

## 基于预订销售的库存模型

# Inventory and Sale Model Based on Reservation Sale

朱彦利,孟立华,徐春明

ZHU Yan-li, MENG Li-hua, XU Chun-ming

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

**摘要:**在需求率是价格的函数,允许缺货的条件下,采用动态价格策略,考虑允许顾客取消预订和货币时间价值的影响,建立一个库存-销售模型,并用数值实例验证模型的有效性.该模型能够有效地确定出最优的销售价格、订购量、预订销售周期,使得服务企业的净利润最大化.

**关键词:**数学模型 库存 销售 价格

**中图分类号:**O227;C931 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2007)02-0128-04

**Abstract:** Under the assumptions that product demand is price-dependent and allowable shortage, the inventory and sale model is established by dynamic pricing approach, in which the time value of money and reservations may cancel advance orders is included, and the validity is verified by numerical examples. The model is derived to find the optimal pricing, ordering quantity and maximize net profit.

**Key words:** mathematical model, inventory, sale, pricing

预订销售是指顾客向企业预先订购用于将来消耗的服务(如机票、宾馆房间等).企业通过预订销售可以更好的掌握需求的变化情况,同时,预订销售给企业提供更多的时间销售它们的产品.目前,预订销售问题得到了深入的研究,例如,文献[1]指出:在预订销售的高峰期,系统资源一般会发生短缺,在低峰期则会发生闲置,并论述了使系统的利润最大的分配预订销售时间策略;文献[2]构建在无限时间水平下带有预订销售的库存模型,其中需求率为价格的减函数,不允许缺货并在预订期间允许顾客取消预订;文献[3]分析预订服务的销售量与其价格敏感性之间的关系,指出当价格敏感性较低(高)时,预订期间销售的服务减少(增加).

价格是企业应对竞争环境变化最迅速的武器,是扩大市场占有率和追求长期利润增长的重要因素,价格的高低对需求有重要的影响.因此,如何根据可变的条件为产品制定一个准确合理的价格是企业面临的首要问题.另外,随着竞争日趋激烈,货币时

间价值在企业库存管理的研究中越来越受到重视.文献[4]研究变质产品的临时价格折扣问题,并考虑了货币时间价值的影响.文献[5]研究易变质产品的最优价格问题,并给出一种启发式算法计算最优价格和订购量.在有限时间水平内和库容有限的条件下,文献[6]建立一个易变质产品的生产销售库存模型,确定了最优销售价格和订购量.文献[7]讨论在货币时间价值的影响下变质产品的最优补充策略,并给出一种确定最优解的线性搜索方法.文献[8]将文献[7]的模型扩展到允许缺货的情形,并确定出最优周期和补充次数.

本文在预订销售环境下,考虑了有限时间水平内货币时间价值对服务企业的库存和销售的影响,在允许缺货的假设下,建立一个库存-销售模型,确定出最优的销售价格、订购量、预订销售周期,使得服务企业的净利润最大化.

## 1 基于预订销售的库存模型

### 1.1 记号与假定

建立的库存-销售模型基于如下假定:

(1)企业提供的服务是顾客用于将来消耗的,并且通过预订购买;

收稿日期:2006-10-23

作者简介:朱彦利(1982-),男,硕士研究生,主要从事供应链模型与优化研究工作.

(2) 采用动态价格策略(即销售价格在某时刻改变);

(3) 需求为价格的减函数,即  $d(p) = q - \beta p$ , 其中  $q, \beta$  为正常数且  $q - \beta p > 0$  (表示需求量为正数);

(4) 预订发生在给定计划期  $H$  内;

(5) 允许缺货;

(6) 订购量、需求率、库存水平和订购时间为连续变量, 订购次数为离散变量(正整数);

(7) 取消预订率与订购量无关且为时间的减函数, 即  $\theta(t) = \eta t^{-1}$ , 其中  $\eta$  为正常数<sup>[2]</sup>; 顾客取消预订需支付一定的取消费用。

