广西科学 Guangxi Sciences 2007,14(3):200～203

π-余代数及 π-分次代数*

π-Coalgebra and π-grade Algebra

任北上,尹　闯,吴洁霞

REN Bei-shang,YIN Chuang,WU Jie-xia

(广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁　530001)

(Department of Mathematics and Computer Science,Guangxi Teachers Education University,Nanning,Guangxi,530001,China)

摘要:引进 π-子余代数及 π-子代数正交的概念,讨论 π-子余代数正交补与其对偶 π-代数的 π-理想的相互关系,将文献[2]中的一些性质在 Hopf-π-余代数上进行推广.

关键词:π-余代数　π-子余代数　Hopf-π-余代数　π-分次代数　π-子代数

中图法分类号:O153　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2007)03-0200-04

Abstract: The orthogonal concept of the π-subcoalgebras and π-subalgebras is introduced. The relationship between the orthogonal complement and the π-ideal of it's dual π-algebra is discussed. Some properties of Hopf algebras to Hopf-π-coalgebras are generalized.

Key words: π-coalgebra, π-subcoalgebra, Hopf-π-coalgebra, π-grade algebra, π-subalgebra

Virelizier 在文献[1]中研究 Hopf-π-余代数的一些性质.本文引进 π-子余代数及 π-子代数正交的概念,讨论 π-子余代数正交补与其对偶 π-代数的 π-理想的相互关系,将文献[2]中的一些性质在 Hopf-π-余代数上进行推广.文中 π 是一个乘法群,K 是一个固定的基域,$A\otimes_K B$、$Hom_K(A,B)$ 分别写成 $A\otimes B$、$Hom(A,B)$,且定义 $\tau:W\otimes V\rightarrow V\otimes W$ 为扭转映射,即 $\tau(w\otimes v)=v\otimes w$,其它的一些记号参考文献[1,2].

$C=(\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 称为 π-余代数,意思是 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为一簇 K-空间,并赋予一簇 K-线性映射 $\Delta=\{\Delta_{\alpha,\beta}:C_{\alpha\beta}\rightarrow C_\alpha\otimes C_\beta\}_{\alpha,\beta\in\pi}$(余乘),及 K-线性映射 $\varepsilon:C_1\rightarrow K$(余单位),分别满足:对任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in\pi$,$(\Delta_{\alpha,\beta}\otimes id_{C_\gamma})\Delta_{\alpha\beta,\gamma}=(id_{C_\alpha}\otimes\Delta_{\beta,\gamma})\Delta_{\alpha,\beta\gamma}$;$(id_{C_\alpha}\otimes\varepsilon)\Delta_{\alpha,1}=id_{C_\alpha}=(\varepsilon\otimes id_{C_\alpha})\Delta_{1,\alpha}$.其中记 $\Delta_{\alpha,\beta}(c)=\sum c_{(1,\alpha)}\otimes c_{(2,\beta)}$.

定义 1　设 $C=(\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为 π-余代数,$V=\{V_\alpha|V_\alpha\subseteq C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C 的一簇子空间,如果对任意的 $\alpha,\beta\in\pi$ 都满足 $\Delta_{\alpha,\beta}(V_{\alpha\beta})\subseteq V_\alpha\otimes V_\beta$,则称 V 为 C 的一个 π-子余代数.

定义 2　设 $C=(\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为 π-余代数,$W=\{W_\alpha|W_\alpha\subseteq C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C 的一簇子空间,如果对任意的 $\alpha,\beta\in\pi$ 都满足:

(1)$\Delta_{\alpha,\beta}(W_{\alpha\beta})\subseteq W_\alpha\otimes C_\beta$,称 W 为 C 的一个左 π-余理想;

(2)$\Delta_{\alpha,\beta}(W_{\alpha\beta})\subseteq C_\alpha\otimes W_\beta$,称 W 为 C 的一个右 π-余理想;

(3)$\Delta_{\alpha,\beta}(W_{\alpha\beta})\subseteq W_\alpha\otimes C_\beta+C_\alpha\otimes W_\beta$,且 $\varepsilon(V_1)=0$,称 W 为 C 的一个 π-余理想.

$A=(\{A_\alpha\}_{\alpha\in\pi},m,u)$ 称为 π-代数,意思是 $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为一簇向量空间,并赋予一簇 K-线性映射 $m=\{m_{\alpha,\beta}:A_\alpha\otimes A_\beta\rightarrow A_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta\in\pi}$(乘积),及 K-线性映射 $u:K\rightarrow A_1$(单位).且令 $u(1_K)=1_{H_1}$,对任意的 $\alpha,\beta,\gamma\in\pi,a\in A_\alpha$,分别满足:

$m_{\alpha\beta,\gamma}(m_{\alpha,\beta}\otimes id_{A_\gamma})=m_{\alpha,\beta\gamma}(id_{A_\alpha}\otimes m_{\beta,\gamma})$;

$m_{\alpha,1}(id_{A_\alpha}\otimes u)(a\otimes 1_K)=a=m_{1,\alpha}(u\otimes id_{A_\alpha})(1_K\otimes a)$.

