

# 有限群极大子群的 $CI$ -截\*

## $CI$ -section of Maximal Subgroup of Finite Groups

唐曾林<sup>1</sup>,李世荣<sup>2</sup>,樊启毅<sup>1</sup>

TANG Zeng-lin<sup>1</sup>,LI Shi-rong<sup>2</sup>,FAN Qi-yi<sup>1</sup>

(1. 湖南文理学院,湖南常德 415000;2. 广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)

(1. Hunan University of Arts and Science, Changde, Hunan, 415000, China; 2. College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:应用有限群极大子群的  $CI$ -截性质,讨论有限群  $G$  之正规子群  $H$  的可解性,得到 4 个重要结论.这 4 个结论推广了文献[3]的相关结果.

关键词:极大子群  $CI$ -截 可解

中图法分类号:O152.1 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2007)02-0081-04

Abstract:By the properties of  $CI$ -section for maximal subgroups of  $G$ , the solvability of normal subgroup  $H$  of finite group  $G$  were investigated. Four important results which generalized the relative results in paper [3] were obtained.

Key words: maximal subgroup,  $CI$ -section, solvable

1998年李世荣在文献[1]中引入极大子群的  $CI$ -截概念:给定群  $G$  及  $G$  的极大子群  $M$ ,令  $N/K$  是  $G$  的一个主因子,  $K \leq M$  而  $N \not\subseteq M$ ,称  $M \cap N/K$  为  $M$  的一个  $CI$ -截,记作  $Sec(M)$ .这是继 Deskins 定义了极大子群的极大完备<sup>[2]</sup>之后,得到的分类有限群的又一个重要工具.李世荣深入研究  $CI$ -截对群结构的影响,得到:有限群  $G$  可解的充要条件是:对它的每个极大子群  $M$ ,其  $CI$ -截  $Sec(M)$  为 2-闭.本文采用  $CI$ -截的性质,讨论有限群  $G$  之正规子群  $H$  的可解性,得到 4 个重要结论,推广了文献[3]的相关结果.

本文里的  $G$  总表示一个有限群,未加说明的符号均是标准的, $\bar{G}$  表示商群  $G/N$ ,其中  $N$  是  $G$  的正规子群, $M < \cdot G$  表示  $M$  是群  $G$  的极大子群, $\pi$  表示某些素数集合, $p$  总表示一个素数, $J(P)$  表示群  $P$  的 Thompson 子群.

### 1 定义及主要引理

定义 1.1<sup>[1]</sup> 给定群  $G$  及  $G$  的极大子群  $M$ ,令  $N/K$  是  $G$  的一个主因子,  $K \leq M$  而  $N \not\subseteq M$ ,称  $M \cap$

$N/K$  为  $M$  的一个  $CI$ -截,记作  $Sec(M)$ .

引理 1.1<sup>[4]</sup> 设  $G$  为本原群(即  $G$  有一个具有平凡内核的极大子群),则以下条件之一成立:

(1)  $G$  有唯一的极小正规子群;

(2)  $G$  只有两个不同的极小正规子群  $M$  和  $N$ ,它们互为中心化子,从而都是非交换特征单群,它们在  $G$  中有公共补子群  $H$ ,  $H$  作为  $M$  与  $N$  的算子群有  $H \cong Inn(M)$ ,  $H \cong Inn(N)$ . 作为  $H$ -群有  $M \simeq N$ .

引理 1.2 对于群  $G$  的任意极大子群  $M$ ,在同构意义下  $M$  在  $G$  中有唯一的  $CI$ -截.