建立模型所需的记号如下。

$T$ : 预订销售周期长度;  $T_1$ : 达到最大预订水平时刻(决策变量);  $m$ : 订购次数(决策变量),  $m = H/T$ ;  $N$ : 最大预订水平;  $Q$ : 订购批量(决策变量);  $p_1$ :  $[0, T_1]$  内的销售价格(决策变量);  $p_2$ :  $[T_1, T]$  内的销售价格(决策变量);  $a_1$ :  $[0, T_1]$  内取消预订顾客需支付的单位费用;  $r$ : 利率;  $c$ : 服务的单位成本;  $c_1$ : 单位服务单位时间延迟订购成本。

## 1.2 库存-销售模型

令  $I_1(t)$  表示  $[0, T_1]$  内的预订水平,  $I_2(t)$  表示  $[T_1, T]$  内的缺货水平; 则预订销售从  $t = 0$  时刻开始, 在  $[0, T_1]$  内预订的价格为  $p_1$ , 预订水平以  $d(p_1) - \eta t^{-1} I_1(t)$  增加,  $T_1$  时刻预订水平达到最大; 由于预订需求仍在继续, 但此时企业已经不能满足顾客的预订需求, 因此在  $[T_1, T]$  内发生缺货且缺货完全延迟, 缺货水平以  $d(p_2) - \eta t^{-1} I_2(t)$  增加;  $T$  时刻一个预订周期结束。预订水平状态如图 1 所示。

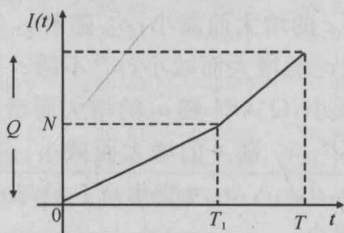


图 1 预订水平状态

Fig. 1 The level of reservation

由上述分析可知, 在  $[0, T]$  内有

$$\frac{dI_1(t)}{dt} = d(p_1) - \eta t^{-1} I_1(t), 0 \leq t \leq T_1; \quad (1)$$

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = d(p_2), T_1 \leq t \leq T. \quad (2)$$

注意到  $I_1(0) = 0, I_2(T_1) = 0$ , 由(1)式和(2)式

得到  $I_1(t) = \frac{t}{\eta + 1} d(p_1), 0 \leq t \leq T_1; I_2(t) = d(p_2)(t - T_1), T_1 \leq t \leq T$ .

而由  $N = I_1(T_1)$  得到

$$N = \frac{T_1}{\eta + 1} d(p_1). \quad (3)$$

系统的总利润由企业的销售利润、顾客取消预订的利润、服务成本、企业的缺货延迟成本组成。

### 1.2.1 销售利润净现值

企业的销售利润由  $[0, T_1]$  和  $[T_1, T]$  内的销售利润组成, 其净现值分别为  $R_1 = p_1 \int_0^{T_1} [d(p_1) - \eta t^{-1} I_1(t)] e^{-rt} dt = \frac{(1 - e^{-rT_1})}{(\eta + 1)r} p_1 d(p_1), R_2 = e^{-rT} (T - T_1) p_2 d(p_2)$ .

因此,  $[0, T]$  内销售利润净现值为

$$R_s = R_1 + R_2. \quad (4)$$

### 1.2.2 顾客取消预订利润净现值

$$R_c = a_1 \int_0^{T_1} \eta t^{-1} I_1(t) e^{-rt} dt = \frac{a_1 \eta (1 - e^{-rT_1})}{r(\eta + 1)} d(p_1). \quad (5)$$

### 1.2.3 服务成本净现值

$$C_p = cN + ce^{-rT} \int_{T_1}^T d(p_2) dt = \frac{cT_1}{\eta + 1} d(p_1) + ce^{-rT} (T - T_1) d(p_2). \quad (6)$$

### 1.2.4 缺货延迟成本净现值

$$C_b = c_1 \int_{T_1}^T I_2(t) e^{-rt} dt = \frac{c_1 [e^{-rT} (-rT - 1 + rT_1) + e^{-rT_1}]}{r^2} d(p_2). \quad (7)$$

