广西科学 Guangxi Sciences 2007, 14(2):124～127

求解对流扩散方程的一类 AGE 方法

An AGE Method for Solving Diffusion-Convection Equation

李安坤，徐安农，张秀军

LI An-kun, XU An-nong, ZHANG Xiu-jun

（桂林电子科技大学计算科学与数学系，广西桂林 541004）

(Department of Computing Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要：结合 Crank-Nicolson 格式和第二类 Saul'yev 非对称格式，设计求解对流扩散方程的交替分组显式方法. 得到求解对流扩散方程的交替分组显式方法为 $\begin{cases}(I+G_1)U^{n+1}=(I-G_2)U^n+b_1,\\(I+G_2)U^{n+2}=(I-G_1)U^{n+1}+b_2\end{cases}$ 和 $\begin{cases}(I+\hat{G}_1)U^{n+1}=(I-\hat{G}_2)U^n+b_1,\\(I+\hat{G}_2)U^{n+2}=(I-\hat{G}_1)U^{n+1}+b_2\end{cases}$. 该方法是绝对稳定的，且使用方便，适合并行计算，具有较好的精度.

关键词：对流扩散方程　交替分组方法　Crank-Nicolson 格式　第二类 Saul'yev 非对称格式　无条件稳定　并行差分格式

中图法分类号：O241　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2007)02-0124-04

Abstract: An alternative segment method for solving diffusion-convection equations is given using Crank-Nicolson scheme and Saul'yev type asymmetric difference schemes. The new method uses these two equations $\begin{cases}(I+G_1)U^{n+1}=(I-G_2)U^n+b_1,\\(I+G_2)U^{n+2}=(I-G_1)U^{n+1}+b_2\end{cases}$ and $\begin{cases}(I+\hat{G}_1)U^{n+1}=(I-\hat{G}_2)U^n+b_1,\\(I+\hat{G}_2)U^{n+2}=(I-\hat{G}_1)U^{n+1}+b_2\end{cases}$. It is unconditionally stable and can be used directly on parallel computers. The numerical experiments results show that our method has good accuracy.

Key words: diffusion-convection equation, alternating segment method, Crank-Nicolson scheme, Saul'yev type asymmetric difference schemes, unconditionally stable, parallel difference scheme

本文考虑如下对流扩散问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+k\dfrac{\partial u}{\partial x}=\varepsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},0\leqslant x\leqslant L,\\ \quad 0<t<T,\\ u(x,0)=f(x),0<x<L,\\ u(0,t)=g_1(t),0<t<T,\\ u(L,t)=g_2(t),0<t<T.\end{cases}\tag{1}$$

求解此方程已经有很多显式和隐式差分方法. 显式方法适合于并行计算但是稳定性条件差，必须采用非常小的时间步长来计算. 隐式格式一般无条件稳定，但需要求解线性方程组，实现并行计算有一定困难. Evans 和 Abdullah[1]巧妙利用 Saul'yev 非对称格式设计了交替分组(AGE)方法. 张宝琳等根据此思想设计了分段显—隐式方法(ASE-I)[2]，又把具有二阶精度的 Crank-Nicolson 格式引入到问题(1)，提出了分段交替 Crank-Nicolson 格式(ASE-N)[3,4]. 另一方面，王文洽等[5]根据第二类 Saul'yev 非对称格式提出了求解扩散方程的交替分组四点方法. 黄素珍[6]在文献[5]的思想上提出了求解对流扩散方程的交替分组显式方法. 本文把 Crank-Nicolson 格式和第二类 Saul'yev 非对称格式相结合，讨论对流扩散方程(1)的交替分组显式格式.