证明 假设  $M$  是群  $G$  的一个极大子群,  $N/K$  是  $G$  的一个主因子满足  $K \leq M$  但是  $N \not\subseteq M$ ,那么根据定义  $N \cap M/K$  是  $M$  的一个  $CI$ -截,记  $M_G = Core_G(M)$ ,  $U = NM_G$ ,那么  $K \leq M_G$ ,且  $U/M_G$  也是  $G$  的一个主因子,而且  $U/M_G \simeq N/K$ ,因为  $G/M_G$  是一个本原群,所以  $M/M_G$  为稳定子.如果  $U/M_G$  是  $G/M_G$  的唯一极小正规子群,结论显然成立,否则,根据引理 1.1,  $G/M_G$  恰好有两个极小正规子群  $U/M_G$  和  $V/M_G$ ,  $U/M_G \simeq V/M_G$ ,并且  $U \cap M = M_G = V \cap M$ ,所以  $(V \cap M)/M_G = (U \cap M)/M_G = (NM_G \cap M)/M_G = (N \cap M)M_G/M_G \simeq (N \cap M)/(N \cap M \cap M_G) = (N \cap M)/(N \cap M_G) = (N \cap M)/K$ .从而定理得证.

引理 1.3<sup>[1]</sup> 令  $N \leq M < \cdot G$ ,  $N \trianglelefteq G$  那么  $M/N$

收稿日期:2006-06-20

修回日期:2006-09-19

作者简介:唐曾林(1973-),男,讲师,主要从事有限群研究.

\* 国家自然科学基金(10161001),广西自然科学基金(0249001)及湖南文理学院科研(JJQD06005)资助项目.

与  $M$  的  $CI$ -截同构.

**引理 1.4**<sup>[5]</sup> 设  $\pi$  为奇素数集合,  $P$  为群  $G$  的一个 Sylow- $p$  子群, 如果对每个  $p \in \pi$ , 均有  $N_G(Z(J(P)))$  有正规  $\pi$  补, 则  $G$  也有正规  $\pi$  补.

**定义 1.2**  $M_H(G) = \{M \triangleleft G \mid H \triangleleft M\}$ , 其中  $H$  是群  $G$  中一个给定的正规子群.

显然, 若  $H = G$  则  $M_H(G) = F(G)$  表示所有极大子群的集合, 若取  $H$  为单位元群, 则  $M_H(G) = \phi$  是空集.

**定义 1.3**  $F_p(G) = \{M \triangleleft G \mid |G:M|_p = 1\}$ .

**定义 1.4** 称群  $G$  是  $PN$ -群是指它的每个极小子群都是  $G$ -不变子群.

**引理 1.5**<sup>[3]</sup> 设  $N$  是非交换单群, 且与  $S_4$  无关, 那么  $N$  是下列群之一: (i)  $S_2(2^{2m+1})$ ,  $m \geq 1$ ; (ii)  $PSL(2, 2^n)$ ,  $n > 1$ ; (iii)  $PSU(3, 2^n)$ ,  $n > 1$ ; (iv)  $J_1$  和  $Ree$  群; (v)  $PSL(2, p^n)$ ,  $p^n \equiv 3 \text{ or } 5 \pmod{8}$ .

## 2 主要结果

**定理 2.1** 设  $G$  是群, 若对每个  $M \in F_2(G) \cap M_H(G)$  有  $Sec(M)$  为 2-幂零, 且其 Sylow-2 子群交换. 则  $H$  可解.

**证明** 假若命题不真, 设  $(G, H)$  是极小阶反例, 并设  $N$  是含于  $H$  的  $G$  的极小正规子群.

首先证明:  $(G/N, H/N)$  满足定理假设. 若  $F_2(\bar{G}) \cap M_H(\bar{G}) = \phi$ , 则  $(G/N, H/N)$  自动满足定理假设. 故设  $F_2(\bar{G}) \cap M_H(\bar{G}) \neq \phi$ , 任取  $\bar{M} \in F_2(\bar{G}) \cap M_H(\bar{G})$ , 根据定义可知  $|\bar{G}:\bar{M}|_2 = 1$ ,  $\bar{H} \triangleleft \bar{M}$ , 所以  $|G:M|_2 = 1$ , 并且  $H \triangleleft M$ , 因此  $M \in F_2(G) \cap M_H(G)$ . 由定理假设,  $Sec(M)$  为 2-幂零, 根据引理 1.3,  $Sec(\bar{M})$  也 2-幂零, 于是  $(G/N, H/N)$  满足定理假设. 由于  $(G, H)$  是极小阶反例, 故  $H/N$  为可解.

