广西科学 Guangxi Sciences 2007,14(3):193～195

# PBD 闭集 $H_{0,1(4)\backslash\{4\}}$ 的有限生成集*

# The Finite Generating Set of PBD Closure $H_{0,1(4)\backslash\{4\}}$

吴佃华,罗秀花

WU Dian-hua,LUO Xiu-hua

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林　541004)

(Department of Mathematics,Guangxi Normal University,Guilin,Guangxi,541004,China)

**摘要**:给出 PBD 闭集 $H_{0,1(4)\backslash\{4\}}$ 的有限生成集 $Q=\{5,8,9,12,13,16,17,20,24,28,29,32,33,44,52,68,84,92\}$.

**关键词**:PBD 闭集　有限生成集　正交拉丁方　可分组设计　横截设计

**中图法分类号**:O157.2　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2007)03-0193-03

**Abstract**:It is proved that $Q=\{5,8,9,12,13,16,17,20,24,28,29,32,33,44,52,68,84,92\}$ is the finite generating set of PBD closure $H_{0,1(4)\backslash\{4\}}$.

**Key words**:PBD closure,finite generating set,orthogonal Latin squares,group divisible design,transversal design

设 $v,\lambda$ 为正整数且 $K$ 为某些正整数的集合,一个区组设计$(X,\mathscr{A})$,若满足:

(1)$|X|=v$;

(2)$\{A:A\in\mathscr{A}\}\subseteq K$,$\mathscr{A}$ 中的元素称为区组;

(3)每一对集$\{x,y\}\subset X$ 恰包含于 $\lambda$ 个区组中,

则称该设计为成对平衡设计,记作 $B[K,\lambda;v]$或$(v,K,\lambda)-$PBD.

**例**　设 $X=\{a,b,c,d\}$,$\mathscr{A}=\{abc,abd,bcd,ac,ad,cd\}$,则$(X,\mathscr{A})$是一个$(4,\{2,3\},2)-$PBD.

设 $K$ 为正整数集合,定义 $B(K)=\{v$:存在$(v,K,1)-$PBD$\}$. 若 $B(K)=K$,则称 $K$ 为 PBD 闭集. 其理论由 R. M. Wilson[1]提出,他证明了任何一个 PBD 闭集都包含一个有限基,也就是说,若 $K$ 是一个 PBD 闭集,则存在 $K$ 的一个有限子集 $K_0$,使得 $B(K_0)=K$. PBD 闭集是组合设计的一个重要内容,很多设计的存在性问题的证明都用到 PBD 闭集的有限生成集.

令 $H_{0,1(a)}=\{v:v\geqslant a,v\equiv 0,1(\bmod a)\}$. 设 $S$ 是一个集合,令 $H_{0,1(a)\backslash S}=\{v:v\in H_{0,1(a)},v\notin S\}$,文献[2]中给出了 $a=3,4,5$ 时 PBD 闭集 $H_{0,1(a)}$的有限生成集,也给出了 PBD 闭集 $H_{0,1(3)\backslash\{3\}}$,$H_{0,1(3)\backslash\{3,4\}}$,$H_{0,1(4)\backslash\{4,5\}}$的有限生成集.

**引理 1**[2]　$H_{0,1(a)}=B(F_a)$,$3\leqslant a\leqslant 5$,其中

$F_3=\{3,4,6\}$,$F_4=\{4,5,8,9,12\}$,$F_5=\{5,6,10,11,16,20,35,40\}$.

令$[x,y]_a^{0,1}=\{v:v\equiv 0,1(\bmod a),x\leqslant v\leqslant y\}$.

**引理 2**[2]　$H_{0,1(3)\backslash\{3\}}=B(G_1)$,$H_{0,1(3)\backslash\{3,4\}}=B(G_2)$,其中

$G_1=\{4,6,7,9,10,12,15,18,19,24,27\}$,

$G_2=[6,30]_3^{0,1}U[33,40]_3^{0,1}U\{45,46,51,52,69,93,94\}$.

**引理 3**[3]　$H_{0,1(4)\backslash\{4,5\}}=B(H)$,其中

$H=[8,56]_4^{0,1}\cup\{60,61,68,69,76,77,84,85,88,92,93,101,173,176,177,180,181,184,188,189\}$.

一个很自然的问题就是:求出 $H_{0,1(4)\backslash\{4\}}$的有限生成集. 本文得到以下结论.

**定理 1**　$H_{0,1(4)\backslash\{4\}}=B(Q)$,其中

$Q=\{5,8,9,12,13,16,17,20,24,28,29,32,33,44,52,68,84,92\}$.

