正定矩阵的推广及其在线性互补问题中的应用*

Extension and Application of Positive Definite Matrix in Linear Complementary

雍龙泉

YONG Long-quan

(陕西理工学院数学系，陕西汉中 723001)

(Department of Mathematics，Shanxi University of Technology，Hanzhong，Shanxi，723001，China)

摘要：从广义正定矩阵的概念出发，把广义正定矩阵推广到 P 矩阵和 S 矩阵，指出这些矩阵之间的关系，提出可以用广义正定矩阵来判别线性互补问题的解的存在性和唯一性.

关键词：正定矩阵 P 矩阵 S 矩阵 线性互补

中图法分类号：O151.21 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-9164(2007)02-0120-02

Abstract：The definition of generalized positive definite matrix is introduced. We extend it into P-matrix and S-matrix. The inner relations of these matrixes are pointed. Finally，the applications of these matrixes are obtained in linear complementary problem to decide the existence and uniqueness of solution.

Key words：positive definite matrix，P-matrix，S-matrix，linear complementary

正定矩阵是计算数学、数学物理、控制论等领域中具有广泛应用的重要矩阵类，其应用引起人们极大的研究兴趣. 目前对正定矩阵的研究，主要集中在理论研究与工程应用方面[1]. 线性互补是线性规划和二次规划的推广，其一般形式是：求 $(x,y)\in R^{2n}$，满足 $x^Ty=0, y=Mx+q, x\geqslant 0, y\geqslant 0$，其中 $M\in R^{n\times n}$，$q\in R^n$. 线性互补问题简记为 $LCP(M,q)$. 线性互补作为一类新的数学模型，它已成为数学规划的一个重要分枝，在矩阵对策，经济均衡，障碍，供应链等问题中有着重要的应用[2]. 对于一个给定的线性互补问题，它是否有解，是否存在唯一解，往往不是容易弄清的. 关于线性互补问题解的存在性、唯一性已经成为优化界的一个热点问题[3]. 本文从广义正定矩阵的概念出发，把广义正定矩阵推广到 P 矩阵和 S 矩阵，指出这些矩阵类之间的关系，提出可以用该类正定矩阵来判别线性互补问题的解的存在性和唯一性.

1 预备知识

定义 1[2] 矩阵 $M\in R^{n\times n}$ 被称为半正定矩阵，如果对 $\forall\ x\in R^n$，都有 $x^TMx\geqslant 0$；M 被称为正定矩阵，如果对 $\forall\ x\in R^n, x\neq 0$，都有 $x^TMx>0$.

这里定义的半正定矩阵与正定矩阵不限制是对称矩阵，因此，这样定义的正定矩阵我们称为广义正定矩阵. 显然，广义正定矩阵包含一般正定矩阵. 若无特别说明，本文以下所涉及的正定矩阵均为广义正定矩阵.

定义 2[4] 矩阵 $M\in R^{n\times n}$ 被称为 P_0 矩阵，如果 $\forall\ x\in R^n, x\neq 0$，存在一分量 $x_i\neq 0$，使得 $x_i[Mx]_i\geqslant 0$；矩阵 $M\in R^{n\times n}$ 被称为 P 矩阵，如果 $\forall\ x\in R^n, x\neq 0$，存在一分量 $x_i\neq 0$，使得 $x_i[Mx]_i>0$.

由定义 2 可以得到：若 M 是 P_0(或 P) 矩阵，则 M^T 也是 P_0(或 P) 矩阵.

结合定义 1 和定义 2，则有半正定矩阵必是 P_0 矩阵，正定矩阵必是 P 矩阵. 所以 P_0 矩阵与 P 矩阵分别是半正定矩阵与正定矩阵的推广.

定义 3[2] 矩阵 $M\in R^{n\times n}$ 被称为 S_0 矩阵，如果不等式组 $Mx\geqslant 0, x\geqslant 0, x\neq 0$ 有解；矩阵 $M\in R^{n\times n}$ 被称为 S 矩阵，如果不等式组 $Mx>0, x>0$ 有解.

由定义 3 可以得到：正定矩阵必是 S 矩阵.

收稿日期：2006-09-25

修回日期：2006-11-23

作者简介：雍龙泉(1980-)，男，硕士，讲师，主要从事优化算法及应用研究。

*陕西理工学院科研基金项目(SLGQD0517)资助。

引理 1(择一公里) 考虑一对齐次线性不等式组(Ⅰ)$Ax>0, x\geqslant 0$与(Ⅱ)$u^TA\leqslant 0, u\geqslant 0$;则(Ⅰ)有解的充分必要条件为(Ⅱ)无解.

证明参考文献[5].

引理 2 P矩阵必是S矩阵.

证明 设M是一P矩阵但不是S矩阵,即$Mx>0, x>0$无解.而$Mx>0, x>0$无解当且仅当$Mx>0, x\geqslant 0$无解.利用择一公里,则不等式组$M^Ty\leqslant 0, y\geqslant 0, y\neq 0$必有解.由此可知$M^T$不是$P$矩阵,这与$M$是$P$矩阵相矛盾.证毕.

由此也可知,{正定矩阵}$\subset${P矩阵}$\subset${S矩阵}.

引理 3 若二次函数$q(x)=\frac{1}{2}x^TMx+q^Tx$在一非空多面体$S$中有下界,则$q(x)$在$S$中必有全局极小解.

证明参考文献[6].

2 主要结果

定理 1 矩阵$M\in R^{n\times n}$是一S矩阵,当且仅当对于任意$q\in R^n$,线性互补问题$LCP(M,q)$有可行解.

