两两 NQD 列的一个弱大数定律*

A Weak Law of Large Number for Pairwise NQD Random Sequences

黄海午，吴群英，王 瑶
HUANG Hai-wu，WU Qun-ying，WANG Yao

(桂林工学院数理系，广西桂林 541004)
(Department of Mathematics and Physics，Guilin University of Technology，Guilin，Guangxi，541004，China)

摘要：研究一类广泛的随机变量序列 NQD 列的收敛性质，获得与独立情形一样的弱大数定律，而且得到了同分布 NQD 列的相应结果.

关键词：两两 NQD 列 独立 弱大数定律

中图法分类号：O211.4 **文献标识码**：A **文章编号**：1005-9164(2007)02-0122-02

Abstract：This paper makes a study of the convergence properties of widely used pairwise NQD random sequences；some weak laws of large number in the pairwise independence case are acquired；and some results for Indentically Distributed NQD Random Sequences are obtained.

Key words：pairwise NQD sequences，independence，weak law of large number

Lehmann[1]在 1966 年提出定义

称 $r.v.\ X$ 和 Y 是 NQD(Negatively Quadrant Dependent)的，若对 $\forall\ x,y\in R$ 有

$$P(X<x,Y<y)\leqslant P(X<x)P(Y<y).$$

称 $r.v.$ 列 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是两两 NQD 的，若 $\forall\ i\neq j$，X_i 与 X_j 是 NQD 的.

此后 Matula 获得了与独立情形一样的 Kolmogorov 型强大数定律[2]. 由定义可以看出两两 NQD 列是一类非常广泛的 $r.v.$ 列，通常的独立随机变量序列可以认为是两两 NQD 列的相当特殊的情形，因此利用它可以解决大量实际中存在的问题. 因而，对两两 NQD 列的研究就显得更为基本，更为困难. 本文主要考虑 NQD 列的收敛性质，得到一类重要的极限定理.

以下文中出现的 C 表示正常数，"$<<$"表示"O".

1 主要引理和证明

引理 1[1] 设 $r.v.\ X$ 和 Y 是 NQD 的，则

(Ⅰ)$EXY\leqslant EXEY$；

(Ⅱ)对于 $\forall\ x,y\in R$，$P(X>x,Y>y)\leqslant P(X>x)P(Y>y)$；

(Ⅲ)如 r,s 同为非降(或非增)函数，则 $r(X)$ 和 $s(Y)$ 仍为 NQD 的.

引理 2[3] 设 $\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是两两 NQD 列，$EX_n=0$，$EX_n^2<\infty$，$T_j(k)=\sum_{i=j+1}^{j+k}X_i$，$j\geqslant 0$，则有

$$E(T_j(k))^2\leqslant\sum_{i=j+1}^{j+k}EX_i^2;$$

$$E(\max_{1\leqslant j\leqslant n}(T_j(k))^2)\leqslant C\log^2 n\sum_{i=j+1}^{j+n}EX_i^2.$$

证明 由两两 NQD 性，$EX_n=0$，根据引理 1(Ⅰ)有

$$E(T_j(k))^2\leqslant\sum_{i=j+1}^{j+k}EX_i^2+2\sum_{j+1\leqslant i<l\leqslant j+k}EX_iEX_l=\sum_{i=j+1}^{j+k}EX_i^2\equiv g(j,k),$$

且 $g(j,k)+g(j+k,m)=g(j,k+m)$，$m\geqslant 1$，所以由文献[4]附录有

收稿日期：2006-11-02

作者简介：黄海午(1982-)，男，硕士研究生，主要从事数值计算和极限理论研究。

*国家自然科学基金(10661006)，广西高校百名中青年学科带头人资助计划(桂教人[2005]64)项目资助。

$$E(\max_{1\leqslant k\leqslant n}(T_j(k))^2) \leqslant \left(\frac{\log(2n)}{\log 2}\right)^2 \sum_{i=j+1}^{j+n} EX_i^2 \leqslant$$

$$C\log^2 n \sum_{i=j+1}^{j+n} EX_i^2.$$

引理 3[5] 设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是任意随机序列，如存在某 $r.v.X$，使得对于$\forall\ x>0,n\geqslant 1$，有$P(|X_n|\geqslant x)\leqslant CP(|X|\geqslant x)$，则对于$\forall\ \beta>0,\forall\ t>0$有

$$E|X_n|^\beta I(|X_n|\leqslant t)\leqslant C(E|X|^\beta I(|X|\leqslant t)+ t^\beta P(|X|>t)), \quad (1)$$

$$E|X_n|^\beta I(|X_n|>t)\leqslant CE|X|^\beta I(|X|>t). \quad (2)$$

2 主要结果和证明

定理 设$0<p<2$，$\{X_n;n\geqslant 1\}$是一个两两 NQD 列，$\exists\ r.v.X$ 满足$\forall\ x>0$，有