## 1　预备知识[4]

**定义 1**　设 $X$ 为一个 $n$ 元集,$A=(a_{ij})_{n\times n}$是元素取自 $X$ 的 $n$ 阶方阵,若满足:

$\{a_{ij}:1\leqslant j\leqslant n\}=X$,$1\leqslant i\leqslant n$,$\{a_{ij}:1\leqslant i\leqslant n\}=X$,$1\leqslant j\leqslant n$,

则称 $A$ 为集 $X$ 上的 $n$ 阶拉丁方. 若还有 $n$ 元集 $X'$上的 $n$ 阶拉丁方 $B=(b_{ij})_{n\times n}$满足:

**收稿日期**:2007-05-10

**作者简介**:吴佃华(1966-),男,教授,博士,主要从事组合数学研究。

*国家自然科学基金项目(10561002),广西自然科学基金项目(0640062)资助。

$\{(a_{ij},b_{ij})\mid 1\leqslant i,j\leqslant n\}=X\times X'$,

则称拉丁方 $A$ 与拉丁方 $B$ 正交.

**定义 2** 若 $k$ 个 $n$ 阶拉丁方 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中每两个都是正交的,则称它们是 $k$ 个两两正交的 $n$ 阶拉丁方,记作 $k\ MOLS(n)$. 以 $N(n)$ 记 $n$ 阶两两正交拉丁方的最大个数.

**定义 3** 设 $X$ 是一个有限集,$A_1,A_2,\cdots,A_b$ 是它的 $b$ 个子集,则称 $(X,\mathscr{A})$ 是集 $X$ 上的一个区组设计,其中 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_b\}$,$A_i(1\leqslant i\leqslant b)$ 称为设计的区组.

**定义 4** 设 $(X,\mathscr{A})$ 是一个区组设计,$A_1\subset\mathscr{A}$. 如果对任一个元 $x\in X$,$x$ 恰在 $A_1$ 的一个区组中出现,则称 $A_1$ 是该设计的一个平行类,如果 $\mathscr{A}$ 可以表为两两不相交的若干个平行类的并,则称该设计为可分解设计.

**定义 5** 一个 $(v,\{k\},\lambda)$-PBD 称为一个平衡不完全区组设计,记作 $B[k,\lambda;v]$ 或 $(v,k,\lambda)-BIBD$. 如果一个 $(v,k,\lambda)-BIBD$ 是可分解设计,则称为可分解平衡不完全区组设计,记作 $RB[k,\lambda;v]$ 或 $(v,k,\lambda)-RBIBD$.

**定义 6** 设 $\mathscr{G}$ 是设计 $(X,\mathscr{G}\cup\mathscr{A})$ 的平行类,$\lambda,v$ 为正整数,$K,M$ 为正整数的集合,满足:

(1) $|X|=v$;

(2)对每一个 $G_i\in\mathscr{G}$,$|G_i|\in M$,$G_i$ 称为组;

(3)对每一个 $A_i\in\mathscr{A}$,$|A_i|\in K$,$A_i$ 称为区组;

(4)对每一个 $G_i\in\mathscr{G}$ 及对每一个 $A_j\in\mathscr{A}$,$|G_i\cap A_j|\leqslant 1$;

(5)对 $X$ 中属于不同组的元 $x$ 和 $y$,对集 $\{x,y\}$ 恰包含于 $\mathscr{A}$ 的 $\lambda$ 个区组中,则称该设计为可分组设计,记作 $GD[K,\lambda,M;v]$. 若 $\mathscr{G}$ 中有大小 $m_1$ 的组 $t_1$ 个,大小 $m_2$ 的组 $t_2$ 个,$\cdots$,大小 $m_s$ 的组 $t_s$ 个,则称 $m_1^{t_1}m_2^{t_2}\cdots m_s^{t_s}$ 是组的型.

**定义 7** 称一个 $GD[k,\lambda,m;km]$ 为横截设计,记作 $TD[k,\lambda;m]$. 当 $\lambda=1$ 时,记作 $TD[k,m]$.

以下结果是众所周知的.

**引理 4** $k-2\ MOLS(n)$ 的存在性等价于横截设计 $TD[k,n]$ 的存在性.

关于组合设计的知识,参考文献[2,4,5],关于正交拉丁方的知识参考文献[6].

## 2 定理 1 的证明

为了证明定理 1,先给出以下几个引理.