由(4)~(7)式得到第一周期利润净现值为

$$\pi = R_s + R_c - C_p - C_b. \quad (8)$$

因此, 得到计划期  $H$  内的总净利润为

$$\bar{\pi}(p_1, p_2, T_1, m) = \pi(1 + e^{-rT} + e^{-2rT} + \dots + e^{-(m-1)rT}) = \pi \left( \frac{1 - e^{-rmT}}{1 - e^{-rT}} \right), \quad (9)$$

其中,  $T = H/m$ .

订购批量  $Q$  既要满足当前周期的预订量又要满足上一周期的延迟预订量, 所以第一周期的订购批量为  $Q = N$ , 第 2 到第  $m$  周期的订购批量为

$$Q = N + \int_{T_1}^T d(p_2) dt = \frac{T_1}{\eta + 1} d(p_1) + (T - T_1) d(p_2). \quad (10)$$

综上, 基于预订销售的库存模型为

$$\max \bar{\pi}(p_1, p_2, T_1, m). \quad (11)$$

## 2 模型求解

由于利率  $r$  的值一般都很小 ( $r \ll 1$ ), 因而有  $e^{-rT_1} \approx 1 - rT_1 + (rT_1)^2/2$ , 将其代入(9)式, 可以得

到  $H$  内的总净利润  $\bar{\pi}(p_1, p_2, T_1, m)$  的近似表达式为

$$\bar{\pi}(p_1, p_2, T_1, m) = \left\{ -\frac{\beta(T_1 - \frac{1}{2}rT_1^2)}{\eta + 1}p_1^2 + \frac{q(T_1 - \frac{1}{2}rT_1^2) - \beta\eta a_1(T_1 - \frac{1}{2}rT_1^2) + \beta cT_1}{\eta + 1}p_1 + \frac{[qe^{-rT}(T - T_1) + \beta ce^{-rT}(T - T_1) + \beta c_1 e^{-rT}(-rT - 1 + rT_1) + \beta c_1(1 - rT_1 + \frac{1}{2}r^2T_1^2)]p_2/r^2 - \beta e^{-rT}(T - T_1)p_2^2 + \eta q a_1(T_1 - \frac{1}{2}rT_1^2)/(\eta + 1) - \frac{qcT_1}{\eta + 1} - qce^{-rT}(T - T_1) - [qc_1 e^{-rT}(-rT - 1 + rT_1) + qc_1(1 - rT_1 + \frac{1}{2}r^2T_1^2)]/r^2}{\eta + 1} \right\} \left( \frac{1 - e^{-rmT}}{1 - e^{-rT}} \right). \quad (12)$$

对固定的  $m$ , 分别求  $\bar{\pi}(p_1, p_2, T_1, m)$  关于  $p_1, p_2, T_1$  的偏导数, 得到

$$\frac{\partial \bar{\pi}(p_1, p_2, T_1, m)}{\partial p_1} = \left\{ -\frac{2\beta(T_1 - \frac{1}{2}rT_1^2)}{\eta + 1}p_1 + [(q - \eta\beta a_1)(T_1 - \frac{1}{2}rT_1^2) + \beta cT_1]/(\eta + 1) \right\} \left( \frac{1 - e^{-rmT}}{1 - e^{-rT}} \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}(p_1, p_2, T_1, m)}{\partial p_2} = \left\{ -2\beta e^{-rT}(T - T_1)p_2 + \frac{qe^{-rT}r^2(T - T_1)}{r^2} + [\beta ce^{-rT}r^2(T - T_1) + \beta c_1 e^{-rT}(-rT - 1 + rT_1) + \beta c_1(1 - rT_1 + \frac{1}{2}r^2T_1^2)]/r^2 \right\} \left( \frac{1 - e^{-rmT}}{1 - e^{-rT}} \right), \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{\pi}(p_1, p_2, T_1, m)}{\partial T_1} = \left\{ -\frac{\beta(1 - rT_1)}{\eta + 1}p_1^2 + \frac{q - \eta\beta a_1(1 - rT_1) + \beta c}{\eta + 1}p_1 + \beta e^{-rT}p_2^2 + [-re^{-rT}(q + \beta c) + \beta c_1 e^{-rT} + \beta c_1(rT_1 - 1)]p_2/r + \frac{\eta q a_1(1 - rT_1)}{\eta + 1} - \frac{qc}{\eta + 1} + qce^{-rT} - \frac{qc_1 e^{-rT} - qc_1(1 - rT_1)}{r} \right\} \left( \frac{1 - e^{-rmT}}{1 - e^{-rT}} \right). \quad (15)$$

