关于态射加权 Moore-Penrose 逆的倒换顺序律*

About the Reverse Order Law of Weighted Moore-Penrose Inverse for Morphisms

邓泽喜,刘晓冀

DENG Ze-xi, LIU Xiao-ji

(广西民族大学数学与计算机科学学院,广西南宁 530006)

(College of Mathematics and Computer Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning, Guangxi, 530006, China)

摘要:利用态射加权 Moore-Penrose 逆的性质给出态射加权 Moore-Penrose 逆的倒换顺序律成立的 8 种等价刻画,推广态射 Moore-Penrose 逆的相应结论.

关键词:态射 加权 Moore-Penrose 逆 倒换顺序律

中图法分类号:O153 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2007)02-0085-02

Abstract: With the help of characterizations of the weighted Moore-Penrose inverse of morphisms, eight kinds of the characterizations on the reverse law are obtained, some results on the weighted Moore-Penrose inverse of morphisms are extended.

Key words: morphism, weighted Moore-Penrose inverse, reverse law

文献[1]讨论了态射的 Moore-Penrose 逆倒换顺序律成立的若干种等价刻画,文献[2,3]给出了加权 Moore-Penrose 逆存在的充要条件和一些表达式.本文研究态射加权 Moore-Penrose 逆的倒换顺序律刻画,推广文献[1,4]的相应结论.

1 相关定义和引理

本文约定,D 是一个范畴,$M(A,B)$ 表示范畴 D 中由对象 A,B 确定的态射集,态射用小写字母表示,记$[a,b]=ab-ba$.设 $A,B,C,E\in obD, a\in M(A,B)$,记

$aM(B,C)=\{ax: x\in M(B,C)\}$,

$M(E,A)a=\{ya: y\in M(E,A)\}$.

定义 1 设 D 是带对合 $*$ 的范畴,m,n 分别为可逆对称态射,称 $n^{-1}a^*m$ 为态射 a 的加权对合,记为 $a^\#$.若 $a^\#=a$,称 a 为 #-对称态射.

定义 2 设 D 是带对合 $*$ 的范畴,$\alpha\in M(X,Y)$ 为范畴 D 中的态射,$\beta\in M(Y,Y)$ 和 $\gamma\in M(X,X)$ 均为 D 中的对称态射,若存在态射 $x\in M(Y,X)$ 使

(1)$\alpha\beta x\gamma\alpha=\alpha$,

(2)$x\gamma\alpha\beta x=x$,

(3)$(\alpha\beta x)^*=\alpha\beta x$,

(4)$(x\gamma\alpha)^*=x\gamma\alpha$,

则称态射 x 为态射 α 关于态射 β,γ 的加权 Moore-Penrose 逆,记为 $\alpha^+_{\beta,\gamma}$.

引理 1 设 D 是带对合 $*$ 的范畴,m,n 分别为可逆对称态射,$a,b\in M(A,B), c\in M(B,C)$,则

(1)$(a^\#)^\#=a$;

(2)$(a+b)^\#=a^\#+b^\#$;

(3)$(ac)^\#=c^\#a^\#$.

定义 3 称范畴 D 关于态射 m 为满足正性条件,若对 D 中任意的态射 b,$b^*mb=0$ 当且仅当 $b=0$.

由定义 3 可知:

引理 2 若范畴 D 关于态射 m 满足正性条件,则

(1) 范畴 D 关于态射 m^* 满足正性条件;

(2) 若 m 为可逆态射,则范畴 D 关于态射 m^{-1} 满足正性条件.

