广西科学 Guangxi Sciences 2007,14(3):196～199

有限可解群的 *CI*-截刻画 *

On the Solvability of Finite Groups Based on *CI*-section

唐曾林[1],钟祥贵[2],黄雨星[1]
TANG Zeng-lin[1],ZHONG Xiang-gui[2],HUANG Yu-xing[1]

(1. 湖南文理学院数学系,湖南常德 415000;2. 广西师范大学数学系,广西桂林 541004)
(1. Department of Mathematis, Hunan University of Arts and Science, Changde, Hunan, 415000, China; 2. Department of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要:利用极大子群的 CI- 截定义,得到有限可解群的新刻画:(1) 有限群 G 可解的充分必要条件是 G 中存在可解极大子群 $M \in F^s(G)$,使 $Sec(M)=1$;(2) 有限群 G 可解的充分必要条件是 G 中指数既非素数也非素数平方的极大子群 M 之 $Sec(M)$ 为幂零群.推广了几个已知的重要结果.

关键词:有限群　极大子群　CI- 截　可解群

中图法分类号:O152.1　**文献标识码**:A　**文章编号**:1005-9164(2007)03-0196-04

Abstract: Some new characterizations of solvable finite groups are obtained using the concept of CI-section. They are (1)a group G is solvable if and only if there exists a solvable maximal subgroup $M \in F^s(G)$ such that $Sec(M)=1$; (2)a group G is solvable if and only if $Sec(M)$ is nilpotent for all maximal subgroups M of G such that $|G:M| \neq p, p^2$ where p is a prime divisor of $|G|$. Some previous results are generalized.

Key words: finite group, maximal subgroup, CI-section, solvable group

1 预备知识及引理

1998 年,李世荣教授在文献[1]中首次给出极大子群的 CI- 截的概念:给定群 G 及群 G 的极大子群 M,令 N/K 是群 G 的一个主因子,若 $K \leqslant M$ 而 $N \not\subseteq M$ 则称 $(M \cap N)/K$ 为 M 的一个 CI- 截.记为 $Sec(M)$.它有下列重要性质:

性质 1.1[1]　对于群 G 的任意极大子群 M,在同构意义下 M 在 G 中有唯一的 CI- 截.

性质 1.2[1]　令 $N \leqslant M <\cdot G, N \trianglelefteq G$,那么 M/N 与 M 的 CI- 截同构.

性质 1.3　有限单群 G 的每个极大子群 M,有 $Sec(M)=M$.

性质 1.4　有限群 G 的每个正规极大子群 M,有 $Sec(M)=1$.

性质 1.5　有限可解群 G 的每个极大子群 M,有 $Sec(M)=1$.

另外,我们还会用到所谓的 Tompson 子群:令 P 是一个素数幂阶群,$A(P)$ 为 P 的具有极大阶的交换群之集合,定义:$J(P)=\langle A | A \in A(P)\rangle$,称为群 P 的 Tompson 子群.

定义 1.1　$F^s(G)=\{M <\cdot G | N_G(P) \leqslant M$,其中 P 是 G 的某个西洛子群$\}$.

定义 1.2　$F^{ps}(G)=\{M <\cdot G | M \in F^s(G)$ 且 $|G:M| \neq p^\beta, \beta \geqslant 1\}$.

定义 1.3　$\Phi^s(G)=\bigcap\{M <\cdot G | M \in F^s(G)\}$,若 $F^s(G) \neq \varnothing$;否则,$\Phi^s(G)=G$.

定义 1.4　$\Phi^{ps}(G)=\bigcap\{M <\cdot G | M \in F^{ps}(G)\}$,若 $F^{ps}(G) \neq \varnothing$;否则,$\Phi^{ps}(G)=G$.

显然 $\Phi^{ps}(G)$ 和 $\Phi^s(G)$ 都是群 G 的特征子群,文献[2]指出 $\Phi^s(G)$ 是幂零的,文献[3]给出了 $\Phi^{ps}(G)$ 是可解群的证明.下面的引理在本文定理中起关键作用:

引理 1.1[4]　设 $N \trianglelefteq G$,p 是 $|G|$ 的一个素因子,P 是一个 p- 子群,那么 $N_G(P)N/N \leqslant N_{G/N}(PN/N)$ 当且仅当 $(|N|, p)=1$ 时等号成立.

引理 1.2[5]　设 G 是有限群,p 是 $|G|$ 的一个素

收稿日期:2006-08-07
修回日期:2007-02-05
作者简介:唐曾林(1973-),男,讲师,主要从事有限群研究。
* 湖南文理学院重点科研项目(JJZD0701)及广西科学基金项目(0575050)资助。

因子，如果群 G 的每一个非幂零极大子群的指数都是 p 的方幂，那么 G 可解.