$P(|X_n|>x)\leqslant CP(|X|>x)$，$n\geqslant 1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p P(|X|>n)=0$，

则存在实数列$\{b_n;n\geqslant 1\}$使得

$$n^{-1/p}(S_n-b_n)\xrightarrow{P}0,n\to\infty. \quad (3)$$

证明 记$\alpha=\dfrac{1}{p}$，对$\forall$ 的实数b_n。由弱对称不等式

$$P(|S_n-m(S_n)|\geqslant \varepsilon n^\alpha)\leqslant 2P(|S_n^s|\geqslant \varepsilon n^\alpha)\leqslant 4P(|S_n-b_n|\geqslant \frac{\varepsilon n^\alpha}{2}),$$

其中$S_n^s=S_n-S'_n$，S'_n是与S_n独立同分布的$r.v.$由上可知，如果存在实数b_n，使得$(S_n-b_n)n^{-\alpha}\xrightarrow{P}0$，则$S_n^s n^{-\alpha}\xrightarrow{P}0$。反之，如果$S_n^s n^{-\alpha}\xrightarrow{P}0$，则存在$b_n=m(S_n)$使得$(S_n-b_n)n^{-\alpha}\xrightarrow{P}0$。又因为两两 NQD 的对称化序列仍然是两两 NQD 序列，故只需对对称化序列证明(3)式成立。

不妨设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是对称化的两两 NQD 序列，并设(3)式的$b_n=0,n\geqslant 1$。记

$$Y_i=-n^\alpha I(X_i<-n^\alpha)+X_iI(|X_i|\leqslant n^\alpha)+n^\alpha I(X_i>n^\alpha).$$

对于$\forall\ \varepsilon>0$，有

$$\{|\sum_{i=1}^n X_i|\geqslant \varepsilon n^\alpha\}=\{|\sum_{i=1}^n X_i|\geqslant \varepsilon n^\alpha,\exists\ i:1\leqslant i\leqslant n,|X_i|>n^\alpha\}\cup\{|\sum_{i=1}^n X_i|\geqslant \varepsilon n^\alpha,\forall\ i:1\leqslant i\leqslant n,|X_i|\leqslant n^\alpha\}\subset\bigcup_{i=1}^n\{|X_i|>n^\alpha\}\cup\{|\sum_{i=1}^n Y_i|\geqslant \varepsilon n^\alpha\}.$$

结合已知条件$P(|X_n|>x)\leqslant CP(|X|>x),n\geqslant 1$，以及 Markov 不等式[4] 得

$$P\{|\sum_{i=1}^n X_i|\geqslant \varepsilon n^\alpha\}\leqslant \sum_{i=1}^n P(|X_i|>n^\alpha)+P\{|\sum_{i=1}^n Y_i|\geqslant \varepsilon n^\alpha\} << nP(|X|>n^\alpha)+\varepsilon^{-2}n^{-2\alpha}E(\sum_{i=1}^n Y_i)^2 << nP(|X|>n^\alpha)+n^{-2\alpha}E(\sum_{i=1}^n Y_i)^2=:I_1+I_2. \quad (4)$$

根据已知条件$\lim\limits_{n\to\infty}n^pP(|X|>n)=0$，等价于$\lim\limits_{n\to\infty}nP(|X|>n^{\frac{1}{p}})=0$，即

$$\lim_{n\to\infty}nP(|X|>n^\alpha)=0,\text{故}\quad I_1\to 0,n\to\infty. \quad (5)$$

因为Y_i是关于X_i单调不减，由引理 1 的(Ⅲ)得到$\{Y_i;i\geqslant 1\}$仍然是两两 NQD 序列，且由X_i的对称性知Y_i仍然是对称的，故$EY_i=0$。由引理 2 有

$$I_2\leqslant n^{-2\alpha}\sum_{i=1}^n EY_i^2 << n^{-2\alpha}\sum_{i=1}^n (n^{2\alpha}P(|X_i|>n^\alpha)+EX_i^2I(|X_i|\leqslant n^\alpha)).$$

由引理 3 的(Ⅰ)得到

$$EX_i^2I(|X_i|\leqslant n^\alpha) << EX^2I(|X|\leqslant n^\alpha)+n^{2\alpha}P(|X|>n^\alpha),$$

所以$I_2 << nP(|X|>n^\alpha)+n^{-2\alpha+1}EX^2I(|X|\leqslant n^\alpha)$.