引理 3 设 $A,B,C\in obD, a\in M(A,B), b\in$

收稿日期:2006-06-26

作者简介:邓泽喜(1982-),男,硕士研究生,主要从事广义逆研究。

*广西科学基金(0575032,0640016),广西教育厅科研项目(桂教科研[2005]47 号),广西高校百名中青年学科带头人资助计划和广西民族大学重大科研项目联合资助。

$M(B,C)$, $m\in M(A,A)$, $n\in M(B,B)$, $k\in M(C,C)$, m,n,k 分别为可逆对称态射，$a^{+}_{m,n}$, $b^{+}_{n,k}$ 存在，则

(1) 若 $[na^{\#}an, bkb^{+}_{n,k}n]=0$，则 $[a^{+}_{m,n}man, bkb^{+}_{n,k}n]=0$，且 $anbkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}m$ 是 #-对称态射；

(2) 若 $[a^{+}_{m,n}man, bk^{2}b^{\#}]=0$，则 $[a^{+}_{m,n}man, bkb^{+}_{n,k}n]=0$，且 $b^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}manbk$ 是 #-对称态射.

证明 容易知 $a^{+}_{m,n}man=(a^{+}_{m,n}ma)^{*}n=a^{*}m(a^{+}_{m,n})^{*}n=na^{\#}m(a^{+}_{m,n})^{\#}$，同理有 $ana^{+}_{m,n}m=(ana^{+}_{m,n})^{*}m=(a^{+}_{m,n})^{*}na^{*}m=m(a^{+}_{m,n})^{\#}na^{\#}$.

则 $anbkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}m=ana^{+}_{m,n}manbkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}m=$
$m(a^{+}_{m,n})^{\#}na^{\#}anbkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}m=$
$m(a^{+}_{m,n})^{\#}bkb^{+}_{n,k}n^{2}a^{\#}ana^{+}_{m,n}m=$
$m(a^{+}_{m,n})^{\#}n(b^{+}_{n,k})^{\#}kb^{\#}na^{\#}ana^{+}_{m,n}m=$
$m(a^{+}_{m,n})^{\#}n(b^{+}_{n,k})^{\#}kb^{\#}na^{\#}m(a^{+}_{m,n})^{\#}na^{\#}=$
$m(a^{+}_{m,n})^{\#}n(b^{+}_{n,k})^{\#}kb^{\#}na^{\#}$.

由定义 1 知 $anbkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}m$ 是 #-对称态射.

则 $a^{+}_{m,n}manbkb^{+}_{n,k}n=a^{+}_{m,n}mana^{+}_{m,n}manbkb^{+}_{n,k}n=$
$a^{+}_{m,n}m^{2}(a^{+}_{m,n})^{\#}na^{\#}anbkb^{+}_{n,k}n=$
$a^{+}_{m,n}m^{2}(a^{+}_{m,n})^{\#}bkb^{+}_{n,k}n^{2}a^{\#}an=$
$a^{+}_{m,n}m^{2}(a^{+}_{m,n})^{\#}n(b^{+}_{n,k})^{\#}kb^{\#}na^{\#}an=$
$a^{+}_{m,n}manbkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}man$.

同理可证 $bkb^{+}_{n,k}na^{\#}_{m,n}man=a^{+}_{m,n}manbkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}man$ 故 $[a^{+}_{m,n}man, bkb^{+}_{n,k}n]=0$. 类似地可以证明(2) 成立.

引理 4 设 $A,B,C,E\in obD$, $a\in M(A,B)$, $b\in(C,E)$, $c\in(B,E)$, $m\in M(A,A)$, $n\in M(B,B)$, $k\in M(C,C)$, $t\in M(E,E)$, m,n,k,t 分别为可逆对称态射，若 $c^{+}_{n,t}$ 存在，则

(1) $actc^{+}_{n,t}nM(B,X)=act^{2}c^{\#}M(B,X)$, $\forall X\in obD$;

(2) $bc^{+}_{n,t}nctM(E,Y)=btc^{\#}ctM(E,Y)$, $\forall Y\in obD$.

证明 $\forall\, actc^{+}_{n,t}n\in actc^{+}_{n,t}nM(B,X)$, $x\in M(B,X)$，则 $actc^{+}_{n,t}nx=actc^{+}_{n,t}nctc^{+}_{n,t}nx=act^{2}c^{\#}n(c^{+}_{n,t})^{\#}c^{+}_{n,t}nx\in act^{2}c^{\#}M(B,X)$.