引理 1.3[4] 设 M 为群 G 的一个可解极大子群，K 是 G 的非可解正规子群，满足 $G=MK$，那么 $M\cap N>1$.

引理 1.4[4](wieland) 设 H 为群 G 的幂零 Hall-子群，但不是西洛子群，假若对 $|H|$ 的任意素因子 p，H 的 Sylow-p 子群 P 满足 $N_G(P)=H$，那么存在 $K\trianglelefteq G$ 使得：$G=KH$ 且 $K\cap H=1$.

引理 1.5[6] 设群 G 有一个核为 1 的极大子群，则下列结论等价：

(1)G 中存在非平凡的可解正规子群.

(2)G 中存在唯一的极小正规子群，并且每个含在 $F^s(G)$ 中且在 G 中核为 1 的极大子群，在 G 中的指数有一个共同的素因子.

(3)G 中所有核为 1 的极大子群在 G 中的指数为素数方幂.

引理 1.6 设 G 是有限群，p 是 $|G|$ 的最大素因子，$P\in Syl_p(G)$，如果 $P\ntrianglelefteq G$，那么对满足 $N_G(P)\leqslant M$ 的极大子群 M，有 $|G:M|$ 是合数，并且当 G 非可解时，$|G:M|$ 不等于素数的平方.

证明 首先证明 $|G:M|$ 是合数. 因为 P 在 G 中非正规，于是存在群 G 的极大子群 M，满足：$N_G(P)\leqslant M$，如果 $|G:M|$ 是素数 r，则 $G/Core_G(M)$ 与 S_r(r 个文字上的对称群）的一个子群同构，所以 r 是 $|G/Core_G(M)|$ 的最大素因子，但是 $r<p$，可得 $P\leqslant Core_G(M)$，根据 Frantini 论断 $G=Core_G(M)N_G(P)\leqslant M$，矛盾. 所以 $|G:M|$ 是合数. 又假设 G 非可解. 若 $|G:M|$ 为一素数的平方，不防设 $|G:M|=q^2$，由 p 的极大性可知 $q<p$，因为 $P\in Syl_p(M)$，故 $|M:N_M(P)|=|M:N_G(P)\cap M|=|M:N_G(P)|\equiv 1(P)$，另一方面，由西洛定理 $|G:N_G(P)|\equiv 1(p)$，所以 $|G:M|\equiv 1(p)$，即 $q^2\equiv 1(p)$，于是 $p\mid(q-1)(q+1)$，由 $p>q$，得 $p=q+1$，故 $q=2,p=3$. 所以 $|G|$ 中只有两个素因子，根据 Burnside 定理，群 G 可解，矛盾. 从而引理得证.

引理 1.7 设 G 是非交换单群，那么它的所有幂零极大子群都是 G 的西洛 2- 子群.

证明 任取 G 的一个幂零极大子群 M，我们分以下几步证明.

(1)M 是 G 的 Hall- 子群.

根据著名的 D. J. T 定理[4]，M 是偶数阶群. 假设 M 不是 G 的 Hall- 子群. 则存在素数 $p\mid|M|$，满足 $1<M_p<G_p$，其中 $M_p\in Syl_p(M)$，$G_p\in Syl_p(G)$，此时必定有 $M<N_G(M_p)\leqslant G$. 这是因为，根据假设，M 幂零，所以 $M\leqslant N_G(M_p)\leqslant G$. 又因为 $1<M_p<G_p$，从而存在 G_p 的子群 K，使得 M_p 是 K 的极大子群. 于是 M_p 是 K 的正规子群，即 K 包含于 $N_G(M_p)$. 但是另一方面，M_p 已经是 M 的 Sylow 子群，所以 K 不包含于 M，这说明，$N_G(M_p)$ 不可能和 M 相等，所以只能是 $M<N_G(M_p)\leqslant G$.

根据 G 的单性和 M 的极大性得：$M_p=1$，矛盾. 所以 M 是 G 的 Hall- 子群.

(2)M 是 G 的西洛 - 子群.

假若 M 不是 G 的西洛 - 子群，记 $M_p\in Syl_p(M)$，对 M 的任意西洛 - 子群 M_p，有 $M\leqslant N_G(M_p)\leqslant G$，由 G 的单性和 M 的极大性得：$M=N_G(M_p)$，由引理 1.4 可知存在 G 的正规子群 K 使 $G=KM$，$K\cap M=1$. 但 G 是单群，故 $K=1$ 或 $K=G$. 如果 $K=1$，有 $G=1\cdot M<G$ 矛盾，所以 $K=G$，但是此时 $M\cap K=G\cap K=K>1$ 与 $M\cap K=1$ 矛盾. 所以幂零极大子群 M 是 G 的西洛 - 子群.