**引理 5**[7] $(v,5,1)-BIBD$ 存在的充要条件是 $v\equiv 1,5 \pmod{20}$.

**引理 6** 若 $v\in\{21,25,41,45,61,85,101,181\}$,则 $v\in B(H_{0,1(4)\setminus\{4\}})$.

**证明** 若 $v\in\{21,25,41,45,61,85,101,181\}$,由引理 5,存在 $(v,5,1)-BIBD$,故命题成立.

**引理 7** 设 $a=0$ 或 1,若 $N(n)\geqslant 3$,$n+a\equiv 0,1 \pmod 4$ 且 $n+a\geqslant 5$,则 $5n+a\in B(H_{0,1(4)\setminus\{4\}})$.

**证明** 由 $N(n)\geqslant 3$ 及引理 4,存在 $TD[5,n]$,在该设计的每一组中加入同一点(若 $a=0$,则不用加),得到 $(5n+a,\{5,n+a\},1)$-PBD,故命题成立.

**引理 8** 若 $v\in\{36,40,56,60,76,176,180\}$,则 $v\in B(H_{0,1(4)\setminus\{4\}})$.

**证明** 当 $n\in\{7,8,11,12,15,35,36\}$ 时,$N(n)\geqslant 3$(见文献[6]),对于上述 $n$,由引理 7 知,当 $n+a\equiv 0,1 \pmod 4$ 且 $n+a\geqslant 5$(其中 $a=0$ 或 1)时,$v=5n+a\in B(H_{0,1(4)\setminus\{4\}})$. 命题成立.

**引理 9**[8] $(w,4,1)-RBIBD$ 存在的充要条件是 $w\equiv 4 \pmod{12}$.

**引理 10** 若存在 $(w,4,1)-RBIBD$,则存在 $(w+r,\{5,r\},1)$-PBD,其中 $r=\dfrac{w-1}{3}\equiv 1 \pmod 4$.

**证明** 若存在 $(w,4,1)-RBIBD$,则由引理 9,$w\equiv 4 \pmod{12}$,该设计有 $r=\dfrac{w-1}{3}$ 个平行类,易知 $r\equiv 1 \pmod 4$. 在该设计的每一个平行类中加入一个点,再将所有加入的点算作一个区组,即可得到所需设计.

**引理 11** 若 $v\in\{37,53,69\}$,则 $v\in B(H_{0,1(4)\setminus\{4\}})$.

**证明** 由引理 9,当 $w\in\{28,40,52\}$ 时,存在 $(w,4,1)-RBIBD$,由引理 10 有 $28+\dfrac{28-1}{3}=37\in B(\{5,9\})$,$40+\dfrac{40-1}{3}=53\in B(\{5,13\})$,$52+\dfrac{52-1}{3}=69\in B(\{5,17\})$,故可得结论.

**引理 12** 若 $v\in U=\{48,49,77,88,93,173,177,184,188,189\}$,则 $v\in B(H_{0,1(4)\setminus\{4\}})$.

**证明** 由文献[2]知,当 $v=173$ 时,$v\in B(\{5,9,13\})\subseteq B(H_{0,1(4)\setminus\{4\}})$. 当 $v\in U\setminus\{173\}$ 时,$v\in B(\{5,8,9\})\subseteq B(H_{0,1(4)\setminus\{4\}})$,故命题成立.

**定理 1 的证明** 我们只需要证明,对任意 $v\in(\{5\}\cup H)\setminus Q$,$v\in B(Q)$. 而由引理 6,8,11,12 可得,对任意 $v\in(\{5\}\cup H)\setminus Q$,$v\in B(Q)$,所以命题成立.

**参考文献:**


[1] WILSON R M. An existence theory of pairwise balanced designs Ⅱ —— The structure of PBD-closed sets and existence conjecture[J]. Journal of Combinatorial Theory (A),1972,13:246-273.

[2] BENNETT F E,GRONAU O F,LING A C H,et al.

PBD-closure[M]//COLBOURN C J, DINITZ J H. The CRC handbook of combinatorial designs. Boca Raton: CRC Press, 1996: 203-212.

[3] GE G, WU D. 4-*GDD(3^n)s and generalized steiner systems GS(2,4,v,3) [J]. Journal of Combinatorial Designs, 2003, 11: 381-393.

[4] 沈灏.组合设计理论[M].上海:上海交通大学出版社,1996.

[5] BETH T, JUNGNICKEL D, LENZ H. Designs theory [M]. England: Cambriage University Press, 1986.

[6] ABEL R J R, BROUWER A E. Mutually orthogonal latin squares (Mols)[M]//COLBOURN C J, DINITZ J H. The CRC handbook of combinatorial designs. Boca Raton: CRC Press, 1996: 111-141.