其次, 假设  $N$  非可解. 我们能断言:  $N$  是  $G$  的唯一极小正规子群. 这是因为, 若  $N_1, N_2$  是  $G$  的两个不同的极小正规子群, 由前面的证明知  $H/N_1, H/N_2$  都可解, 又  $H/(N_2 \cap N_1)$  同构于  $H/N_1 \times H/N_2$  的一个子群, 可知  $H/(N_2 \cap N_1)$  可解, 然而  $N_2 \cap N_1 = e$  是单位元群, 得  $H$  可解, 矛盾于  $(G, H)$  为极小反例. 由假设  $N$  非可解, 那么  $N$  是偶数阶群, 设  $Q \in Syl_2(N)$ , 应有  $Q \triangleleft N$ , 更有  $Q \triangleleft G$  根据 Frattini 论断:  $G = N_G(Q) \cdot N = N_G(Z(J(Q))) \cdot N$  并且,  $N_G(Z(J(Q))) < G$ , 故存在  $G$  的极大子群  $M$  满足  $N_G(Z(J(Q))) \leq M$ , 于是  $G = MN$ . 当然  $N \triangleleft M$ , 现在证明  $|G:M|_2 = 1$ . 因为  $N \triangleleft G$ , 故存在  $Q^* \in Syl_2(G)$ , 使  $Q = Q^* \cap N \leq Q^* \leq N_G(Q^*) \leq N_G(Q) \leq N_G(Z(J(Q))) \leq M$ .

所以  $|G:M|_2 = 1$ , 即  $M \in F_2(G)$ . 这样就有:  $M \in F_2(G) \cap M_H(G)$ , 由于  $N_N(Q) = N_G(Q) \cap N \leq N_G(Z(J(Q))) \cap N \leq M \cap N$  而由  $N$  的唯一性得:  $M_G = \{e\}$ , 于是  $Sec(M) = N \cap M \geq N_N(Q)$ , 依假设可知  $N \cap M$  为 2-幂零, 所以  $N_N(Q)$  也 2-幂零, 又依题设  $Q$  是交换群, 故  $C_N(Z(Q)) = C_N(Q) \leq N_N(Q)$  得  $C_N(Z(Q))$  也为 2-幂零, 根据文献[5]定理 10.28 知  $N$  为 2-幂零, 与  $N$  是  $G$  的非可解极小正规子群相矛盾. 这就证明了  $N$  可解, 由前面证明得  $H/N$  可解, 得  $H$  可解, 与假设矛盾, 故极小反例不存在. 命题得证.

**推论 2.1** 设是  $G$  群, 若对每个  $M \in F_2(G)$ , 有  $Sec(M)$  超可解, 且其 Sylow-2 子群交换. 则  $G$  可解.

**定理 2.2** 设是  $G$  群, 若对每个  $M \in M_H(G) \cap F_2(G)$ ,  $Sec(M)$  的 Sylow-2 子群  $S$  的 2 阶子群都正规于  $N_{Sec(M)}(S)$ , 则  $H$  可解.

**证明** 假若命题不真, 设  $(G, H)$  是极小阶反例. 设  $N$  是含于  $H$  的  $G$  的极小正规子群. 首先证明:  $(G/N, H/N)$  满足定理假设. 不失一般性, 可设  $F_2(\bar{G}) \cap M_H(\bar{G}) \neq \phi$ , 否则若  $F_2(\bar{G}) \cap M_H(\bar{G}) = \phi$ , 则  $(G/N, H/N)$  自动满足定理假设, 由  $(G, H)$  的极小性知  $\bar{H}$  可解. 于是任取  $\bar{M} \in F_2(\bar{G}) \cap M_H(\bar{G})$ , 根据定义可知  $|\bar{G}:\bar{M}|_2 = 1$ ,  $\bar{H} \triangleleft \bar{M}$ , 所以  $|G:M|_2 = 1$ , 并且  $H \triangleleft M$ , 因此  $M \in F_2(G) \cap M_H(G)$ . 由定理假设,  $Sec(M)$  的 Sylow-2 子群  $\bar{S}$  的 2 阶子群都正规于  $N_{Sec(M)}(S)$ , 所以  $Sec(\bar{M})$  的 Sylow-2 子群  $\bar{S}$  的 2 阶子群都正规于  $N_{Sec(\bar{M})}(\bar{S})$ , 于是  $(G/N, H/N)$  满足定理假设. 由于  $(G, H)$  是极小阶反例, 故  $H/N$  为可解.