(3)M 是 G 的西洛 2- 子群.

这是显然的.

引理 1.8[7] 设 $N\trianglelefteq G$，$P\in Syl_p(N)$，则存在 $G_p\in Syl_p(G)$，使得 $N_G(G_p)\leqslant N_G(P)$.

2 主要结果

定理 2.1 若 G 是有限群，p 是 $|G|$ 的一个素因子，M 是 G 的一个极大子群，并且当 $M\in F^{ps}(G)$ 时，$Sec(M)=1$，那么 G 可解.

证明 假设命题非真，并设 G 是极小阶反例. 如果 $F^{ps}(G)=\varnothing$，根据定义 1.4，$G=\Phi^{ps}(G)$ 可解，所以 $F^{ps}(G)\neq\varnothing$. 任取 $M\in F^{ps}(G)$，如果 G 是非交换单群，由定理假设和性质 1.3 可知 $Sec(M)=M=1$，这样 G 只能是素数阶循环群，矛盾. 于是可以假设 N 是 G 的一个非平凡的极小正规子群，考虑 G/N. 任取 $M/N\in F^{ps}(G/N)$，由引理 1.1，$N_G(Q)N/N\leqslant N_{G/N}(QN/N)\leqslant M/N$，其中 $Q\in Syl_q(G)$，得 $N_G(Q)\leqslant M$，又因为 $|G:M|=|G/N:M/N|\neq p^\beta,\beta\geqslant 1$，于是 $M\in F^{ps}(G)$，根据定理假设 $Sec(M)=1$，又由性质 1.2，$Sec(M/N)=1$，由归纳，G/N 可解. 于是进一步可以假设 N 是 G 的唯一 极小正规子群. 接下来欲证 N 可解. 假设 N 非可解，从而 $N\nsubseteq\Phi^s(G)$，说明存在极大子群 $M\in F^s(G)$ 使 $G=MN$，如果 $|G:M|$ 是素数 p 的方幂，那么 $|N|_p\neq 1$. 任取 $P_1\in Syl_p(N)$，存在 $M_1<\cdot G$ 使 $N_G(P_1)\leqslant M_1$，根据引理 1.8，存在 $G_p\in Syl_p(G)$，使得 $N_G(G_p)\leqslant N_G(P_1)\leqslant M_1$，所以 $M_1\in F^{ps}(G)$. 易知 $1=Sec(M_1)=M_1\cap N$，但是 $1=|G:M_1|_p=|M_1N:M_1|_p=|N:M_1\cap N|_p=$

$|N|_p \neq 1$ 矛盾. 所以 $|G:M|$ 不是 p 的方幂. 因此 $M \in F^{ps}(G)$，根据定理假设 $Sec(M)=1$，再次由 N 的唯一性，$Sec(M) = N \cap M = 1$，从而 $|G:M| = |N:N \cap M| = |N|$，现在对任意 $K \in F^s(G)$，满足 $K_G = 1$ 时 $G = KN$，如果 $|G:K|$ 是素数 p 的方幂，重复上面的证明得 $|N|_p \neq 1$ 和 $|N|_p = 1$ 矛盾，所以 $|G:K|$ 不是素数 p 的方幂，故 $K \in F^{ps}(G)$，根据定理假设 $Sec(K) = K \cap N = 1$，所以 $|G:K| = |N|$. 这说明，每个含于 $F^s(G)$，且在 G 中的核为 1 的极大子群在 G 中的指数有共同的素因子，根据引理 1.5，G 有一个可解正规子群，由 N 的唯一性可知 N 可解，结合 G/N 可解，得 G 可解，故极小阶反例不存在，从而命题得证.

以上定理是用子群簇 F^{ps} 中的所有极大子群的 CI- 截刻画可解群，然而下一个定理只要考虑一个极大子群就够了.

定理 2.2 群 G 可解的充分必要条件是 G 中存在可解极大子群 $M \in F^s(G)$，使 $Sec(M) = 1$.

证明 假设命题非真，并设 G 是极小阶反例.