再分别令上述偏导数等于零, 并求解相应的方程组(13), (14)和(15)得到

$$T_1 = \frac{1 - e^{-rT}(1 + rT)}{r(1 - e^{-rT})}, \quad (16)$$

$$p_1 = \frac{q - 2\beta\eta a_1}{2\beta} + \frac{c(1 - e^{-rT})}{1 - e^{-rT}(1 - rT)}, \quad (17)$$

$$p_2 = \frac{r(q + \beta c) - \beta c_1}{2\beta r} + \frac{c_1 rT - c_1(1 - e^{-rT})}{2r(rT + e^{-rT} - 1)} + \frac{c_1[1 - e^{-rT}(1 + rT)]^2}{4re^{-rT}(1 - e^{-rT})(rT + e^{-rT} - 1)}. \quad (18)$$

这就可以给出求解模型(11)的近似算法如下.

步骤 1: 输入参数;

步骤 2: 对  $m = 1, 2, \dots$ , 分别利用(16)~(18)式计算  $(p_1^m, p_2^m, T_1^m)$ , 并代入(12)式中计算  $\bar{\pi}(p_1^m, p_2^m, T_1^m, m)$ ;

步骤 3: 计算  $m^*$  及  $(p_1^*, p_2^*, T_1^*)$  满足:  $\bar{\pi}(p_1^*, p_2^*, T_1^*, m^*) = \max \bar{\pi}(p_1^m, p_2^m, T_1^m, m)$ , 再由(10)式计算近似的最佳订购量  $Q^*$ .

利用本算法计算得到的  $m^*, p_1^*, p_2^*, T_1^*$  和  $Q^*$  是模型(11)的近似最优解和最优值.

### 3 数值实例

令需求率  $d(p) = 150 - 4p, c = 5, c_1 = 0.4, a_1 = 4, \eta = 0.12, r = 0.08$  且都带有适合的单位, 计划期长度  $H = 12$  月. 由表 1 可知, 模型(11)的近似最优解为:  $m^* = 11, p_1^* = 20.82, p_2^* = 21.30, T_1^* = 0.5375, Q^* = 67.86, \bar{\pi}^* = 7673.5$ .

表 1 数值实例计算结果

Table 1 The results of numerical examples

$m$	$p_1$	$p_2$	$T_1$	$Q$	$\bar{\pi}^*$	备注 Remark
8	20.85	21.33	0.7350	93.20	7618.2	
9	20.84	21.32	0.6548	82.88	7640.8	
10	20.83	21.31	0.5904	74.62	7658.8	
11	20.82	21.31	0.5375	67.86	7673.5	最优净利润 Optimal net profit
12	20.82	21.33	0.4933	62.16	7673.1	
13	20.82	21.30	0.4559	57.44	7655.2	
14	20.81	21.30	0.4237	53.35	7630.1	