易知  $G$  只有唯一的极小正规子群  $N$ . 假如  $N$  不可解, 那么  $N$  是偶阶群, 设  $Q \in Syl_2(N)$ , 应有  $Q \triangleleft N$ , 更有  $Q \triangleleft G$  根据 Frattini 论断:  $G = N_G(Q) \cdot N$  并且,  $N_G(Q) < G$ , 故存在  $G$  的极大子群  $M$  满足  $N_G(Q) \leq M$ , 于是  $G = MN$ ,  $N \triangleleft M$ , 现在证明  $|G:M|_2 = 1$ . 因为  $N \triangleleft G$ , 故存在  $Q^* \in Syl_2(G)$ , 使  $Q = Q^* \cap N$ , 所以  $|G:M|_2 = 1$ , 即  $M \in F_2(G)$ . 于是  $M \in F_2(G) \cap M_H(G)$ , 由于  $N_N(Q) = N_G(Q) \cap N \leq M \cap N$ , 由  $N$  的唯一性得:  $M_G = \{e\}$ , 于是  $Sec(M) = N \cap M \geq N_N(Q) \geq Q$ , 故  $Q \in Syl_2(Sec(M))$ , 依假设  $Q$  的 2 阶子群都正规于  $N_{Sec(M)}(Q)$ , 而  $N_{Sec(M)}(Q) \leq N_N(Q) \leq N \cap M = Sec(M)$ , 所以  $N_{Sec(M)}(Q) = N_N(Q)$ , 于是  $Q$  的每个 2 阶子群均正规于  $N_N(Q)$ . 现在分几步导出矛盾. (1)  $N$  不包含任何具有  $2^n$  阶的 Frobenius 子群. 若否,  $N$  有一个 Frobenius 群  $F = [K]H$ , 其中  $K$  为  $F$  的 Frobenius 核, 且  $|K| = 2^n$ . 那么  $Z(F) \leq Z(H)$  和  $K \leq Q$ , 此处  $Q \in Syl_2(N)$ . 设  $N_1$

是含于  $K$  的  $F$  的一个极小正规子群, 则  $N_1 \leq K, N_1$  是初等阿贝尔群, 依假设  $N_1 \leq Z(Q)$ , 故  $Q \leq C_N(N_1) \triangleleft N_N(N_1)$ , 根据 Frattini 论断, 我们有  $N_N(N_1) = C_N(N_1)N_{K_1}(Q)$ , 其中  $K_1 = N_N(N_1)$ , 现在, 按假设和上一段的证明,  $Q$  的每个 2 阶子群在  $N_{K_1}(Q)$  中正规, 从而  $N_1$  的每个 2 阶子群在  $K_1$  中正规, 故  $N_1 \leq Z(K_1)$ , 因为  $F \leq K_1$ , 从而  $N_1 \leq Z(F)$ ,  $N_1 = 1$ . 矛盾. 因此 (1) 成立. (2) 按 (1) 我们看到  $N$  与  $A_4$  (4 个文字上的交错群) 无关, 从而与  $S_4$  (4 个文字上的对称群) 无关. 又  $N$  是特征单群, 可设  $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_s$ , 其中  $N_1, N_2, \dots, N_s$  是彼此同构的非交换单群,  $N_i$  也与  $S_4$  无关. 依引理 1.5,  $N_i$  为下列群之一: (i)  $S_z(2^{2m+1}), m \geq 1$ ; (ii)  $PSL(2, 2^n), n > 1$ ; (iii)  $PSU(3, 2^n), n > 1$ ; (iv)  $J_1$  和 Ree 群; (v)  $PSL(2, p^n), p^n \equiv 3 \text{ or } 5 \pmod{8}$ .