定义 3　若 $A=(\{A_\alpha\}_{\alpha\in\pi},m,u)$ 为 π-代数,$I=\{I_\alpha|I_\alpha\subseteq A_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 是 A 的一簇子空间,如果对任意的 $\alpha,\beta\in\pi$ 都满足:

(1)$m_{\alpha,\beta}(I_\alpha\otimes A_\beta)\subseteq I_{\alpha\beta}$,则称 I 为 A 的一个左 π-理想;

(2)$m_{\alpha,\beta}(A_\alpha\otimes I_\beta)\subseteq I_{\alpha\beta}$,则称 I 为 A 的一个右 π-理想;

(3)$m_{\alpha,\beta}(I_\alpha\otimes A_\beta)\subseteq I_{\alpha\beta}$,且 $m_{\alpha,\beta}(A_\alpha\otimes I_\beta)\subseteq I_{\alpha\beta}$,

收稿日期:2006-12-25
修回日期:2007-04-16
作者简介:任北上(1956-),男,副教授,主要从事环、模、Hopf 代数研究工作。
*广西自然科学基金项目(0640070),(0447038)及广西教育厅科研项目资助。

则称 I 为 A 的一个 π- 理想.

定义 4 设 $A=(\{A_\alpha\}_{\alpha\in\pi},m,u)$ 为 π- 代数，$D=\{D_\alpha|D_\alpha\subseteq A_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为 A 的一簇子空间，若对任意的 $\alpha,\beta\in\pi$ 都满足 $m_{\alpha,\beta}(D_\alpha\otimes D_\beta)\subseteq D_{\alpha\beta}$，且 $u(1_K)\in D_1$，则称 D 是 A 的一个 π- 子代数.

设 $V=\{V_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为一簇向量空间，$S=\{S_\alpha|S_\alpha\subseteq V_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为 V 的一个子集簇，那么按照文献[2]的记法，我们有如下一簇空间：

$S^\perp=\{S_\alpha^\perp\}_{\alpha\in\pi}$，其中 $S_\alpha^\perp=\{v_\alpha^*\in V_\alpha^*\mid<v_\alpha^*,s_\alpha>=0,\forall\ s_\alpha\in V_\alpha\}$.

同理，若 $T=\{T_\alpha|T_\alpha\subseteq V_\alpha^*\}_{\alpha\in\pi}$，那么又有

$T^\perp=\{T_\alpha^\perp\}_{\alpha\in\pi}$，其中 $T_\alpha^\perp=\{v_\alpha\in V_\alpha\mid<t_\alpha,v_\alpha>=0,\forall\ t_\alpha\in V_\alpha^*\}$.

设 $C=(\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为 π- 余代数，由 $\Delta=\{\Delta_{\alpha,\beta}:C_{\alpha\beta}\to C_\alpha\otimes C_\beta\}_{\alpha,\beta\in\pi}$，$\varepsilon:C_1\to K$，可以导出 $\Delta_{\alpha,\beta}^*:(C_\alpha\otimes C_\beta)^*\to C_{\alpha\beta}^*$ 和 $\varepsilon^*:K^*\to C_1^*$.

记 $m=\{m_{\alpha,\beta}:C_\alpha^*\otimes C_\beta^*\to C_{\alpha\beta}^*\}_{\alpha,\beta\in\pi}$ 是 $C_\alpha^*\otimes C_\beta^*\to(C_\alpha\otimes C_\beta)^*\to C_{\alpha\beta}^*$ 的合成.

记 $u:K\to C_1^*$ 是 $K\to K^*\to C_1^*$ 的合成.

引理 1 $C^*=(\{C_\alpha^*\}_{\alpha\in\pi},m,u)$ 是一个 π- 代数.

证明 任取 $a\in C_\alpha^*,b\in C_\beta^*,c\in C_\gamma^*,x\in C_{\alpha\beta\gamma}$，$y\in C_\alpha$，

