > u(1+r) - s, S(1) < u(1+r) - s - \frac{x}{1+r}\} dF_Y(s) = \int_{-\infty}^{u(1+r)} h_2(u(1+r) - s, x) dF_Y(s)$.

由归纳得到,对于 $n \geqslant 2$ 有

$$h_n(u,x) = P_r\{S(n) > u, S(n-1) < u - \frac{x}{(1+r)^{n-1}}, S(n-2) \leqslant u, \cdots, S(1) \leqslant u\} = \int_{-\infty}^{u(1+r)} h_{n-1}(u(1+r) - s, x) dF_Y(s). \quad (2.5)$$

由(2.2)式和控制收敛定理,显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} h_n(u,x)$ 收敛.又由(2.5)和(2.2)式有

$$F(u,x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(u,x) = h_1(u,x) + \sum_{n=2}^{\infty} h_n(u,x) = h_1(u,x) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{-\infty}^{u(1+r)} h_{n-1}(u(1+r) - s, x) dF_Y(s) = h_1(u,x) + \int_{-\infty}^{u(1+r)} F(u(1+r) - s, x) dF_Y(s).$$

综上所述,定理得证.

3 破产持续时间

保险公司破产后,财务状况到底恶化到何种境地,困境将持续多长时间,这些不仅关系到保险人的前途命运,更影响到广大保户的切身利益.本节我们讨论破产持续时间的概率性质.

破产后保险公司的盈余首次回到正的时刻 $T(u)$ 定义

$$T(u) = \inf_n \{n : n > \tau(u), U(n) > 0\}, \quad (3.1)$$

于是,破产持续时间定义为

$$\tilde{\tau}(u) = \begin{cases} T(u) - \tau(u), & \text{若 } \tau(u) < \infty, \\ 0, & \text{若 } \tau(u) = \infty. \end{cases}$$

定理2 在双二项风险模型 $\{U(n); n \geqslant 0\}$ 下,破产持续期的概率为:

$$\phi_n(u) = P_r\{\tilde{\tau}(u) = n\} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(n)}(u) Q_k(u),$$

其中 $Q_k(u)$ 由下面(3.3)和(3.4)式给出,$M_K^{(n)}$ 由(3.5)、(3.6)、(3.7)、(3.9)、(3.10)和(3.11)式给出.

证明 当 $\tilde{\tau}(u) = 1$ 时,即破产持续1期的概率为

$$\phi_1(u) = P_r(\tilde{\tau}(u) = 1) = P_r\{T(u) = \tau(u) + 1\} = \sum_{k=1}^{\infty} P_r\{T(u) = k+1 | \tau(u) = k\} P_r\{\tau(u) = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P_r\{U(1) \geqslant 0, U(2) \geqslant 0, \cdots, U(k-1) \geqslant 0, U(k) < 0, U(k+1) \geqslant 0\} P_r\{\tau(u) = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)}(u) Q_k(u). \quad (3.2)$$

(3.2)式中 k 时刻破产的概率 $Q_k(u)$ 可推导如下,

$$Q_1(u) = P_r\{\tau(u) = 1\} = P_r\{Y_1 \geqslant u(1+r)\} = 1 - F_Y(u(1+r)), \quad (3.3)$$

$$Q_2(u) = P_r\{U(1) \geqslant 0, U(2) < 0\} = P_r\{Y_1 \leqslant u(1+r), Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} > u(1+r)\} = \int_{-\infty}^{u(1+r)} P_r\{\frac{Y_2}{1+r} > u(1+r) - s\} dF_Y(s) = \int_{-\infty}^{u(1+r)} Q_1(u(1+r) - s) dF_Y(s),$$

由归纳得到,对于 $k \geqslant 2$ 有,

$$Q_k(u) = \int_{-\infty}^{u(1+r)} Q_{k-1}(u(1+r) - s) dF_Y(s). \quad (3.4)$$

记

$$B_1(u) = \int_{u(1+r)}^{\infty} F_Y((1+r)(u(1+r) - s)) dF_Y(s). \quad (3.5)$$

在(3.2)式中,

$$M_1^{(1)}(u) = P_r\{U(0) \geqslant 0, U(1) < 0, U(2) \geqslant 0\} = P_r\{Y_1 > u(1+r), Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} \leqslant u(1+r)\} = \int_{u(1+r)}^{\infty} P_r\{\frac{Y_2}{1+r} \leqslant u(1+r) - s\} dF_Y(s) = \int_{u(1+r)}^{\infty} F_Y((1+r)(u(1+r) - s)) dF_Y(s) = B_1(u), \quad (3.6)$$

$$M_2^{(1)}(u) = P_r\{U(1) \geqslant 0, U(2) < 0, U(3) \geqslant 0\} = P_r\{Y_1 \leqslant u(1+r), Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} > u(1+r), Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} + \frac{Y_3}{(1+r)^2} \leqslant u(1+r)\} = \int_{-\infty}^{u(1+r)} P_r\{\frac{Y_2}{1+r} > u(1+r) - s, \frac{Y_2}{1+r} + \frac{Y_3}{(1+r)^2} \leqslant u(1+r) - s\} dF_Y(s) = \int_{-\infty}^{u(1+r)} M_1^{(1)}(u(1+r) - s) dF_Y(s),$$

由归纳得到,对 $k \geqslant 2$ 有,

$$M_k^{(1)}(u) = \int_{-\infty}^{u(1+r)} M_{k-1}^{(1)}(u(1+r) - s) dF_Y(s), \quad (3.7)$$