但是, 另一方面, 由文献 [6] 知  $S_z(q)$  包含一个  $q^2$  阶的 Frobenius 核, 此处  $q = 2^{2m+1}$ , 从而  $N_i$  不是  $S_z(q)$ . 类似地可证  $N$  不能是  $PSL(2, 2^n), n > 1$ ; 因为  $PSL(2, p^n)$ , ( $p$  是奇素数) 含有  $A_4$  [7].  $N$  不同构于  $PSL(2, p^n)$ . 另外  $PSU(3, 2^n)$  包含  $PSL(2, 2^n)$ ;  $J_1$  包含  $PSL(2, 2)$  和 Ree 群, 有子群  $PSL(2, 3^{2n+1})$  [6]. 这些事实表明  $N_i$  也不能是  $PSU(3, 2^n), J_1$  和 Ree 群中的任何一个. 矛盾. 故  $N$  可解. 与  $H$  是极小反例矛盾. 从而命题得证.

**推论 2.2** 设  $G$  是群, 若对每个  $M \in F_2(G)$ ,  $Sec(M)$  的 Sylow-2 子群  $S$  的 2 阶子群都正规于  $N_{Sec(M)}(S)$ , 则  $G$  可解.

**推论 2.3** 设  $G$  是群, 若对每个  $M \in F_2(G) \cap M_H(G)$ ,  $Sec(M)$  都是  $PN$ -群, 则  $H$  可解.

**推论 2.4** 设  $G$  是群, 若对  $M \in F_2(G) \cap M_H(G)$ ,  $Sec(M)$  的 Sylow-2 子群皆循环, 则  $H$  可解.

**推论 2.5** 设  $G$  是群, 若对  $M \in F_2(G) \cap M_H(G)$ ,  $Sec(M)$  的 Sylow-2 子群  $P$  至多有一个对合, 则  $H$  可解.

**定理 2.3** 设  $G$  是群, 若对每个  $M \in F_p(G) \cap M_H(G)$ ,  $Sec(M)$  交换, 则  $H$  为  $p$ -可解.

**证明** 假若命题不真, 设  $(G, H)$  是极小阶反例. 设  $N$  是含于  $H$  的  $G$  的极小正规子群.

首先证明:  $(G/N, H/N)$  满足定理假设, 并由此得  $H/N$  为  $P$ -可解. 若  $F_p(\bar{G}) \cap M_H(\bar{G}) = \phi$ , 则  $(G/N, H/N)$  自动满足定理假设, 由  $(G, H)$  的极小性知  $\bar{H}_p$ -可解. 故设  $F_p(\bar{G}) \cap M_H(\bar{G}) \neq \phi$ , 任取  $\bar{M} \in F_p(\bar{G}) \cap M_H(\bar{G})$ , 根据定义可知  $|\bar{G}:\bar{M}|_p = 1, \bar{H} \triangleleft \bar{M}$ . 又因为  $|G:M| = |\bar{G}:\bar{M}|$ , 所以  $|G:M|_p = 1$ , 并