由(4)式和(5)式知，要证明定理，只需要证明

$$I_3=n^{-2\alpha+1}EX^2I(|X|\leqslant n^\alpha)\to 0,n\to\infty.$$

由微分中值定理[6]可知，存在$\theta\in(0,1)$，使$(k+1)^{2\alpha}-k^{2\alpha}=2\alpha(k+\theta)^{2\alpha-1}\leqslant 2\alpha(k+1)^{2\alpha-1}$，得到

$$I_3=n^{1-2\alpha}\sum_{k=1}^n EX^2I((k-1)^\alpha<|X|\leqslant k^\alpha)\leqslant n^{1-2\alpha}\sum_{k=1}^n k^{2\alpha}(P(|X|>(k-1)^\alpha)-P(|X|>k^\alpha))=n^{1-2\alpha}(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^{2\alpha}P(|X|>k^\alpha)-\sum_{k=1}^n k^{2\alpha}P(|X|\geqslant k^\alpha))\leqslant n^{1-2\alpha}\sum_{k=0}^n((k+1)^{2\alpha}-k^{2\alpha})P(|X|>k^\alpha)\leqslant 2\alpha n^{1-2\alpha}\sum_{k=0}^n(k+1)^{2\alpha-1}P(|X|>k^\alpha).$$

由$\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)P(|X|>n^\alpha)=0$得$\forall\ \delta>0$存在$N_0$，当$k>N_0$时，有

$$(k+1)P(|X|>k^\alpha)<\delta/4.$$

因此，对于充分大的n有

$$n^{1-2\alpha}\sum_{k=N_0}^n(k+1)^{2\alpha-1}P(|X|>k^\alpha)\leqslant n^{1-2\alpha}\sum_{k=N_0}^n(k+1)^{2\alpha-2}\delta/4\leqslant n^{1-2\alpha}(n+1)^{2\alpha-2}(n+1)\delta/4<\delta/2.$$

注意到$0<p<2$，有$1-2\alpha<0$，所以$n^{1-2\alpha}N_0^{2\alpha}\to 0$。故当$n$充分大的时候，有

(下转第 127 页 Continue on page 127)

见表 1 和表 2.

表 1　$k=1.0,\varepsilon=1.0,\Delta t=0.0005,h=1/11,kh/2\varepsilon=0.045$，$t=0.4$ 时的数值结果

Table 1　The numerical（$k=1.0,\varepsilon=1.0,\Delta t=0.0005,h=1/11,kh/2\varepsilon=0.045,t=0.4$）

J	格式(14)Format(14)			Evans[8]			u^*
(x_J)	u	$A.E$	$P.E$	u	$A.E$	$P.E$	
1	0.04796	0.00011	0.002294	0.08968	0.0416	0.866	0.04807
2	0.10113	0.00022	0.002175	0.14618	0.0448	0.442	0.10135
3	0.16066	0.00030	0.001867	0.2084	0.0474	0.295	0.16096
4	0.2277	0.00041	0.001801	0.27697	0.0489	0.214	0.22811
5	0.30351	0.00049	0.001614	0.35258	0.0486	0.160	0.304
6	0.38928	0.00052	0.001336	0.43596	0.0462	0.118	0.3898
7	0.48605	0.00053	0.00109	0.52784	0.0413	0.0848	0.48658
8	0.59483	0.00045	0.000757	0.62902	0.0337	0.0567	0.59528
9	0.71638	0.00032	0.000447	0.74029	0.0236	0.0329	0.7167
10	0.85127	0.00018	0.000211	0.8525	0.0111	0.0130	0.85145

表 2　$k=1.0,\varepsilon=0.1,\Delta t=0.0005,h=1/11,kh/2\varepsilon=0.045$，$t=0.4$ 时的数值结果

Table 2　The numerical（$k=1.0,\varepsilon=0.1,\Delta t=0.0005,h=1/11,kh/2\varepsilon=0.045,t=0.4$）