证明 对于任意$q\in R^n$,$LCP(M,q)$有可行解,若取$q=-e=-(1,1,\cdots,1)^T$,则不等式组$Mx\geqslant e, x\geqslant 0$有解.故可推出$Mx>0, x>0$有解,即证明了$M$是一$S$矩阵.反之,若$M$是一$S$矩阵,令$\bar{x}$是$Mx>0, x>0$的一个解.对于任意$q\in R^n$,取$\lambda>0$充分大,可得$M(\lambda\bar{x})=\lambda M\bar{x}\geqslant -q$,即$\lambda\bar{x}$是$LCP(M,q)$的一个可行解.

定理 2 设矩阵$M\in R^{n\times n}$是一半正定矩阵,对于任意$q\in R^n$,若$LCP(M,q)$是可行的,则$LCP(M,q)$必有解,且其解集为凸集.

证明 $LCP(M,q)$可以等价于二次规划$(QP1)$.将目标函数中二次函数项$x^T(Mx+q)$表示为对称矩阵二次项$\frac{1}{2}x^T(M+M^T)x$,则$(QP1)$可以等价地写成$(QP2)$.$(QP1)$与$(QP2)$如下所示:

$$(QP1)\begin{cases}\min x^T(Mx+q),\\ s.t.\ Mx+q\geqslant 0, x\geqslant 0;\end{cases}$$

$$(QP2)\begin{cases}\min \frac{1}{2}x^T(M+M^T)x+q^Tx,\\ s.t.\ Mx+q\geqslant 0, x\geqslant 0.\end{cases}$$

这里$M+M^T$仍是一半正定矩阵,由于$\nabla(x^T(M+M^T)x)=2(M+M^T)x$;因此这是一个凸规划,其目标值有下界,且下界为零,利用引理3,必存在x满足$K-T$条件:

$$q+(M+M^T)x-M^Tu\geqslant 0; \qquad (1)$$

$$x^T[q+(M+M^T)x-M^Tu]=0; \qquad (2)$$

$$u\geqslant 0, u^T(Mx+q)=0; \qquad (3)$$

$$x\geqslant 0, Mx+q\geqslant 0. \qquad (4)$$

其中u为Lagrange乘子.由(1)式可知

$$-u^Tq\leqslant u^T(M+M^T)x-u^TM^Tu.$$

因此

$$0\leqslant x^T(Mx+q)=x^T(Mx+q)-u^T(Mx+q)-x^T[q+(M+M^T)x-M^Tu]=-x^TMx-u^Tq\leqslant -x^TMx+u^T(M+M^T)x-u^TM^Tu=-\frac{1}{2}(x-u)^T(M+M^T)(x-u)\leqslant 0,$$

从而$x^T(Mx+q)=0$,这说明x是$LCP(M,q)$的解.

为了证明$LCP(M,q)$的解集为凸集,设(x^1,y^1),(x^2,y^2)是$LCP(M,q)$的解,记$(x(\lambda),y(\lambda)):=\lambda(x^1,y^1)+(1-\lambda)(x^2,y^2), \forall\lambda\in[0,1]$,显然$(x(\lambda),y(\lambda))\geqslant 0$.由于$(x^1)^Ty^1=0$,$(x^2)^Ty^2=0$,$(x^1,y^1)\geqslant 0$,$(x^2,y^2)\geqslant 0$.利用$M$的半正定性知

$$0\leqslant(x^2-x^1)^TM(x^2-x^1)=(x^2-x^1)^T(y^2-y^1)=-(x^2)^Ty^1-(x^1)^Ty^2\leqslant 0.$$

于是得到$(x^2)^Ty^1=0$,$(x^1)^Ty^2=0$,由此推出

$$(x(\lambda))^Ty(\lambda)=(\lambda x^1+(1-\lambda)x^2)^T(\lambda y^1+(1-\lambda)y^2)=\lambda(1-\lambda)[(x^1)^Ty^2+(x^2)^Ty^1]=0.$$

这说明$(x(\lambda),y(\lambda))$也是$LCP(M,q)$的解.于是$LCP(M,q)$的解集为凸集.

定理 3 设矩阵$M\in R^{n\times n}$是一正定矩阵,则对于任意$q\in R^n$,$LCP(M,q)$有唯一解.

证明 因M是正定矩阵,则M必是P矩阵.根据引理2和定理1,对于任意$q\in R^n$,$LCP(M,q)$必是可行的.再根据定理2,$LCP(M,q)$有解x^*,而且x^*也必是二次规划$(QP1)$的全局极小解.因目标函数$x^T(Mx+q)$是严格凸函数,故二次规划$(QP1)$只有唯一解.这就证明了$LCP(M,q)$也只有唯一解.

参考文献:

[1] ROGER A HORN, CHARLES R JOHNSON. Matrix analysis[M]. New York: Cambridge University Press, 1990.

[2] COTTLE R W, PANG J S, STONE R E. The linear complementary problem[M]. New York: Academic, 1992:141-149.

[3] 寇述舜.关于线性互补问题解的存在性[J].应用数学和力学,1995,16(7):641-643.

[4] BAZARRA M S, SHETTY C M. Nonlinear programming[M]. New York: Wiley, 1979:571-593.

[5] 魏权龄.广义最优化理论与模型[M].北京:科学出版社,2003.

[6] FRANK M, WOLFE P. An algorithm for quadratic programming[J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1956(3):95-110.

(责任编辑:邓大玉)