且  $H \triangleleft M$ , 因此  $M \in F_p(G) \cap M_H(G)$ . 由定理假设,  $Sec(M)$  交换, 故  $Sec(M/N)$  也交换, 于是  $(G/N, H/N)$  满足定理假设, 由  $(G, H)$  的极小性知  $\bar{H}$  为  $P$ -可解. 故可设  $N$  是群  $G$  的唯一极小正规子群. 若  $N$  非  $p$ -可解. 可令  $P \in \text{Sly}_p(N)$ , 则  $P \triangleleft N$ , 更有  $P \triangleleft G$ , 由 Frattini 论断,  $G = N_G(P) \cdot N = N_G(Z(J(P))) \cdot N$ , 且  $N_G(Z(J(P))) < G$ , 于是存在  $M < G$ , 满足  $N_G(Z(J(P))) \leq M$ , 则  $G = M \cdot N$ . 又  $N_N(Z(J(P))) = N_G(Z(J(P))) \cap N \leq M \cap N$ , 由  $N$  的唯一性, 得  $M_G = 1$ , 故  $Sec(M) = M \cap N$ . 因为  $N \triangleleft G$ , 故存在  $P^* \in \text{Syl}_p(G)$ , 使得  $P = P^* \cap N$ , 这样, 就有  $P^* \leq N_G(P^*) \leq N_G(P^* \cap N) = N_G(P) \leq N_G(Z(J(P))) \leq M$ , 于是  $M \in F_p(G) \cap M_H(G)$ , 根据题设,  $Sec(M)$  交换, 又因为  $Sec(M) = M \cap N \geq N_G(Z(J(P))) \cap N = N_N(Z(J(P))) \geq N_N(P) \geq P$ , 推得  $N_N(P) = C_N(P)$ , 根据 Burnside 定理,  $N$  为  $p$ -幂零, 与假设矛盾, 故必有  $N$  为  $p$ -可解, 于是结合  $G/N$  为  $p$ -可解, 得  $G$  为  $p$ -可解. 与群  $G$  是反例矛盾. 从而命题得证.

**推论 2.6** 设  $G$  是群, 若对每个  $M \in F_p(G)$ ,  $Sec(M)$  交换, 则  $G$  为  $p$ -可解.

**定理 2.4** 设  $\pi$  为奇素数集合, 若对每个  $M \in F_p(G) \cap M_H(G)$ , 其中  $p \in \pi$ , 有  $Sec(M)$  为  $\pi$ -闭, 则群  $H$  为  $\pi$ -可分.

**证明** 假若命题不真, 设  $(G, H)$  是极小阶反例, 设  $N$  是含于  $H$  的  $G$  的极小正规子群. 首先证明:  $(G/N, H/N)$  满足定理假设. 若  $F_p(\bar{G}) \cap M_H(\bar{G}) = \phi$ , 则  $(G/N, H/N)$  自动满足定理假设. 故设  $F_p(\bar{G}) \cap M_H(\bar{G}) \neq \phi$ , 任取  $\bar{M} \in F_p(\bar{G}) \cap M_H(\bar{G})$ , 根据定义可知  $|\bar{G}:\bar{M}|_p = 1, \bar{H} \triangleleft \bar{M}$ , 所以  $|G:M|_p = 1$ , 并且  $H \triangleleft M$ , 因此  $M \in F_p(G) \cap M_H(G)$ . 由定理假设,  $Sec(M)$  交换, 故  $Sec(\bar{M})$  也交换, 于是  $(G/N, H/N)$  满足定理假设, 由  $(G, H)$  的极小性知  $\bar{H}$  可解. 同理可以证明  $N$  是  $G$  的唯一极小正规子群. 假如  $N$  不  $\pi$ -可分, 那么  $N$  当然不可解, 故  $N$  不是素数幂阶群, 若  $N$  是  $\pi$ -群或  $\pi'$ -群, 当然有  $N$  为  $\pi$ -可分. 令  $q \in \pi \cap |N|_\pi$ , 设  $Q \in \text{Syl}_q(N)$ , 应有  $Q \triangleleft N$ , 更有  $Q \triangleleft G$  根据 Frattini 论断:  $G = N_G(Q) \cdot N = N_G(Z(J(Q)))N$ , 并且,  $N_G(Z(J(Q)))N < G$ , 故存在  $G$  的极大子群  $M$  满足  $N_G(Z(J(Q))) \leq M$ , 于是  $G = MN$ . 当然  $N \triangleleft M$ , 现在证明  $|G:M|_q = 1$ . 因为  $N \triangleleft G$ , 故存在  $Q^* \in \text{Syl}_q(G)$ , 使  $Q = Q^* \cap N$ , 所以,  $Q^* \leq N_G(Q^*) \leq N_G(Z(J(Q^*))) \leq N_G(Z(J(Q))) \leq M$  所以  $|G:M|_q = 1$ , 即  $M \in F_q(G)$ . 而由  $N$  的唯一性得:  $M_G = 1$ , 于是  $Sec(M) = N \cap M$ , 又因为  $N_N(Z(J(Q))) =$