$$<m_{\alpha,\beta\gamma}(id_{C_\alpha^*}\otimes m_{\beta,\gamma})(a\otimes b\otimes c),x>=$$
$$\sum<(id_{C_\alpha^*}\otimes m_{\beta,\gamma})(a\otimes b\otimes c),x_{(1,\alpha)}\otimes x_{(2,\beta\gamma)}>=$$
$$\sum<a\otimes m_{\beta,\gamma}(b\otimes c),x_{(1,\alpha)}\otimes x_{(2,\beta\gamma)}>=$$
$$\sum<a,x_{(1,\alpha)}><m_{\beta,\gamma}(b\otimes c),x_{(2,\beta\gamma)}>=$$
$$\sum<a,x_{(1,\alpha)}><b,x_{(2,\beta)}><c,x_{(3,\gamma)}>=$$
$$\sum<a\otimes b,x_{(1,\alpha)}\otimes x_{(2,\beta)}><c,x_{(3,\gamma)}>=$$
$$\sum<m_{\alpha,\beta}(a\otimes b),x_{(1,\alpha\beta)}><c,x_{(2,\gamma)}>=$$
$$\sum<m_{\alpha,\beta}(a\otimes b)\otimes c,x_{(1,\alpha\beta)}\otimes x_{(2,\gamma)}>=$$
$$<(m_{\alpha,\beta}\otimes id_{C_\gamma^*})(a\otimes b\otimes c),\Delta_{\alpha\beta,\gamma}(x)>=$$
$$<m_{\alpha\beta,\gamma}(m_{\alpha,\beta}\otimes id_{C_\gamma^*})(a\otimes b\otimes c),x>,$$

所以 $m_{\alpha,\beta\gamma}(id_{C_\alpha^*}\otimes m_{\beta,\gamma})=m_{\alpha\beta,\gamma}(m_{\alpha,\beta}\otimes id_{C_\gamma^*})$.

另外 $<m_{1,\alpha}(u\otimes id_{C_\alpha^*})(1_K\otimes a),y>=$

$$\sum<(u\otimes id_{C_\alpha^*})(1_K\otimes a),y_{(1,1)}\otimes y_{(2,\alpha)}>=$$
$$\sum<u(1_K)\otimes a,y_{(1,1)}\otimes y_{(2,\alpha)}>=$$
$$\sum<\varepsilon^*(1_K),y_{(1,1)}><a,y_{(2,\alpha)}>=$$
$$\sum<a,\varepsilon(y_{(1,1)})y_{(2,\alpha)}>=<a,y>,$$

因此 $m_{1,\alpha}(u\otimes id_{C_\alpha^*})(1_K\otimes a)=a$. 同理，$m_{\alpha,1}(id_{C_\alpha^*}\otimes u)(a\otimes 1_K)=a$.

设 $C=(\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$，$D=(\{D_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为两个 π- 余代数，$f=\{f_\alpha|f_\alpha:C_\alpha\to D_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为一簇 K- 线性映射，若对任意的 $\alpha,\beta\in\pi$ 都满足：$\Delta_{\alpha,\beta}^Df_{\alpha\beta}=(f_\alpha\otimes f_\beta)\Delta_{\alpha,\beta}^C$，$\varepsilon^Df_1=\varepsilon^C$，则称 $f=\{f_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为 π- 余代数同态. 设 $A=(\{A_\alpha\}_{\alpha\in\pi},m,u)$，$B=(\{B_\alpha\}_{\alpha\in\pi},m,u)$ 为两个 π- 代数，$g=\{g_\alpha|g_\alpha:A_\alpha\to B_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$，为一簇线 K- 性映射，若对任意的 $\alpha,\beta\in\pi$ 都满足：$m_{\alpha,\beta}^B(g_\alpha\otimes g_\beta)=g_{\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}^A$，$g_1u^A=u^B$，则称 $g=\{g_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为 π- 代数同态.

定理 1 设 $C=(\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为 π- 余代数，若 $D=\{D_\alpha|D_\alpha\subseteq C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C 的一个 π- 子余代数，那么 $D^\perp=\{D_\alpha^\perp\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C^* 的一个 π- 理想.

证明 对任意的 $\alpha,\beta\in\pi,a\in C_\alpha^*,b\in C_\beta^*,c\in D_{\alpha\beta},d\in D_1,k\in K$，若设 $I=\{i_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$，定义 $i_\alpha:D_\alpha\to C_\alpha$ 为标准的嵌入映射，显然可得 $\Delta_{\alpha,\beta}^Ci_{\alpha\beta}=(i_\alpha\otimes i_\beta)\Delta_{\alpha,\beta}^D$，$\varepsilon^Ci_1=\varepsilon^D$，即 $I=\{i_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为 π- 余代数同态；而 $<m_{\alpha,\beta}^{D^*}(i_\alpha^*\otimes i_\beta^*)(a\otimes b),c>=<(i_\alpha^*\otimes i_\beta^*)(a\otimes b),\Delta_{\alpha,\beta}^D(c)>=<a\otimes b,(i_\alpha\otimes i_\beta)\Delta_{\alpha,\beta}^D(c)>=<a\otimes b,\Delta_{\alpha,\beta}^Ci_{\alpha\beta}(c)>=<i_{\alpha\beta}^*m_{\alpha,\beta}^{C^*}(a\otimes b),c>$ 且 $<i_1^*u^{C^*}(k),d>=<k,\varepsilon^Ci_1(d)>=<k,\varepsilon^D(d)>=<u^{D^*}(k),d>$ 即 $I^*=\{i_\alpha^*\}_{\alpha\in\pi}$ 为 π- 代数同态. 又由于 $D_\alpha^\perp=\{c_\alpha^*\subseteq C_\alpha^*\mid<c_\alpha^*,d_\alpha>=0,\forall\ d_\alpha\in D_\alpha\}$，且 $\ker i_\alpha^*=\{c_\alpha^*\subseteq C_\alpha^*\mid<c_\alpha^*,d_\alpha>=0,\forall\ d_\alpha\in D_\alpha\}$，即 $D_\alpha^\perp=\ker i_\alpha^*$. 再由于 $i_{\alpha\beta}^*m_{\alpha,\beta}^{C^*}(\ker i_\alpha^*\otimes C_\beta^*)=m_{\alpha,\beta}^{D^*}(i_\alpha^*\otimes i_\beta^*)(\ker i_\alpha^*\otimes C_\beta^*)=0$，从而 $m_{\alpha,\beta}^{C^*}(\ker i_\alpha^*\otimes C_\beta^*)\subseteq\ker i_{\alpha\beta}^*$. 同理，可得 $m_{\alpha,\beta}^{C^*}(C_\alpha^*\otimes\ker i_\beta^*)\subseteq\ker i_{\alpha\beta}^*$，那么 $\ker I^*=\{\ker i_\alpha^*\}_{\alpha\in\pi}$ 为 C^* 的一个 π- 理想，所以 $D^\perp$ 为 C^* 的一个 π- 理想.