每次改变一个参数的值, 得到模型(11)的最优解的灵敏度(表 2~7)显示,  $p_1^*, p_2^*, Q^*, \bar{\pi}^*$  随  $q$  的增大而增大, 随  $\beta$  的增大而减小;  $p_1^*, p_2^*$  随  $c$  的增大而增大,  $Q^*, \bar{\pi}^*$  随  $c$  的增大而减小;  $p_2^*$  随着  $c_1$  的增大而增大,  $Q^*, \bar{\pi}^*$  随  $c_1$  的增大而减小,  $p_1^*$  不随  $c_1$  变化;  $p_1^*$  随  $a_1$  的增大而减小,  $Q^*, \bar{\pi}^*$  随  $a_1$  的增大而增大,  $p_2^*$  不随  $a_1$  变化;  $p_1^*, Q^*, \bar{\pi}^*$  随  $\eta$  的增大而减小,  $p_2^*$  不随  $\eta$  变化;  $T_1^*$  不随  $q, \beta, c, c_1, a_1, \eta$  变化,  $T_1^*$  只与  $m$  有关且随  $m$  的增大而减小.

表 2 最优解对参数  $q$  的灵敏度

Table 2 Sensitivity analysis for  $q$

$q$	$p_1^*$	$p_2^*$	$T_1^*$	$Q^*$	$\bar{\pi}^*$
110	15.82	16.31	0.5375	47.19	3689.5
120	17.07	17.56	0.5375	52.36	4550.3
130	18.32	18.81	0.5375	57.52	5501.2
140	19.57	20.06	0.5375	62.69	6542.3
150	20.82	21.31	0.5375	67.86	7673.5
160	22.07	22.56	0.5375	73.02	8894.9
170	23.32	23.81	0.5375	78.19	10206
180	24.57	25.06	0.5375	83.36	11608
190	25.82	26.31	0.5375	88.52	13100

表 3 最优解对参数  $\beta$  的灵敏度

Table 3 Sensitivity analysis for  $\beta$

$\beta$	$p_1^*$	$p_2^*$	$T_1^*$	$Q^*$	$\bar{\pi}^*$
1	77.07	77.56	0.5375	75.09	37972.0
2	39.57	40.06	0.5375	72.68	17730.0
3	27.07	27.56	0.5375	70.27	11011.0
4	20.82	21.31	0.5375	67.86	7673.5
5	17.07	17.56	0.5375	65.44	5687.9
6	14.57	15.06	0.5375	63.03	4378.4
7	12.79	13.27	0.5375	60.62	3455.3
8	11.45	11.93	0.5375	58.21	2773.8
9	10.41	10.89	0.5375	55.80	2253.2

表 4 最优解对参数  $c$  的灵敏度

Table 4 Sensitivity analysis for  $c$

$c$	$p_1^*$	$p_2^*$	$T_1^*$	$Q^*$	$\bar{\pi}^*$
1	18.78	19.31	0.5375	76.21	9693.5
2	19.29	19.81	0.5375	74.12	9166.4
3	19.80	20.31	0.5375	72.03	8654.0
4	20.31	20.81	0.5375	69.94	8156.4
5	20.82	21.31	0.5375	67.86	7673.5
6	21.34	21.81	0.5375	65.77	7205.3
7	21.85	22.31	0.5375	63.68	6751.9
8	22.36	22.81	0.5375	61.59	6313.2
9	22.87	23.31	0.5375	59.50	5889.2

表 5 最优解对参数  $c_1$  的灵敏度

Table 5 Sensitivity analysis for  $c_1$

$c_1$	$p_1^*$	$p_2^*$	$T_1^*$	$Q^*$	$\bar{\pi}^*$
0.1	20.31	20.76	0.5375	70.04	8177.8
0.2	20.31	20.78	0.5375	70.01	8170.6
0.3	20.31	20.79	0.5375	69.97	8163.5
0.4	20.31	20.81	0.5375	69.94	8156.4
0.5	20.31	20.82	0.5375	69.91	8149.3
0.6	20.31	20.84	0.5375	69.88	8142.2
0.7	20.31	20.85	0.5375	69.85	8135.0
0.8	20.31	20.86	0.5375	69.82	8127.9
0.9	20.31	20.88	0.5375	69.79	8120.9