[7] ABEL R J R, GREIG M. BIBD with small blocks[M]//COLBOURN C J, DINITZ J H. The CRC handbook of combinatorial designs. Boca Raton: CRC Press, 1996: 41-46.

[8] ABEL R J R, FURINO S C. Resolvable and near resolvable designs[M]//COLBOURN C J, DINITZ J H. The CRC handbook of combinatorial designs. Boca Raton: CRC Press, 1996: 87-94.

(责任编辑:尹　闯　邓大玉)

## 活体哺乳动物细胞转录机制首次发现

转录(Transcription),这一将DNA的遗传信息通过信使RNA的互补合成传递下去的过程,组成了所有细胞活性的基本构成。但是有关这一过程的动力学,比如这一过程有效性有多高,能进行多久等等这些问题至今人们了解得很少。来自阿尔伯特·爱因斯坦医学院解剖学与结构生物学系,法国科学研究基金会,以色列Bar-Ilan大学的研究人员利用一种先进的显微技术同步测量了转录的步骤,这一从未实现过的实验得到了令人惊讶的结果,从基础上改变了目前已知的转录过程。

转录是蛋白质生物合成的第一步,也是tRNA和rRNA的合成步骤。

转录中,一个基因会被读取复制为mRNA,就是说一特定的DNA片段作为模板,以DNA依赖的RNA合成酶作为催化剂的合成前体mRNA的过程。这一DNA指导的RNA合成作用以DNA为模板,在RNA聚合酶催化下,以4种三磷酸核苷(NTP)即ATP、GTP、CTP及UTP为原料,各种核苷酸之间的3′、5′磷酸二酯键相连进行聚合反应。合成反应的方向为5′→3′。反应体系中还有$Mg^{2+}$、$Mn^{2+}$等参与,不需要引物参与。碱基互补原则为A—U、G—C,在RNA中U替代T与A配对。

RNA聚合酶是催化转录作用的酶,原核生物与真核生物都有各自的RNA聚合酶,原核生物RNA聚合酶的结构是由5个亚基组成,为2条α链,1条β链,1条β′链和1条σ因子链,α 2ββ′4个亚基组成核心酶,加上σ因子后成为全酶α 2ββ′σ;真核生物中已发现有4种RNA聚合酶,分别称RNA聚合酶Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Mt。

RNA聚合酶Ⅱ转录生成hnRNA和mRNA,是真核生物中最活跃的RNA聚合酶。

RNA聚合酶Ⅲ转录的产物都是小分子量的RNA,tRNA,5SrRNA和snRNA。

RNA聚合酶Ⅰ转录产物是45SrRNA,生成除5SrRNA外的各种rRNA。

这一最新研究就是围绕着RNA聚合酶Ⅱ进行的,在转录过程中,DNA附近会聚集越来越多的RNA聚合酶Ⅱ,然后RNA聚合酶Ⅱ就会通过特异性互补作用合成RNA。

为了观测到这一转录过程,研究人员利用活体哺乳动物细胞——每一个细胞都包含着研究人员插入到细胞染色体中的一个人工基因的200个拷贝。然后通过将荧光标签加在RNA聚合酶Ⅱ上,就能够观测到转录过程的3个步骤了:酶分子结合绑定到DNA上,启动(当酶与第一个RNA核苷结合在一起)和延伸(RNA分子剩余部分的延伸)。当研究人员观测RNA聚合酶Ⅱ分子与DNA结合,并制造出新的RNA的时候,他们发现酶分子结合上去后会立即脱落下来。所以研究人员认为,转录过程实际上效率十分低,结合到基因上的聚合酶只有1%帮助合成RNA。他们还不能肯定这是什么原因,他们认为这也许是由于转录过程中需要的所有因子都要在正确的时间,正确的地点聚集在一起,因此需要酶不断地脱落,又不断地补充上去,直到所有的元素都精确到位。

研究人员观察到转录的结合过程持续大约6s,启动则需要54s,而比较而言,转录的延伸过程则需要长达517s(大约8min)。研究人员认为可能的原因就是:"先锋"聚合酶有时会"停顿"一段较长的时间,延迟转录过程,就像狭长的街道上,一辆车挡住了后面所有的车。但是一旦过了这一停顿过程,延伸过程就变快了——大约每秒70个核苷合成,这比之前报道的要快的多。

停顿和延伸过程中快速的RNA合成,也许是调控基因表达的关键过程。研究人员认为,利用这种机制,就算突然出现什么状况,你都可以应付自如,一旦这一停顿酶重新开始,就能以极高的速度合成突然急需大量特异性蛋白的mRNA。

(据科学网)