定理 2 设 $C=(\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为 π- 余代数，若 $I=\{I_\alpha|I_\alpha\subseteq C_\alpha^*\}_{\alpha\in\pi}$ 为 $C^*=(\{C_\alpha^*\}_{\alpha\in\pi},m,u)$ 的一个 π- 理想，那么 $I^\perp=\{I_\alpha^\perp\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C 的一个 π- 子余代数.

证明 往证 $I^\perp$ 为 C 的一个 π- 子余代数，即要对任意的 $\alpha,\beta\in\pi$，$\Delta_{\alpha,\beta}(I_{\alpha\beta}^\perp)\subseteq I_\alpha^\perp\otimes I_\beta^\perp$. 任取 $x\in I_{\alpha\beta}^\perp$，令 $\Delta_{\alpha,\beta}(x)=\sum y_{(i,\alpha)}\otimes z_{(i,\beta)}$. 不失一般性，可以设 $\{z_{(i,\beta)}\}$ 线性无关. 现假设 $\Delta_{\alpha,\beta}(x)\notin I_\alpha^\perp\otimes C_\beta$，不妨令 $y_{(1,\alpha)}\notin I_\alpha^\perp$，那么就存在 $a\in I_\alpha\subseteq C_\alpha^*$，使得 $<a,y_{(1,\alpha)}>\neq 0$. 再选取 $r\in C_\beta^*$ 使得 $<r,z_{(j,\beta)}>=\delta_{1j}$. 又因为 I 为 C^* 的 π- 理想，则对任意的 $\alpha,\beta\in\pi$ 有 $m_{\alpha,\beta}(a\otimes r)\in I_{\alpha\beta}$，即 $<m_{\alpha,\beta}(a\otimes r),x>=0$. 而我们知道 $<m_{\alpha,\beta}(a\otimes r),x>=<a\otimes r,\sum y_{(i,\alpha)}\otimes z_{(i,\beta)}>=\sum<a,y_{(i,\alpha)}><r,z_{(i,\beta)}>=<a,y_{(1,\alpha)}>\neq 0$，得出矛盾，所以假设不成立，即 $\Delta_{\alpha,\beta}(x)\in I_\alpha^\perp\otimes C_\beta$. 同理可证 $\Delta_{\alpha,\beta}(x)\in C_\alpha\otimes I_\beta^\perp$ 那么 $\Delta_{\alpha,\beta}(x)\in(I_\alpha^\perp\otimes C_\beta)\cap(C_\alpha\otimes I_\beta^\perp)=I_\alpha^\perp\otimes I_\beta^\perp$，所以 $I^\perp$ 是 C 的一个 π- 子余代数.

定理 3 设 $C=(\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为 π- 余代数，$W=\{W_\alpha|W_\alpha\subseteq C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C 的一个 π- 子余代数，当且仅当 $W^\perp=\{W_\alpha^\perp\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C^* 的一个 π- 理想.

定理 3 的证明方法同定理 1 和定理 2.

定理 4 设 $C=(\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为 π- 余代数.

(1) 若 $J=\{J_\alpha|J_\alpha\subseteq C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为 C 的一个左(右)π-余理想,那么 $J^\perp=\{J_\alpha^\perp\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C^* 的一个左(右)π- 理想.

(2) 若 $I=\{I_\alpha\subseteq C_\alpha^*\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C^* 的一个左(右)π-理想,那么 $I^\perp=\{I_\alpha^\perp\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C 的一个左(右)π- 余理想.