J	格式(14)Format(14)			Evans[8]			u^*
(x_J)	u	$A.E$	$P.E$	u	$A.E$	$P.E$	
1	0.000033	0.000034	7.991098	0.000026	0.000277	10.65385	0.000303
2	0.000117	0.000768	6.564103	0.000094	0.000791	8.414894	0.000885
3	0.000327	0.001908	5.834862	0.000276	0.001959	7.097826	0.002235
4	0.000859	0.004565	5.314319	0.000776	0.004648	5.989691	0.005424
5	0.002254	0.010509	4.662378	0.002174	0.010589	4.870745	0.012763
6	0.006091	0.022762	3.736989	0.006124	0.022729	3.711463	0.028853
7	0.017081	0.044718	2.617997	0.017299	0.0445	2.572403	0.061799
8	0.04891	0.07456	1.524433	0.048595	0.074875	1.540796	0.12347
9	0.13872	0.08804	0.63466	0.13497	0.09179	0.680077	0.22676
10	0.38036	0.00183	0.004811	0.3697	0.00883	0.023884	0.37853

表 1 和表 2 结果表明，本文给出的对流扩散方程 AGE 算法明显优于文献[8]所提出的 AGE 算法.

参考文献：

[1]　EVANS D J, ABDULLAH A R. Group explicit method for parabolic equations[J]. Inter J Computer Mathl, 1983(14): 73-105.

[2]　张宝琳. 求解扩散方程的交替分段显－隐式方法[J]. 数值计算与计算机应用, 1991, 12: 245-253.

[3]　ZHANG BAOLIN, SU XIUMIN. Alternating segment Crank-Nicolson scheme [J]. Chinese Journal of Computational Physics, 1994, 12: 115-120.

[4]　CHEN JIN, ZHANG BAOLIN. A class of alternating block Crank-Nicolson method [J]. Computer Math, 1994, 45: 89-112.

[5]　王文洽, 靳聪明. 求解扩散方程的一类交替分组四点方法[J]. 计算物理, 2002, 11: 532-536.

[6]　黄素珍. 求解对流扩散方程的一类交替分组显示方法[J]. 盐城工学院学报：自然科学版, 2004(3): 12-16.

[7]　KELLOGG R B. Another alternating direction implicit method[J]. SLAM, 1964, 12: 848-854.

[8]　EVANS D J, ABDULLAH A R. A new explicit method for the diffusion-convection equation[J]. Comp & Math with Appls, 1985(11): 145-154.

（责任编辑：韦廷宗）

（上接第 123 页 Continue from page 123）

$$n^{1-2\alpha}\sum_{k=0}^{N_0-1}(k+1)^{2\alpha-1}P(|X|>k^{\alpha})\leqslant n^{1-2\alpha}N_0^{2\alpha}<\delta/2.$$

故

$$I_3 = n^{1-2\alpha}\sum_{k=0}^{N_0-1}(k+1)^{2\alpha-1}P(|X|>k^{\alpha})+n^{1-2\alpha}\sum_{k=N_0}^{n}(k+1)^{2\alpha-1}P(|X|>k^{\alpha})<\delta.$$

综合上述分析，对于 $\forall\ \varepsilon>0$，

$$P(|\sum_{i=1}^{n}X_i|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})\to 0, n\to\infty.$$

即 $n^{-\alpha}S_n\xrightarrow{P}0$. 定理证毕.

推论　设 $\{X_n;n\geqslant1\}$ 是同分布的两两 NQD 列，$0<p<2$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pP(|X|>n)=0$，则存在实数列 $\{b_n;n\geqslant1\}$ 使得

$$n^{-1/p}(S_n-b_n)\xrightarrow{P}0, n\to\infty.$$

参考文献：

[1]　LEHMANN E L. Some concepts of dependence[J]. Ann Math Statist, 1966, 43: 1137-1153.

[2]　MATULA P A. Note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables [J]. Statist Probab Lett, 1992, 15(3): 209-213.

[3]　吴群英. 两两 NQD 列的收敛性质[J]. 数学学报, 2002, 45(3): 617-624.

[4]　林正炎, 陆传荣, 苏中根. 概率极限理论基础[M]. 北京：高等教育出版社, 1999.

[5]　BINGHAM N H, GOLDIE C M, TEUGELS J L. Regular variation [M]. Landon: Cambrige University Press, 1987.

[6]　严士健, 王隽骧, 刘秀芳. 概率论基础[M]. 北京：科学出版社, 1982.

（责任编辑：邓大玉）