根据性质 1.5，必要性是显然的，只需要证明充分性. 若 G 是非交换单群，令 M 是满足题设要求的极大子群，那么 $Sec(M) = M = 1$. 于是 G 是素数阶循环群，可解，矛盾. 故可设 G 不是单群. 同样设 M 是满足题设要求的极大子群，不妨设 $N_G(P) \leqslant M$，其中 $P \in Syl_p(G)$. 若 $M_G \neq 1$，则 M_G 中含有群 G 的极小正规子群 N，即 $N \leqslant M_G \leqslant M$，因为 M 可解，故 N 是初等交换群，并且可设 $|N| = r^n$，若 $(|N|, p) = 1$，由引理 1.1，$N_{G/N}(PN/N) = N_G(P)N/N \leqslant M/N$，故 $M/N \in F^s(G/N)$. 若 $(|N|, p) \neq 1$，于是 $r = p$，由 $N \trianglelefteq G$，得 $N \leqslant P$，若 $N = P$，则 $N_G(P) = G$ 与 $M \geqslant N_G(P)$ 矛盾，所以 $N < P$，又设 $xN \in N_{G/N}(P/N)$，由 $N \trianglelefteq G$ 得 $N = N^x \leqslant P^x$，故 $P/N = (P/N)^{xN} = P^xN/N = P^x/N$，故 $P^x = P$，即 $x \in N_G(P)$，所以 $N_{G/N}(PN/N) \leqslant N_G(P)/N \leqslant M/N$，故 $M/N \in F^s(G/N)$，因为 $Sec(M/N) \cong Sec(M) = 1$，由归纳，$G/N$ 可解. 又 N 可解，得 G 可解，矛盾. 若 $M_G = 1$，则 G 有唯一的极小正规子群 N，且 G/N 可解，$1 = Sec(M) = M \cap N$，$G = MN$，若 N 非可解，则由引理 1.6 可知 $M \cap N > 1$ 与 $M \cap N = 1$ 矛盾. 所以 N 可解，于是 G 可解，矛盾. 综上所述反例不存在. 到此命题证明完毕.

要求极大子群具有平凡的 CI- 截，是一个较强条件，下一定理试图用极大子群的 CI- 截满足更弱的条件来刻画可解群.

定理 2.3 群 G 可解的充分必要条件是 G 中指数既非素数也非素数平方的极大子群之 CI- 截为幂零群.

证明 必要性是显然的，只要证充分性. 假设命题非真，并设 G 是极小阶反例. 首先，如果 G 不是单群. 取 G 的一个极小正规子群 N，考虑 G/N. 显然定理条件对商群遗传，由归纳可知 G/N 可解. 进一步得，N 是 G 的唯一极小正规子群. 现在证明 N 可解. 假设 N 非可解，则 N 是非交换特征单群，令 q 是 $|N|$ 的最大素因子，则 $q > 2$，设 $Q \in Syl_q(N)$，应有 $Q \trianglelefteq N$，根据 Frattini 论断：$G = N_G(Q) \cdot N = N_G(Z(J(Q))) \cdot N$ 并且，$N_G(Z(J(Q))) < G$，故存在 G 的极大子群 M 满足 $N_G(Z(J(Q))) \leqslant M$，于是 $G = MN$. 现在证明 $|G:M|$ 是合数. 由于 $N_N(Q) \leqslant N_N(Z(J(Q))) = N_G(Z(J(Q))) \cap N \leqslant (M \cap N) < N$，从而存在 N 的极大子群 N_1 满足：$N_N(Q) \leqslant N_1 < N$，由引理 1.6 可知 $|N:N_1|$ 是合数，当然 $|G:M|$ 也是合数. 现在证明 $|G:M|$ 不等于素数的平方. 否则设 $|G:M| = r^2$，其中 r 是一个素数. 于是 $|G:M| = |MN:M| = |N:M \cap N| = |N:N_1| \cdot |N_1:M \cap N| = r^2$，由 $|N:N_1|$ 是合数，得 $|N:N_1| = r^2$，对 N 应用引理 1.6，可知 $|N:N_1|$ 不等于素数的平方，这是一个矛盾. 所以 $|G:M| = r^2$ 的假设不成立. 这样，根据定理假设，M 的 CI- 截幂零，而由 N 的唯一性得：$Sec(M) = N \cap M$ 幂零，所以 $N_N(Z(J(Q))$ 也幂零，更为 q- 幂零，注意到 $q > 2$，由文献[2]的定理 8.5.1 知 N 为 q- 幂零，所以 N 可解，于是 G 可解，与假设矛盾，故极小阶反例不存在. 从而当 G 不是单群时定理成立.

接下来证明 G 是单群的情况. 因为单群的极大子群的 CI- 截就是该极大子群本身，因此，如果能证明命题：若单群 G 的非幂零极大子群的指数为素数或为素数的平方，则群 G 可解，那么当 G 是单群时定理成立. 现在就来证明这一命题.