(3) $V=\{V_\alpha|V_\alpha\subseteq C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C 的一个左(右)π- 余理想,当且仅当 $V^\perp=\{V_\alpha^\perp\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C^* 的一个左(右)π-理想.

证明 这里只对(1) 进行证明,其它的结论同理可证. 假设 $J=\{J_\alpha|J_\alpha\subseteq C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为 C 的一个左(右)π- 余理想,由 C^* 的结构映射,有 $<m_{\alpha,\beta}(J_\alpha^\perp\otimes C_\beta^*),J_{\alpha\beta}>$
$=<\Delta_{\alpha,\beta}^*(J_\alpha^\perp\otimes C_\beta^*),J_{\alpha\beta}>$
$=<J_\alpha^\perp\otimes C_\beta^*,\Delta_{\alpha,\beta}J_{\alpha\beta}>\subseteq<J_\alpha^\perp\otimes C_\beta^*,J_\alpha\otimes C_\beta>=0$
所以 $m_{\alpha,\beta}(J_\alpha^\perp\otimes C_\beta^*)\subseteq J_{\alpha\beta}^\perp$,即 $J^\perp=\{J_\alpha^\perp\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C^* 的一个左(右)π- 理想.

定理 5 设 $C=(\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为 π- 余代数,若 $J=\{J_\alpha|J_\alpha\subseteq C_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为 C 的一个 π- 余理想,那么 $J^\perp=\{J_\alpha^\perp\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C^* 的一个 π- 子代数.

证明 因为 $<m_{\alpha,\beta}(J_\alpha^\perp\otimes J_\beta^\perp),J_{\alpha\beta}>\subseteq<(J_\alpha^\perp\otimes J_\beta^\perp),(J_\alpha\otimes C_\beta+C_\alpha\otimes J_\beta)>=<J_\alpha^\perp\otimes J_\beta^\perp,J_\alpha\otimes C_\beta>+<J_\alpha^\perp\otimes J_\beta^\perp,C_\alpha\otimes J_\beta>=0$,所以 $m_{\alpha,\beta}(J_\alpha^\perp\otimes J_\beta^\perp)\subseteq J_{\alpha\beta}^\perp$;另外,$J$ 为 C 的一个 π- 余理想即 $\varepsilon(J_1)=0$. 而又由于 $<u(1_K),J_1>=<\varepsilon^*(1_K),J_1>=<1_K,\varepsilon(J_1)>=0$,所以 $u(1_K)\in J_1^\perp$.

定理 6 设 $C=(\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为 π- 余代数,若 $I=\{I_\alpha\subseteq C_\alpha^*\}_{\alpha\in\pi}$ 是 C^* 的一个 π- 子代数,那么 $I^\perp=\{I_\alpha^\perp\}_{\alpha\in\pi}$ 就是 C 的一个 π- 余理想.

证明 因为 I 是 C^* 的一个 π- 子代数则有 $u(1_K)\in I_1$,那么 $<u(1_K),I_1^\perp>=0$,即 $<1_K,\varepsilon(I_1^\perp)>=0$,可得 $\varepsilon(I_1^\perp)=0$;又因为 $<I_\alpha\otimes I_\beta,\Delta_{\alpha,\beta}(I_{\alpha\beta}^\perp)>=<m_{\alpha,\beta}(I_\alpha\otimes I_\beta),I_{\alpha\beta}^\perp>$,且 $m_{\alpha,\beta}(I_\alpha\otimes I_\beta)\subseteq I_{\alpha\beta}$,那么得 $<I_\alpha\otimes I_\beta,\Delta_{\alpha,\beta}(I_{\alpha\beta}^\perp)>\subseteq<I_{\alpha\beta},I_{\alpha\beta}^\perp>=0$,所以 $\Delta_{\alpha,\beta}(I_{\alpha\beta}^\perp)\subseteq(I_\alpha\otimes I_\beta)^\perp=I_\alpha^\perp\otimes C_\beta+C_\alpha\otimes I_\beta^\perp$,即 $I^\perp$ 为 C 的一个 π- 余理想.

设 $A=(\{A_\alpha\}_{\alpha\in\pi},m,u)$ 及 $B=(\{B_\alpha\}_{\alpha\in\pi},m,u)$ 为两个 π- 代数,$f=\{f_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$,$g=\{g_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$,分别为 A 到 B 的两簇 π- 代数同态. 如果我们定义 $f-g=(f_\alpha-g_\alpha,f_\beta-g_\beta,\cdots\cdots)$,显然 $f-g$ 是一簇 A 到 B 的 K- 线性映射,但未必是 π- 代数同态,由此可以得出如下性质.

命题 1 若令 $Z=\{Z_\alpha|Z_\alpha=\mathrm{Ker}(f_\alpha-g_\alpha)\}_{\alpha\in\pi}$,则 Z 为 A 的一个 π- 子代数.