即 $actc^{+}_{n,t}nM(B,X)\subseteq act^{2}c^{\#}M(B,X)$.

类似地可以证 $act^{2}c^{\#}y=act^{2}c^{\#}n(c^{+}_{n,t})^{\#}tc^{\#}y=actc^{+}_{n,t}nct^{2}c^{\#}y\subseteq actc^{+}_{n,t}nM(B,X)$, $\forall y\in M(B,X)$.

因此 $actc^{+}_{n,t}nM(B,X)=act^{2}c^{\#}M(B,X)$. 同理可证明(2) 成立.

2 态射加权 Moore-Penrose 逆的倒换顺序律的等价刻画

定理 设 $A,B,C\in obD$, $a\in M(A,B)$, $b\in M(B,C)$, $m\in M(A,A)$, $n\in M(B,B)$, $k\in M(C,C)$, m,n,k，分别为可逆对称态射，若 A,B,C 由决定的 D 的完全在范畴 D^{-} 带有对合 $*$，且关于 m,n,k 满足正性条件，存在 $a^{+}_{m,n}$, $b^{+}_{n,k}$ 则下列命题等价：

(1) $(anb)^{+}_{m,k}$ 存在，且 $(anb)^{+}_{m,k}=b^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}$;

(2) $na^{\#}anb=bkb^{+}_{n,k}n^{2}a^{\#}anb$, $bk^{2}b^{\#}na^{\#}=a^{+}_{m,n}manbk^{2}b^{\#}na^{\#}$;

(3) $[na^{\#}an, bkb^{+}_{n,k}n]=0$, $[a^{+}_{m,n}man, bk^{2}b^{\#}]=0$;

(4) $[na^{\#}an, bkb^{+}_{n,k}n]=0$，且 $anbkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}m$ 是 #-对称态射；

(5) $[na^{\#}an, bkb^{+}_{n,k}n]=0$，且 $b^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}manbk$ 是 #-对称态射；

(6) $[a^{+}_{m,n}man, bkb^{+}_{n,k}n]=0$，且 $anbkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}m$, $b^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}manbk$ 是 #-对称态射；

(7) $(a^{+}_{m,n}manbkb^{+}_{n,k}n)^{+}_{n,n}=a^{+}_{m,n}manbkb^{+}_{n,k}n$，且 $anbkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}m$, $b^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}manbk$ 是 #-对称态射；

(8) $na^{\#}anbk^{2}b^{\#}M(A,X)=bk^{2}b^{\#}na^{\#}anM(A,X)$;

(9) $na^{\#}anbM(C,X)\subseteq bM(C,X)$, $bk^{2}b^{\#}na^{\#}M(A,X)\subseteq na^{\#}M(A,X)$.

证明 只要证明蕴含关系 (1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)⇒(6)⇒(7)⇒(1)，(3)⇒(5)⇒(6)，还有(3)⇒(8)⇒(9)⇒(2) 即可.

(1)⇒(2)：若 $(anb)^{+}_{m,k}$ 存在，且 $(anb)^{+}_{m,k}=b^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}$，则 $b^{\#}na^{\#}anbkb^{+}_{n,k}n^{2}a^{\#}anb=$
$b^{\#}na^{\#}anbkb^{+}_{n,k}n^{2}a^{\#}m(a^{+}_{m,n})^{\#}na^{\#}anb=$
$b^{\#}na^{\#}anbkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}man^{2}a^{\#}anb=$
$k^{-1}(anb)^{*}m[(anb)^{+}_{m,k}]^{*}k(anb)^{*}man^{2}a^{\#}anb=$
$b^{\#}na^{\#}an^{2}a^{\#}anb$，故 $b^{\#}na^{\#}an(i-bkb^{+}_{n,k}n)na^{\#}anb=0$.