1　交替分组显式方法

首先将区域$(0,L)\times(0,T)$进行剖分，记空间步长 $h=\dfrac{L}{M}$，时间步长 $\Delta t=[\dfrac{T}{N}]$，$xi=ih(i=0,1,2,\cdots,M)$，$t_n=n\Delta t(n=0,1,2,\cdots,N)$. 记 $r=\dfrac{\varepsilon\Delta t}{h^2}$，$p=\dfrac{k\Delta t}{2h}$. 定义：

收稿日期：2006-04-10

作者简介：李安坤(1981-)，男，硕士研究生，主要从事三对角系统与偏微分方程并行算法方面的研究。

$$\delta_x u_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, \delta_{\bar{x}} u_i^n = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h};$$

$$\delta_{\hat{x}} u_i^n = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}, \delta_t u_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t}.$$

在构造交替方程组时，我们用到下面四个在(x_i，$t_{n+1/2}$)点逼近方程(1)的Saul'yev型非对称格式[1]和Crank-Nicolson格式：

$$\delta_t u_i^n + \frac{k}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{2h} + \delta_{\hat{x}} u_i^n\right) = \frac{\varepsilon}{2}(\delta_x(\delta_{\bar{x}} u)_i^n + h^{-1}(\delta_x u_i^{n+1} - \delta_{\bar{x}} u_i^n)), \quad (2)$$

$$\delta_t u_i^n + \frac{k}{2}\left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^{n+1}}{2h} + \delta_{\hat{x}} u_i^n\right) = \frac{\varepsilon}{2}(\delta_x(\delta_{\bar{x}} u)_i^n + h^{-1}(\delta_x u_i^{n+1} - \delta_{\bar{x}} u_i^{n+1})), \quad (3)$$

$$\delta_t u_i^n + \frac{k}{2}\left(\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{2h} + \delta_{\hat{x}} u_i^{n+1}\right) = \frac{\varepsilon}{2}(\delta_x(\delta_{\bar{x}} u)_i^{n+1} + h^{-1}(\delta_x u_i^{n+1} - \delta_{\bar{x}} u_i^n)), \quad (4)$$

$$\delta_t u_i^n + \frac{k}{2}\left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^{n+1}}{2h} + \delta_{\hat{x}} u_i^{n+1}\right) = \frac{\varepsilon}{2}(\delta_x(\delta_{\bar{x}} u)_i^{n+1} + h^{-1}(\delta_x u_i^n - \delta_{\bar{x}} u_i^{n+1})), \quad (5)$$

$$\delta_t u_i^n + \frac{k}{2}(\delta_{\hat{x}} u_i^{n+1} + \delta_{\hat{x}} u_i^n) = \frac{\varepsilon}{2}(\delta_x(\delta_{\bar{x}} u)_i^{n+1} + \delta_x(\delta_{\bar{x}} u)_i^n). \quad (6)$$

由于格式(2)～(5)是非对称的，利用Taylor公式容易证明其截断误差都是$O(\Delta t + h^2 + \Delta t/h)$，而Crank-Nicolson格式(6)的截断误差为$O((\Delta t)^2 + h^2)$.

公式(2)～(6)可以化为如下形式：

$$(1 + \frac{r}{2})u_i^{n+1} + \frac{1}{2}(p - r)u_{i+1}^{n+1} = (p + r)u_{i-1}^n + (1 - \frac{3}{2}r)u_i^n - \frac{1}{2}(p - r)u_{i+1}^n, \quad (7)$$

$$-\frac{1}{2}(p + r)u_{i-1}^{n+1} + (1 + \frac{r}{2})u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(p + r)u_{i-1}^n + (1 - \frac{3r}{2})u_i^n - (p - r)u_{i+1}^n, \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2}(p + r)u_{i-1}^{n+1} + (1 + \frac{3r}{2})u_i^{n+1} + (p - r)u_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{2}(p + r)u_{i-1}^n + (1 - \frac{r}{2})u_i^n, \quad (9)$$

$$-(p + r)u_{i-1}^{n+1} + (1 + \frac{3r}{2})u_i^{n+1} + \frac{1}{2}(p - r)u_{i+1}^{n+1} = (1 - \frac{r}{2})u_i^n - \frac{1}{2}(p - r)u_{i+1}^n, \quad (10)$$

$$-\frac{1}{2}(p + r)u_{i-1}^{n+1} + (1 + r)u_i^{n+1} + \frac{1}{2}(p - r)u_{i+1}^{n+1} = \frac{1}{2}(p + r)u_{i-1}^n - (r - 1)u_i^n - \frac{1}{2}(p - r)u_{i+1}^n. \quad (11)$$

然后讨论交替分组差分格式. 设剖分内点数可以表示成$M - 1 = 4J + l(l = 0,1,2,3)$的形式. 当$n$为偶数，$l$为奇数时，我们讨论$n+1$和$n+2$层上的交替分组模式.