$N_G(Z(J(Q))) \cap N \leq M \cap N$  依假设  $Sec(M) = N \cap M$  为  $\pi$  闭, 故  $N_N(Z(J(Q)))$  也为  $\pi$  闭, 即  $N_N(Z(J(Q)))$  有正规  $\pi$ -Hall 子群, 记为  $H$ . 由 Zassenhause 定理可知,  $H$  在  $N_N(Z(J(Q)))$  中有补, 即  $N_N(Z(J(Q))) = HK$ , 且  $M \cap K = 1$ . 也就是说  $N_N(Z(J(Q)))$  中有正规  $\pi$  补. 根据引理 1.4,  $N$  有正规  $\pi$  补, 当然  $\pi$ -可分, 结合  $H/N$  为  $\pi$ -可分, 得  $H$  为  $\pi$ -可分, 与  $G$  是极小阶反例矛盾, 从而命题得证.

**推论 2.7** 设  $\pi$  为奇素数集合, 若对每个  $M \in F_p(G)$ , 其中  $p \in \pi$ , 有  $Sec(M)$  为  $\pi$ -闭, 则群  $G$  为  $\pi$ -可分.

### 3 结束语

本文所使用的通过考虑有限群  $G$  的某个给定正规子群的可解性, 从而得到群  $G$  的可解性的方法, 是分类有限群的有效手段, 有一定的理论意义.

致谢:

本文的完成得到了钟祥贵副教授的热情帮助, 谨此表示感谢!

参考文献:

- [1] LI SHIRONG, WANG YANMING. On C-section and C-index of finite groups[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 151: 309-319.
- [2] DESKINS W E. On maximal subgroups[J]. Proc Symp Pure Math, 1959, 1: 100-104.
- [3] 钟祥贵. CI-截与群的可解性[J]. 广西科学, 2002, 9(2): 101-103.
- [4] 樊恽. 关于极大子群的三个问题[J]. 数学学报, 1986, 29(5): 629-631.
- [5] 陈重穆. 内外- $\Sigma$ 群与极小非 $\Sigma$ 群[M]. 重庆: 西南师范大学出版社, 1998.
- [6] GORENSTEIN D. Finite Simple Groups[M]. New York: 1982.
- [7] HUPPERT B. Endliche Gruppen I [M]. New York: Berlin Heidelberg, 1967.

(责任编辑: 邓大玉)

## 科学家首次观测到实验鼠脑神经细胞发育过程

以色列研究人员利用先进的成像观测技术, 首次成功地对实验鼠大脑神经细胞的发育过程进行了实时观测。

以色列希伯来大学生命科学研究所的阿迪·米兹拉希教授选取实验鼠大脑中新生神经细胞群会发育为成年鼠的“嗅球”, 即掌控嗅觉的大脑神经细胞进行观察。通过利用显微成像技术和病毒基因技术等开发出的实验模型, 他们跟踪观测到活体实验鼠大脑内神经细胞树突的形成呈现出“高度动态性”, 并记录下了实验鼠这一特殊大脑区域内新生神经细胞在发育的不同阶段的表现, 发现这些新生的神经细胞发育成熟后参与大脑神经网络的活动, 也仍然保持高度活跃的状态, 处于不断变化之中。

目前, 神经细胞功能和结构上的复杂性仍然是神经系统科学中“充满神秘感的”领域。能够直接地、实时地观测到活体实验鼠大脑中未分化的细胞球一步步发育为单个的复杂神经细胞, 对未来的大脑研究领域具有重大意义。

(据科学网)