证明 任取 $x\in Z_\alpha,y\in Z_\beta$,因为 $(f_{\alpha\beta}-g_{\alpha\beta})(m_{\alpha,\beta}^A(x\otimes y))=f_{\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}^A(x\otimes y)-g_{\alpha\beta}m_{\alpha,\beta}^A(x\otimes y)=m_{\alpha,\beta}^B(f_\alpha\otimes f_\beta)(x\otimes y)-m_{\alpha,\beta}^B(g_\alpha\otimes g_\beta)(x\otimes y)=m_{\alpha,\beta}^B(f_\alpha(x)\otimes f_\beta(y))-m_{\alpha,\beta}^B(g_\alpha(x)\otimes g_\beta(y))+m_{\alpha,\beta}^B(f_\alpha(x)\otimes g_\beta(y))-m_{\alpha,\beta}^B(f_\alpha(x)\otimes g_\beta(y))=m_{\alpha,\beta}^B[f_\alpha(x)\otimes(f_\beta(y)-g_\beta(y))]+m_{\alpha,\beta}^B[(f_\alpha(x)-g_\alpha(x))\otimes g_\beta(y)]=0$

所以 $m_{\alpha,\beta}^A(x\otimes y)\in Z_{\alpha\beta}$,即 $m_{\alpha,\beta}^A(Z_\alpha\otimes Z_\beta)\subseteq Z_{\alpha\beta}$. 另外 $(f_1-g_1)u^A(1_K)=f_1u^A(1_K)-g_1u^A(1_K)=u^B(1_K)-u^B(1_K)=0$,所以 $u^A(1_K)\in\mathrm{Ker}(f_1-g_1)=Z_1$,即 Z 是 A 的一个 π- 子代数.

对偶地我们也可以得出:若 $C=(\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$,$D=(\{D_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为两个 π- 余代数,$f=\{f_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$,$g=\{g_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 分别为 C 到 D 的两簇 π- 余代数同态,若令 $E=\{E_\alpha|E_\alpha=\mathrm{Im}(f_\alpha-g_\alpha)\}_{\alpha\in\pi}$,则有以下命题.

命题 2 E 为 D 的一个 π- 余理想.

证明 因为 $\varepsilon^D(f_1-g_1)=\varepsilon^Df_1-\varepsilon^Dg_1=\varepsilon^C-\varepsilon^C=0$,所以 $\varepsilon^D\mathrm{Im}(f_1-g_1)=0$,即 $\varepsilon^D(E_1)=0$.
其次 $\Delta_{\alpha,\beta}^D(f_{\alpha\beta}-g_{\alpha\beta})=\Delta_{\alpha,\beta}^Df_{\alpha\beta}-\Delta_{\alpha,\beta}^Dg_{\alpha\beta}=$
$(f_\alpha\otimes f_\beta)\Delta_{\alpha,\beta}^C-(g_\alpha\otimes g_\beta)\Delta_{\alpha,\beta}^C+(f_\alpha\otimes g_\beta)\Delta_{\alpha,\beta}^C-(f_\alpha\otimes g_\beta)\Delta_{\alpha,\beta}^C=[f_\alpha\otimes(f_\beta-g_\beta)]\Delta_{\alpha,\beta}^C+[(f_\alpha-g_\alpha)\otimes g_\beta]\Delta_{\alpha,\beta}^C\subseteq D_\alpha\otimes\mathrm{Im}(f_\beta-g_\beta)+\mathrm{Im}(f_\alpha-g_\alpha)\otimes D_\beta=D_\alpha\otimes E_\beta+E_\alpha\otimes D_\beta$,

故 E 为 D 的一个 π- 余理想.

定义 5[1] $H=(\{H_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为 π- 余代数.给定一簇 K- 线性映射:$S=\{S_\alpha:H_\alpha\to H_{\alpha^{-1}}\}_{\alpha\in\pi}$,称 H 为 Hopf-π- 余代数,若 H 满足以下 3 个条件:

(1) 任意的 $\alpha\in\pi$,$(H_\alpha,m_\alpha,u_\alpha)$ 是代数;

(2) $\varepsilon:H_1\to K$ 和 $\Delta_{\alpha,\beta}:H_{\alpha\beta}\to H_\alpha\otimes H_\beta$,都为代数同态;

(3) 对任意的 $\alpha\in\pi$,$m_\alpha(S_{\alpha^{-1}}\otimes id_{H_\alpha})\Delta_{\alpha^{-1},\alpha}=u_\alpha\varepsilon=m_\alpha(id_{H_\alpha}\otimes S_{\alpha^{-1}})\Delta_{\alpha,\alpha^{-1}}$.

引理 2[1] 若 $H=(\{H_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为 Hopf-π- 余代数,那么以下条件成立.