(Ⅰ)当$M - 1 = 4J + 1$时，节点分组模式和差分公式的选取如图1所示. 图1中在$n+1$层划分$J+1$个独立计算组，在$n+2$层划分J个独立计算组. 在每层划分的中间部分采用了规则的四点组(a－c－d－b)的形式，在靠近边界的部分采用了非规则的三点组和五点组，在其上适当的插入Crank-Nicolson格式，这样既避免了单点组影响格式的精度，又保证了格式的绝对稳定性.

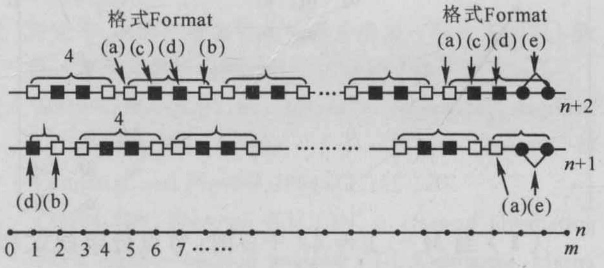

图1　对流扩散方程的AGE模式(Ⅰ)

Fig.1　The AGE method for solving convection-diffusion equation (Ⅰ)

□:格式a,b;■:格式c,d;●:格式e.

□:Format a,b;■:Format c,d;●:Format e.

在图1中可以容易地看出，在$n+1$和$n+2$层上对称使用a,b,c,d格式的过程中，含$\frac{\Delta t}{h}$的项有相同的形式，且符号相反，可以起到抵消作用. 从$n=0$层开始，在$n+1$和$n+2$层上交替使用上述格式，于是得到了求解方程(1)的交替分组显式格式，其矩阵形式如下：

$$\begin{cases}(I + G_1)U^{n+1} = (I - G_2)U^n + b_1, \\ (I + G_2)U^{n+2} = (I - G_1)U^{n+1} + b_2,\end{cases} \quad (12)$$

式中，$U^n = (u_1^n, u_2^n, \cdots, u_{M-1}^n)^T$，$b_1 = (2r(p + r)u_0^n, 0, \cdots, 0, -r(p - r)(u_M^n + u_M^{n+1}))^T$，$b_1 = (2r(p + r)u_0^{n+2}, 0, \cdots, 0, -r(p - r)(u_M^{n+1} + u_M^{n+2}))^T$，$b_1$和$b_2$是与边界条件有关的$M$维向量，

$$G_1 = \begin{bmatrix}
a_1 & a_2 & & & & & & & & & & \\
a_3 & a_4 & & & & & & & & & & \\
 & & a_4 & a_2 & & & & & & & & \\
 & & a_3 & a_1 & a_5 & & & & & & & \\
 & & & a_6 & a_1 & a_2 & & & & 0 & & \\
 & & & & a_3 & a_4 & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & a_4 & a_2 & & & & \\
 & & & & & & a_3 & a_1 & a_5 & & & \\
 & & & & & & & a_6 & a_1 & a_2 & & \\
 & 0 & & & & & & & a_3 & a_4 & a_5 & \\
 & & & & & & & & & a_6 & r & a_2 \\
 & & & & & & & & & & a_3 & r
\end{bmatrix},$$

其中，$a_1 = \frac{3r}{2}$，$a_2 = \frac{p - r}{2}$，$a_3 = \frac{-(p + r)}{2}$，$a_4 = \frac{r}{2}$，

$a_5 = p - r, a_6 = -(p + r)$;