表 6 最优解对参数  $a_1$  的灵敏度

Table 6 Sensitivity analysis for  $a_1$

$a_1$	$p_1^*$	$p_2^*$	$T_1^*$	$Q^*$	$\bar{\pi}^*$
1	20.67	20.81	0.5375	69.25	8073.0
2	20.55	20.81	0.5375	69.48	8100.8
3	20.43	20.81	0.5375	69.71	8128.6
4	20.31	20.81	0.5375	69.94	8156.4
5	20.19	20.81	0.5375	70.17	8184.2
6	20.07	20.81	0.5375	70.40	8212.0
7	19.95	20.81	0.5375	70.63	8239.8
8	19.83	20.81	0.5375	70.86	8267.6
9	19.71	20.81	0.5375	71.10	8295.4

表 7 最优解对参数  $\eta$  的灵敏度

Table 7 Sensitivity analysis for  $\eta$

$\eta$	$p_1^*$	$p_2^*$	$T_1^*$	$Q^*$	$\bar{\pi}^*$
0.08	20.47	20.81	0.5375	70.85	8265.4
0.09	20.43	20.81	0.5375	70.61	8237.4
0.10	20.40	20.81	0.5375	70.39	8209.9
0.11	20.35	20.81	0.5375	70.16	8182.9
0.12	20.31	20.81	0.5375	69.94	8156.4
0.13	20.27	20.81	0.5375	69.72	8130.7
0.14	20.23	20.81	0.5375	69.52	8140.7
0.15	20.19	20.81	0.5375	69.31	8079.6
0.16	20.15	20.81	0.5375	69.10	8054.9

表 2~7 的结论是符合实际的,当企业某种服务

的成本增大(减小)时,在其它条件不变的情况下,其价格亦会增大(减小),而其订购量与利润则会减小(增大);另外,在某一计划期内,由于是等周期订购,因此周期大小只与订购次数有关,订购次数越多,周期越小,反之亦成立.

#### 4 结束语

本文在考虑货币时间价值影响的条件下,建立采用预订销售策略的库存-销售模型,给出一种确定最优销售价格、预订销售周期、订购量及最优净利润的近似方法.数值例子分析结果显示,新建立的库存-销售模型符合企业的实际情况.预订销售还包括很多方面,如果进一步研究,还可以考虑需求与价格、库存水平、服务质量等多种因素相关的问题,或者考虑需求是随机的情形.另外,多种服务的问题也是一个很有意义的研究课题,有待于进一步研究.

#### 参考文献:

- [1] CHEN Y T, LEE K H. A flexible service model for advance reservation [J]. Computer Networks, 2001, 37: 251-262.
- [2] YOU PENGSHENG. Ordering and pricing of service products in an advance sales system with price-dependent demand [J]. European Journal of Operational Research, 2006, 170: 57-71.
- [3] LEE KHAI SHEANG, NG IRENE C L. Advanced sale of service capacities: a theoretical analysis of the impact of price sensitivity on pricing and capacity allocations [J]. Journal of Business Research, 2001, 54: 219-225.
- [4] 彭作和, 田彭. 考虑货币时间价值的变质商品临时价格折扣模型 [J]. 系统工程理论与实践, 2004, 9: 1-8.
- [5] WEE HUIMING, LAW SHTYAN. Replenishment and pricing policy for deteriorating items taking into account the time-value of money [J]. International Journal of Production Economics, 2001, 71: 213-220.
- [6] CHEN JENMING, CHEN LIANGTU. Pricing and production lot-size/scheduling with finite capacity for a deteriorating item over a finite horizon [J]. Computers and Operations Research, 2005, 32: 2801-2819.
- [7] CHUNG K, LIU J, TSAI S. Inventory systems for deteriorating items taking account of time value [J]. Engineering Optimization, 1997, 27: 303-320.
- [8] CHUNG K, LIN C. Optimal inventory replenishment models for deteriorating items taking account of time value of money [J]. Computers and Operations Research, 2001, 28: 67-83.

(责任编辑: 韦廷宗)