(a) 对任意的 $\alpha\in\pi$,$a,b\in H_\alpha$,$S_\alpha(ab)=S_\alpha(b)S_\alpha(a)$;

(b) 对任意的 $\alpha\in\pi$,$S_\alpha(1_\alpha)=1_{\alpha^{-1}}$;

(c) 对任意的 $\alpha,\beta\in\pi$,$\Delta_{\beta^{-1},\alpha^{-1}}S_{\alpha\beta}=\tau_{H_{\alpha^{-1}},H_{\beta^{-1}}}(S_\alpha\otimes S_\beta)\Delta_{\alpha,\beta}$;

(d) $\varepsilon S_1=\varepsilon$.

定理 7 若 $H=(\{H_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta,\varepsilon)$ 为 Hopf-π- 余代

数，那么以下条件等价.

(1) $\sum h_{(2,\alpha^{-1})}S_\alpha(h_{(1,\alpha)}) = \varepsilon(h)1_{H_{\alpha^{-1}}}$；

(2) $\sum S_{\alpha^{-1}}(h_{(2,\alpha^{-1})})h_{(1,\alpha)} = \varepsilon(h)1_{H_\alpha}$；

(3) $S_{\alpha^{-1}}S_\alpha = 1_{H_\alpha}, S_\alpha S_{\alpha^{-1}} = 1_{H_{\alpha^{-1}}}$ 即 S_α 为双射.

证明 (1)⇒(3) 对任意的 $h \in H_1$，有 $(S_{\alpha^{-1}}S_\alpha * S_{\alpha^{-1}})(h) =$
$\sum S_{\alpha^{-1}}S_\alpha(h_{(1,\alpha)})S_{\alpha^{-1}}(h_{(2,\alpha^{-1})}) =$
$S_{\alpha^{-1}}\sum h_{(2,\alpha^{-1})}S_\alpha(h_{(1,\alpha)}) =$
$S_{\alpha^{-1}}(\varepsilon(h)1_{H_{\alpha^{-1}}}) = \varepsilon(h)\, S_{\alpha^{-1}}(1_{H_{\alpha^{-1}}}) = \varepsilon(h)1_{H_\alpha}$，所以 $S_{\alpha^{-1}}S_\alpha = 1_{H_\alpha}$.
同理可证 $S_\alpha S_{\alpha^{-1}} = 1_{H_{\alpha^{-1}}}$.

(3)⇒(2) 由定义 5 的(3) 可知
$\sum S_\alpha(h_{(1,\alpha)})h_{(2,\alpha^{-1})} = \varepsilon(h)1_{H_{\alpha^{-1}}}$.
等式两边分别用 $S_{\alpha^{-1}}$ 作用得
$\sum S_{\alpha^{-1}}(h_{(2,\alpha^{-1})})S_{\alpha^{-1}}S_\alpha(h_{(1,\alpha)}) = S_{\alpha^{-1}}(\varepsilon(h)1_{H_{\alpha^{-1}}})$，进而 $\sum S_{\alpha^{-1}}(h_{(2,\alpha^{-1})})1_{H_\alpha}(h_{(1,\alpha)}) = \varepsilon(h)1_{H_\alpha}$ 所以(2) 成立.
(2)⇒(1) 由定义 5 的(3) 知 $\sum h_{(1,\alpha)}S_{\alpha^{-1}}(h_{(2,\alpha^{-1})}) = \varepsilon(h)1_{H_\alpha}$，等式两边分别用 S_α 作用，得
$\sum S_\alpha S_{\alpha^{-1}}(h_{(2,\alpha^{-1})})S_\alpha(h_{(1,\alpha)}) = S_\alpha(1_{H_\alpha})\varepsilon(h)$，进而得 $\sum h_{(2,\alpha^{-1})}S_\alpha(h_{(1,\alpha)}) = \varepsilon(h)1_{H_{\alpha^{-1}}}$.

推论 若 H 为交换 Hopf-π- 余代数(即任意的 $\alpha \in \pi$，H_α 作为代数是交换的)，当且仅当 S 为双射(即任意的 $\alpha \in \pi$，S_α 为双射).

定义 6[3] 若 (A,m,u) 为代数，$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\pi}$ 为一簇 K- 线性空间，对任意的 $\alpha,\beta \in \pi$ 都满足：

(1) 作为 K- 模 $A = \oplus_{\alpha\in\pi} A_\alpha$；

(2) $A_\alpha \cdot A_\beta \subseteq A_{\alpha\beta}$.

则称 A 为 π- 分次代数.

值得注意的是，此定义与 π- 代数的定义有本质的区别，在 π- 分次代数中的代数乘法只有一个就是 m，而 π- 代数的乘法是针对一簇 K- 映射.