$G_2 =$

$$\begin{bmatrix}
a_4 & a_2 & & & & & & & & & & \\
a_3 & a_1 & a_5 & & & & & & & & & \\
 & a_6 & a_1 & a_2 & & & & 0 & & & & \\
 & & a_3 & a_4 & & & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & & a_4 & a_2 & & & & & & \\
 & & & & a_3 & a_1 & a_5 & & & & & \\
 & & & & & a_6 & a_1 & a_2 & & & & \\
 & & & & & & a_3 & a_4 & & & & \\
 & & & & & & & & r & a_2 & & \\
 & & & & 0 & & & & a_3 & 3r & a_5 & \\
 & & & & & & & & & a_6 & 3r & a_2 \\
 & & & & & & & & & & a_3 & 3r
\end{bmatrix}.$$

(Ⅱ) 当 $M - 1 = 4J + 3$ 时，节点分组模式和差分公式的选取如图 2 所示.

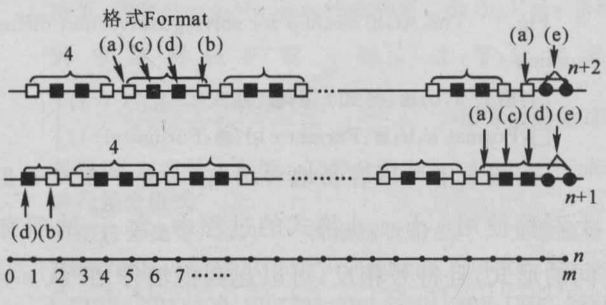

图 2　对流扩散方程的 AGE 模式(Ⅱ)

Fig. 2　The AGE method for solving convection-diffusion equation(Ⅱ)

□:格式 a,b;■:格式 c,d;●:格式 e.

□:Format a,b;■:Format c,d;●:Format e.

图 2 中在 $n + 1$ 层和 $n + 2$ 层分别划分 $J + 1$ 个独立计算组. 从 $n = 0$ 层开始，在 $n + 1$ 和 $n + 2$ 层上交替使用上述格式，得到了求解方程(1) 的交替分组显式格式，其矩阵形式如下：

$$\begin{cases} (I + \hat{G}_1)U^{n+1} = (I - \hat{G}_2)U^n + b_1, \\ (I + \hat{G}_2)U^{n+2} = (I - \hat{G}_1)U^{n+1} + b_2, \end{cases} \tag{13}$$

其中，$\hat{G}_1 =$

$$\begin{bmatrix}
a_1 & a_2 & & & & & & & & & & & & \\
a_3 & a_4 & & & & & & & & & & & & \\
 & & a_4 & a_2 & & & & & & & & & & \\
 & & a_3 & a_1 & a_5 & & & & & & & & & \\
 & & & a_6 & a_1 & a_2 & & & 0 & & & & & \\
 & & & & a_3 & a_4 & & & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & a_4 & a_2 & & & & & \\
 & & & & & & & a_3 & a_1 & a_5 & & & & \\
 & & & & & & & & a_6 & a_1 & a_2 & & & \\
 & & & & & & & & & a_3 & a_4 & & & \\
 & & & & & & & & & & & r & a_2 & \\
 & & & & & & & & & & & a_3 & 3r & a_5 \\
 & & & & & & & & & & & a_6 & 3r & a_2 \\
 & & & & & & & & & & & & a_3 & 3r & a_2 \\
 & & & & & & & & & & & & & a_3 & 3r
\end{bmatrix},$$

$G_2 =$

$$\begin{bmatrix}
a_4 & a_2 & & & & & & & & \\
a_3 & a_1 & a_5 & & & & & & & \\
 & a_6 & a_1 & a_2 & & & 0 & & & \\
 & & a_3 & a_4 & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & a_4 & a_2 & & & & \\
 & & & & a_3 & a_1 & a_5 & & & \\
 & & & & & a_6 & a_1 & a_2 & & \\
 & & & & & & a_3 & a_4 & & \\
 & & & 0 & & & & & a_1 & a_2 \\
 & & & & & & & & a_3 & a_4
\end{bmatrix}.$$

2　稳定性分析

定理　求解对流扩散问题(1) 的交替分组显示方法(12)、(13) 均是绝对稳定的.