同时注意到 $(i-bkb^{+}_{n,k}n)(i-bkb^{+}_{n,k}n)^{\#}=i-bkb^{+}_{n,k}n$，因此 $na^{\#}anb=bkb^{+}_{n,k}n^{2}a^{\#}anb$.

同理可证 $bk^{2}b^{\#}na^{\#}=a^{+}_{m,n}manbk^{2}b^{\#}na^{\#}$.

(2)⇒(3)：由 $na^{\#}anb=bkb^{+}_{n,k}n^{2}a^{\#}anb$，有

$$na^{\#}anbkb^{+}_{n,k}n=bkb^{+}_{n,k}n^{2}a^{\#}anbkb^{+}_{n,k}n=$$
$bkb^{+}_{n,k}n^{2}a^{\#}an^{2}(b^{+}_{n,k})^{\#}kb^{\#}=(bkb^{+}_{n,k}n^{2}a^{\#}anbkb^{+}_{n,k}n)^{\#}=$
$(na^{\#}anbkb^{+}_{n,k}n)^{\#}=[na^{\#}an^{2}(b^{+}_{n,k})^{\#}kb^{\#}]^{\#}=$
$bkb^{+}_{n,k}n^{2}a^{\#}an$.

于是 $[na^{\#}an, bkb^{+}_{n,k}n]=0$. 类似可证 $[a^{+}_{m,n}man, bk^{2}b^{\#}]=0$.

(3)⇒(4)⇒(6)，(3)⇒(5)⇒(6) 均可由引理 3 得知.

(6)⇒(7)：容易验证 $(a^{+}_{m,n}manbkb^{+}_{n,k}n)^{+}_{n,n}=a^{+}_{m,n}manbkb^{+}_{n,k}n$.

(7)⇒(1)：此时可直接验证 $b^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}$ 是 anb 的加

(下转第 90 页 Continue on page 90)

$$\zeta_0)\exp(\int_0^t - h(s)\mathrm{d}s - b_2B(t) + \frac{b_2t^2}{2}), \tag{40}$$

其中

$$\theta_2 = -\frac{2c_0}{\alpha}\exp(\int_0^t - h(s)\mathrm{d}s - b_2B(t) + \frac{b_2t^2}{2})x +$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^t \{4b_0c_0^3\exp[\int_0^s - 3h(\tau)\mathrm{d}\tau - 3b_2B(s) + \frac{3b_2s^2}{2}] -$$

$$8c_0b_1\exp(\int_0^s - h(\tau)\mathrm{d}\tau - b_2B(s) + \frac{b_2s^2}{2})\}\delta B(s). \tag{41}$$

4 结论

本文通过 Hermite 变换把 Wick-类型的广义随机 KdV 方程和广义随机 mKdV 方程变成普通的 KdV 方程，利用截断展开法和延拓齐次平衡法求出方程的解，然后通过 Hermite 的逆变换求出相应方程的随机钟状类孤子解. 这些方法可以求出一大类随机非线性演化方程的随机类孤子解，也可以推广应用到(2+1)维或更复杂的有物理背景的随机非线性演化方程.

参考文献:

[1] 闫振亚，张鸿庆. 具有三个任意函数的变系数 KdV-mKdV 方程的精确孤子解[J]. 物理学报，1999，48(1)：1957-1961.

[2] 阮航宇，陈一新. 寻找变系数非线性方程精确解的新方法[J]. 物理学报，2001，50(4)：577-580.

[3] 张解放，陈芳跃. 截断展开法和广义变系数 KdV 方程的精确类孤子解[J]. 物理学报，2001，50(9)：1648-1650.

[4] FAN E G, ZHANG H Q, LIN G. Backlund transformation, Lax pairs, symmetries and exact solutions for variable coefficient KdV equations[J]. Acta Physica Sinica: Overseas Edition, 1998, 7(9): 649-654.

[5] 张玉峰，孔令臣，杨耕文. 广义变系数 KdV，mKdV 方程的精确类孤子解[J]. 甘肃工业大学学报，2002，28(3)：115-117.