这是 k 时刻破产且持续1期的概率.故破产持续1期的概率为

$$\phi_1(u) = P_r\{\tilde{\tau}(u) = 1\} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(1)}(u) Q_k(u),$$

当 $\tilde{\tau}(u) = 2$ 时,完全类似地有

$$\phi_2(u) = P_r\{\tilde{\tau}(u) = 2\} = P_r\{T(u) = \tau(u) + 2\} = \sum_{k=1}^{\infty} P_r\{T(u) = k+2 | \tau(u) = k\} P_r\{\tau(u) =$$

$k\} = \sum_{k=1}^{\infty} P_r\{U(1) \geqslant 0, \cdots, U(k-1) \geqslant 0, U(k) < 0, U(k+1) < 0, U(k+2) \geqslant 0\} P_r\{\tau(u) = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(2)}(u) Q_k(u).$ (3.8)

记

$$B_2(u) = \int_{u(1+r)}^{\infty} B_1(u(1+r) - s) \mathrm{d}F_Y(s).$$

在(3.6)式中，

$M_1^{(2)}(u) = P_r\{U(0) \geqslant 0, U(1) < 0, U(2) < 0, U(3) \geqslant 0\} = P_r\{Y_1 > u(1+r), Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} > u(1+r), Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} + \frac{Y_3}{(1+r)^2} \leqslant u(1+r)\} = \int_{u(1+r)}^{\infty} P_r\{\frac{Y_2}{1+r} > u(1+r) - s, \frac{Y_2}{1+r} + \frac{Y_3}{(1+r)^2} \leqslant u(1+r) - s\} \mathrm{d}F_Y(s) = \int_{u(1+r)}^{\infty} B_1(u(1+r) - s) dF_Y(s) = B_2(u),$

$M_2^{(2)}(u) = P_r\{U(1) \geqslant 0, U(2) < 0, U(3) < 0, U(4) \geqslant 0\} = P_r\{Y_1 \leqslant u(1+r), \cdots, Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} + \frac{Y_3}{(1+r)^2} + \frac{Y_4}{(1+r)^3} \leqslant u(1+r)\} = \int_{-\infty}^{u(1+r)} M_1^{(2)}(u(1+r) - s) \mathrm{d}F_Y(s),$

由归纳得到，对 $k \geqslant 2$ 有，

$$M_k^{(2)}(u) = \int_{-\infty}^{u(1+r)} M_{k-1}^{(2)}(u(1+r) - s) \mathrm{d}F_Y(s),$$

于是得到了破产持续 2 期的概率

$$\phi_2(u) = P_r\{\tilde{\tau}(u) = 2\} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(2)}(u) Q_k(u).$$

类似地，记

$$B_n(u) = \int_{u(1+r)}^{\infty} B_{n-1}(u(1+r) - s) \mathrm{d}F_Y(s), \tag{3.9}$$

当 $\tilde{\tau}(u) = n$ 时，与前述完全类似有

$$M_1^{(n)}(u) = B_n(u), \tag{3.10}$$

$$M_k^{(n)}(u) = \int_{-\infty}^{u(1+r)} M_{k-1}^{(n)}(u(1+r) - s) \mathrm{d}F_Y(s), \tag{3.11}$$

当 $k \geqslant 2$，破产持续 n 期的概率为

$$\phi_n(u) = P_r\{\tilde{\tau}(u) = n\} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k^{(n)}(u) Q_k(u). \tag{3.12}$$

定理得证.

参考文献：

[1] GERBER H U. 数学风险论导引[M]. 成世学，严颖，译. 北京：世界图书出版社，1979.

[2] GRANDELL J. Aspects of Risk Theory[M]. New York: Springer，1991.

[3] 赵飞，王汉兴. 双二项风险模型的破产概率[J]. 应用数学与计算数学学报，2004，18：73-78.

[4] WILLMOT G E. Ruin probability in the compound binomial process [J]. Insurance: Mathematics and Economics，1993，12：133-142.

[5] SUNDT B，TEUGELS J I. Ruin estimates under interest force[J]. Insurance：Mathematics and Economics，1995，16：7-22.

[6] YANG H. Non-exponential bounds for ruin probability with interest effect included[J]. Scand Actuarial，1999，99：66-79.

[7] GERBER H U，GOOVAERTS M J，KASS R. On the probability and severity of ruin [J]. ASTIN Bulletin，1987，17：151-163.

[8] DUFRESNE F，GERBER H U. The surpluses immediately before and at ruin，and the amount of the claim causing ruin[J]. Insurance：Mathematics and Economics，1988，7：193-199.

（责任编辑：韦廷宗）

磁盘机上信息的阅读过程可以量子化

尽管量子力学已经有 100 多年的历史了，但是物理学家们至今仍对这些不同于人类直觉的有关现象兴趣盎然。最近，科学家们研究发现，他们能够将磁盘机上信息的阅读过程量子化。

在每天的日常生活中，有些数值是连续不断的，比如网球的速度在一秒钟内可以从零达到任何数值；然而有些数值却是间断的，比如氢原子中电子的能量只能是一组数值中的某个特定值，而不可能是其间的连续值。然而，科学家们让电流通过用钴做成的原子般大小的接触器时，他们观察到了类似的量子行为。

钴具有磁性，因此，当电流通过时因磁场的作用而发生变化并不是奇怪的现象。然而，科学家们发现这种电流是以不连续的方式变化的，即量子跳跃，这是在实验上第一次观察到的量子化磁致电阻现象。所以他们推测，如果这种量子现象出现在室温条件下，就能应用于信息的记忆和储藏。

据《科学时报》