证明　容易知道交替分组(12) 的增长矩阵为：

$$G = (I + G_2)^{-1}(I - G_1)(I + G_1)^{-1}(I - G_2).$$

记 G 的相似矩阵为

$$\widetilde{G} = (I + G_2)G(I + G_2)^{-1} = (I - G_1)(I + G_1)^{-1}(I - G_2)(I + G_2)^{-1},$$

容易验证 $G_1 + G_1^T$ 和 $G_2 + G_2^T$ 都是正定矩阵，由 Kellogg 引理[7] 得：

$$\| (I - G_i)(I - G_i)^{-1} \|_2 \leqslant 1, i = 1,2,$$

记 $\rho(G)$ 为 G 的谱半径，于是 $\rho(G) = \rho(\widetilde{G}) \leqslant \| \widetilde{G} \|_2 \leqslant 1$，由此可见，交替分组方法(12) 是绝对稳定的.

类似的，我们可以证明交替分组方法(13) 也是绝对稳定的. 定理证毕.

3　数值实验

对流扩散问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + k\dfrac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 < t < T, \varepsilon > 0, \\ u(x,0) = 0, 0 < x < 1, \\ u(0,t) = 0, 0 < t < T, \\ u(1,t) = 1, 0 < t < T \end{cases} \tag{14}$$

的精确解为：

$$u(x,t) = \frac{e^{kx/\varepsilon} - 1}{e^{k/\varepsilon} - 1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n\pi}{(n\pi)^2 + (k/2\varepsilon)^2} e^{k(x-1)/2\varepsilon} \sin(n\pi x) e^{-[(n\pi)^2\varepsilon + (k/2\varepsilon)^2]t}. \tag{15}$$

采用交替分组(12) 分别取 $\varepsilon = 1.0, \varepsilon = 0.1$ 进行计算，并与文献[8] 的 AGE 方法进行比较的绝对误差($A.E$)、相对误差($P.E$)、数值解(u) 和精确解(u^*)

见表 1 和表 2.

表 1　$k=1.0,\varepsilon=1.0,\Delta t=0.0005,h=1/11,kh/2\varepsilon=0.045,t=0.4$ 时的数值结果

Table 1　The numerical ($k=1.0,\varepsilon=1.0,\Delta t=0.0005,h=1/11,kh/2\varepsilon=0.045,t=0.4$)

J	格式(14)Format(14)			Evans[8]			u^*
(x_J)	u	$A.E$	$P.E$	u	$A.E$	$P.E$	
1	0.04796	0.00011	0.002294	0.08968	0.0416	0.866	0.04807
2	0.10113	0.00022	0.002175	0.14618	0.0448	0.442	0.10135
3	0.16066	0.00030	0.001867	0.2084	0.0474	0.295	0.16096
4	0.2277	0.00041	0.001801	0.27697	0.0489	0.214	0.22811
5	0.30351	0.00049	0.001614	0.35258	0.0486	0.160	0.304
6	0.38928	0.00052	0.001336	0.43596	0.0462	0.118	0.3898
7	0.48605	0.00053	0.00109	0.52784	0.0413	0.0848	0.48658
8	0.59483	0.00045	0.000757	0.62902	0.0337	0.0567	0.59528
9	0.71638	0.00032	0.000447	0.74029	0.0236	0.0329	0.7167
10	0.85127	0.00018	0.000211	0.8525	0.0111	0.0130	0.85145

表 2　$k=1.0,\varepsilon=0.1,\Delta t=0.0005,h=1/11,kh/2\varepsilon=0.045,t=0.4$ 时的数值结果

Table 2　The numerical ($k=1.0,\varepsilon=0.1,\Delta t=0.0005,h=1/11,kh/2\varepsilon=0.045,t=0.4$)