如果 G 中每个极大子群都非幂零，由定理假设，这些极大子群的指数或为素数或为素数的平方，由 (Huppert) 定理可知群 G 可解，故可以取 M 是 G 的幂零极大子群，根据引理 1.7，$M \in Syl_2(G)$. 以上说明，群 G 的每个幂零极大子群都是 G 的 Sylow2- 子群.

若 G 中所有极大子群都幂零，得 G 是内幂零群，从而可解，矛盾. 故可以取 D 是 G 的非幂零极大子群，由定理假设 $|G:D|$ 是素数或素数的平方，不妨设 $|G:D| = p$，那么 $p = 2$，否则，若 $p \neq 2$，那么 D 中含有 G 的 Sylow2- 子群，不防设为 P^*，即 $P^* \leqslant D$，如果 $P^* = D$，那么 $|G|$ 只有两个素因子，得 G 可解，矛盾. 所以 $P^* < D$. 但是前面说明了，G 的 Sylow2- 子群是 G 的极大子群，故 P^* 也是 G 的极大子群，与 $P^* < D$

矛盾. 所以 $|G:D|=2$,从而 $D \trianglelefteq G$,与 G 的单性矛盾. 如果 $|G:D|=p^2$,同理可以证明 $p=2$,即对群 G 的每个非幂零极大子群它在 G 中的指数为固定素数 $p=2$ 的方幂,由引理 1.2 得 G 可解,这是最后的矛盾. 所以反例不存在,到此命题获证.

注 在定理 2.3 中,不能把极大子群的 CI- 截为幂零群用极大子群的 CI- 截为 2- 闭代替. 否则,取 168 阶群 $G=PSL(2,7)$,它的极大子群的指数只能是 7 和 8,故 21 阶群是 G 中指数既非素数也非素数平方的极大子群,但是 21 阶群显然 2- 闭,说明群 G 满足定理的全部条件,但是 G 非可解,故为反例.

致谢:

本文的完成得到了李世荣教授的热心帮助,在此表示衷心的感谢!

参考文献:

[1] LI SHIRONG, WANG YANMING. On CI-section and CI-index of finite groups [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2000, 151: 309-319.

[2] WANG YANMING. c-Normal of groups and its properties[J]. Journal of Algebra, 1996, 180: 954-965.

[3] 魏先彪. 有限可解群的正规指数刻画[J]. 西安电子科技大学学报:自然科学版, 2004, 31(2): 301-303.

[4] 徐明曜, 李慧陵, 李世荣, 等. 有限群导引(上、下)[M]. 北京:科学出版社, 1999.

[5] 郭秀云. 非幂零极大子群指数为素数幂的有限群[J]. 数学年刊:A 辑, 1994, 1(6): 721-725.

[6] ZHAO YAOQING. On the deskins completions and theta completions for maximal subgroups [J]. Communication in Algebra, 2000, 28(1): 375-385.

[7] 王品超, 杨兆兴. 有限群极大子群的正规指数[J]. 工程数学学报, 1994, 11(1): 42-48.

[8] ROSE J S. On finite insoluble groups with nilponent maximal subgroups[J]. J Algebra, 1977, 48(1): 182-196.

(责任编辑:邓大玉)

喝咖啡可以预防眼皮不可控制地跳动

意大利巴里大学教授德法茨奥和同事的一项最新研究表明,喝咖啡能帮助预防眼皮不可控制地跳动。

迟发性眼睑痉挛症属于一种肌张力障碍疾病(指无意识的肌肉收缩),40 岁到 50 岁之间的人易患这种疾病。此前曾有研究表示,吸烟可能对迟发性眼睑痉挛症有预防作用,于是,德法茨奥教授和同事分析了 166 个迟发性眼睑痉挛症患者对香烟和咖啡的摄入情况,并和另外 228 名患有面部痉挛的病人作对比。结果显示,吸烟和患病概率几乎没有关系,但是喝咖啡的人患迟发性眼睑痉挛症几率较小,而且患病几率和咖啡摄入量成反比。

虽然研究人员目前还无法确定是咖啡里的哪种物质发挥作用,他们猜测极有可能是咖啡因。因为咖啡因能对大脑基底神经节里的接收器产生作用,而基底神经节在控制运动方面充当重要角色。他们计划进一步研究咖啡是否可以降低患其他肌张力障碍疾病的风险,以及能否预防肌张力障碍从身体的一部分转移到另一部分。

(据科学网)