[6] 李德生，张鸿庆. 改进的 tanh 函数方法与广义变系数 KdV 和 MKdV 方程新的精确解[J]. 物理学报，2003，52(7)：1569-1573.

[7] WADATI M. Stochastic Korteweg-de Veries equation [J]. J Phys Soc Jpn, 1983, 52: 2642-2648.

[8] HOLDEN H, ΦSENDAL B, UBΦE J, et al. Stochastic partial differential equations [M]. Berlin: Birhkäuser, 1996.

[9] DE BOUARD A, DEBUSSCHE A. White noise driven Korteweg-de Vries equation[J]. J Funct Anal, 1999, 169 (2): 532-558.

[10] PRINTEMS J. The stochastic Korteweg-de Vries equation in[J]. J Differen Equat, 153: 338-373.

[11] XIE Y C. Exact solutions for stochastic KdV equations [J]. Physics Letters A, 2003, 310: 161-167.

[12] 韦才敏，夏尊铨，田乃硕. 广义随机 KdV 方程的精确类孤子解[J]. 物理学报，2005，54(6)：2463-2467.

[13] XIE Y C. Positonic solutions for Wick-type stochastic KdV equations[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 20: 337-342.

[14] CHEN Y, WANG Q, LI B. The stochastic soliton-like solutions of stochastic KdV equations [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 23: 1465-1473.

(责任编辑：邓大玉)

(上接第 86 页 Continue from page 86)

权 Moore-Penrose 逆.

(3)⇒(8)：$\forall\ X \in obD^-$，由引理 4，有

$na^{\#}anbk^2b^{\#}M(B,X) = na^{\#}anbkb^{+}_{n,k}nM(B,X) = bkb^{+}_{n,k}n^2a^{\#}anM(B,X) = bkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}manM(B,X)$.

同理 $bk^2b^{\#}na^{\#}anM(A,X) = bkb^{+}_{n,k}na^{+}_{m,n}manM(B,X)$，故 $na^{\#}anbk^2b^{\#}M(A,X) = bk^2b^{\#}na^{\#}anM(A,X), \forall\ X \in obD^-$.

(8)⇒(9)：$\forall\ X \in obD^-$，由引理 4，有

$na^{\#}anbM(B,X) = bkb^{+}_{n,k}n^2a^{\#}anbM(B,X) \subseteq bkb^{+}_{n,k}n^2a^{\#}anM(B,X) = na^{\#}anbk^2b^{\#}M(B,X) = bk^2b^{\#}na^{\#}anM(B,X) \subseteq bM(B,X)$.

类似可证 $bk^2b^{\#}na^{\#}M(A,X) \subseteq na^{\#}M(A,X)$.

(9)⇒(2)：$na^{\#}anbM(C,X) \subseteq bM(C,X)$，则存在 $x \in M(C,C)$，使 $na^{\#}anb = bx = bkb^{+}_{n,k}nbx = bkb^{+}_{n,k}n^2a^{\#}anb$.

同理可证 $bk^2b^{\#}na^{\#} = a^{+}_{m,n}manbk^2b^{\#}na^{\#}$.

当 m,n,k 分别为单位态射时，即得文献[1,4]的相应结论.

参考文献:

[1] 庄瓦金. 关于态射的 * Moore-Penrose 逆的倒换顺序律的刻画[J]. 华中师范大学学报，1992(专集)：51-53.

[2] 刘桂香. 关于态射的加权 Moore-Penrose 逆[J]. 数学理论与应用，2002，22(3)：34-39.

[3] 朱萍，曹永知. 态射的加权 Moore-Penrose 逆[J]. 数学物理学报，2001，21A(1)：36-42.

[4] WANG G R, WEI Y M, QIAO S Z. Generalized inverses: theory and computations [M]. Beijing/New York: Science Press, 2004.

(责任编辑：韦廷宗)