J	格式(14)Format(14)			Evans[8]			u^*
(x_J)	u	$A.E$	$P.E$	u	$A.E$	$P.E$	
1	0.000033	0.000034	7.991098	0.000026	0.000277	10.65385	0.000303
2	0.000117	0.000768	6.564103	0.000094	0.000791	8.414894	0.000885
3	0.000327	0.001908	5.834862	0.000276	0.001959	7.097826	0.002235
4	0.000859	0.004565	5.314319	0.000776	0.004648	5.989691	0.005424
5	0.002254	0.010509	4.662378	0.002174	0.010589	4.870745	0.012763
6	0.006091	0.022762	3.736989	0.006124	0.022729	3.711463	0.028853
7	0.017081	0.044718	2.617997	0.017299	0.0445	2.572403	0.061799
8	0.04891	0.07456	1.524433	0.048595	0.074875	1.540796	0.12347
9	0.13872	0.08804	0.63466	0.13497	0.09179	0.680077	0.22676
10	0.38036	0.00183	0.004811	0.3697	0.00883	0.023884	0.37853

表 1 和表 2 结果表明,本文给出的对流扩散方程 AGE 算法明显优于文献[8]所提出的 AGE 算法.

参考文献:

[1] EVANS D J,ABDULLAH A R. Group explicit method for parabolic equations[J]. Inter J Computer Mathl,1983(14):73-105.

[2] 张宝琳. 求解扩散方程的交替分段显-隐式方法[J]. 数值计算与计算机应用,1991,12:245-253.

[3] ZHANG BAOLIN,SU XIUMIN. Alternating segment Crank-Nicolson scheme [J]. Chinese Journal of Computational Physics,1994,12:115-120.

[4] CHEN JIN,ZHANG BAOLIN. A class of alternating block Crank-Nicolson method [J]. Computer Math,1994,45:89-112.

[5] 王文洽,靳聪明. 求解扩散方程的一类交替分组四点方法[J]. 计算物理,2002,11:532-536.

[6] 黄素珍. 求解对流扩散方程的一类交替分组显示方法[J]. 盐城工学院学报:自然科学版,2004(3):12-16.

[7] KELLOGG R B. Another alternating direction implicit method[J]. SLAM,1964,12:848-854.

[8] EVANS D J,ABDULLAH A R. A new explicit method for the diffusion-convection equation[J]. Comp & Math with Appls,1985(11):145-154.

(责任编辑:韦廷宗)

(上接第 123 页 Continue from page 123)

$$n^{1-2\alpha}\sum_{k=0}^{N_0-1}(k+1)^{2\alpha-1}P(|X|>k^{\alpha})\leqslant n^{1-2\alpha}N_0^{2\alpha}<\delta/2.$$

故

$$I_3=n^{1-2\alpha}\sum_{k=0}^{N_0-1}(k+1)^{2\alpha-1}P(|X|>k^{\alpha})+n^{1-2\alpha}\sum_{k=N_0}^{n}(k+1)^{2\alpha-1}P(|X|>k^{\alpha})<\delta.$$

综合上述分析,对于 $\forall\ \varepsilon>0$,

$$P(|\sum_{i=1}^{n}X_i|\geqslant\varepsilon n^{\alpha})\to 0,n\to\infty.$$

即 $n^{-\alpha}S_n\xrightarrow{P}0$. 定理证毕.

推论　设$\{X_n;n\geqslant 1\}$是同分布的两两NQD列,$0<p<2$满足$\lim\limits_{n\to\infty}n^pP(|X|>n)=0$,则存在实数列$\{b_n;n\geqslant 1\}$使得

$$n^{-1/p}(S_n-b_n)\xrightarrow{P}0,n\to\infty.$$

参考文献:

[1] LEHMANN E L. Some concepts of dependence[J]. Ann Math Statist,1966,43:1137-1153.

[2] MATULA P A. Note on the almost sure convergence of sums of negatively dependent random variables [J]. Statist Probab Lett,1992,15(3):209-213.

[3] 吴群英. 两两 NQD 列的收敛性质[J]. 数学学报,2002,45(3):617-624.

[4] 林正炎,陆传荣,苏中根. 概率极限理论基础[M]. 北京:高等教育出版社,1999.

[5] BINGHAM N H,GOLDIE C M,TEUGELS J L. Regular variation [M]. Landon: Cambrige University Press,1987.

[6] 严士健,王隽骧,刘秀芳. 概率论基础[M]. 北京:科学出版社,1982.

(责任编辑:邓大玉)