设 A,B 为两个 π- 分次代数，且 $f:A \to B$ 为代数同态，若对任意的 $\alpha \in \pi$，$f(A_\alpha) \subseteq B_\alpha$，则称 f 为 π- 分次代数同态. 设 (A,m^A,u^A)，(B,m^B,u^B) 为任意的两个代数. $C = (\{C_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta^C,\varepsilon^C)$，$D = (\{D_\alpha\}_{\alpha\in\pi},\Delta^D,\varepsilon^D)$ 为任意的两个 π- 余代数，那么我们可以得到两个 π- 分次代数：

$\oplus_{\alpha\in\pi}Hom(C_\alpha,B)$ 和 $\oplus_{\alpha\in\pi}Hom(D_\alpha,A)$.

用 ★ 表示 π- 分次代数乘法，即任意的 f，$f' \in \oplus_{\alpha\in\pi}Hom(D_\alpha,A)$，若令 $f = (h_\alpha,h_\beta,h_\gamma,\cdots\cdots)$，$f' = (l_\alpha,l_\beta,l_\gamma,\cdots\cdots)$，则 $f★f' = J = (J_\alpha,J_\beta,J_\gamma,\cdots\cdots)$，
其中 $J_\alpha = \sum_{xy=\alpha}m_A(h_x \otimes l_y)\Delta^D_{x,y}$.

在此乘法作用下，$\oplus_{\alpha\in\pi}Hom(D_\alpha,A)$ 的单位元为 $(0,0,\cdots,u_A\varepsilon^D,0,0,\cdots)$.

说明 因为 $f★(0,0,\cdots,u_A\varepsilon^D,0,0,\cdots) = (h_\alpha,h_\beta,h_\gamma,\cdots\cdots)★(0,0,\cdots,u_A\varepsilon^D,0,0,\cdots) = (m_A(h_\alpha\otimes u_A\varepsilon^D)\Delta^D_{\alpha,1}, m_A(h_\beta\otimes u_A\varepsilon^D)\Delta^D_{\beta,1},\cdots\cdots)$.
考查上式的每一个分量，例如 $m_A(h_\alpha\otimes u_A\varepsilon^D)\Delta^D_{\alpha,1}$，如果取任意的 $d_\alpha \in D_\alpha$，有
$m_A(h_\alpha\otimes u_A\varepsilon^D)\Delta^D_{\alpha,1}(d_\alpha) = \sum h_\alpha(d_{(1,\alpha)}).\, u_A\varepsilon^D(d_{(2,1)}) =$
$\sum h_\alpha(d_{(1,\alpha)}).\, u_A(1_K.\, \varepsilon^D(d_{(2,1)})) =$
$\sum h_\alpha(d_{(1,\alpha)}.\, \varepsilon^D(d_{(2,1)})).\, 1_A =$
$h_\alpha(d_\alpha)$，所以 $f★(0,0,\cdots,u_A\varepsilon^D,0,0,\cdots) = f$.

又由于 u_A,ε^D 都是固定的 K- 映射，且 $u_A\varepsilon^D \in Hom(D_1,A)$，所以单位元是唯一的.

现对任意的 $f = (f_\alpha,f_\beta,f_\gamma,\cdots\cdots) \in \oplus_{\alpha\in\pi}Hom(D_\alpha,A)$，$g = (g_\alpha,g_\beta,g_\gamma,\cdots\cdots)$ 为 C 到 D 的任意一簇 π- 余代数同态，R 为 A 到 B 的一个代数同态，可以定义一个 K- 线性映射

$\varphi: \oplus_{\alpha\in\pi}Hom(D_\alpha,A) \to \oplus_{\alpha\in\pi}Hom(C_\alpha,B)$，其中

$\varphi(f) = \varphi(f_\alpha,f_\beta,f_\gamma,\cdots\cdots) = (Rf_\alpha g_\alpha, Rf_\beta g_\beta, Rf_\gamma g_\gamma,\cdots\cdots)$，那么有如下定理.

定理 8 上述定义的 φ 是 π- 分次代数同态.

证明 任取 $f,f' \in \oplus_{\alpha\in\pi}Hom(D_\alpha,A)$，令 $f = (h_\alpha,h_\beta,h_\gamma,\cdots\cdots)$，$f' = (l_\alpha,l_\beta,l_\gamma,\cdots\cdots)$. 先假设 $f★f' = J = (J_\alpha,J_\beta,J_\gamma,\cdots\cdots)$，其中 $J_\alpha = \sum_{xy=\alpha}m_A(h_x\otimes l_y)\Delta^D_{x,y}$. 因为 $\varphi(f★f') = \varphi(J) = \varphi(J_\alpha,J_\beta,J_\gamma,\cdots\cdots) = (RJ_\alpha g_\alpha, RJ_\beta g_\beta, RJ_\gamma g_\gamma,\cdots\cdots) = (R(\sum_{xy=\alpha}m_A(h_x\otimes l_y)\Delta^D_{x,y})g_\alpha,\cdots\cdots) = (\sum_{xy=\alpha}Rm_A(h_x\otimes l_y)\Delta^D_{x,y}g_{xy},\cdots\cdots) = (\sum_{xy=\alpha}m_B(R\otimes R)(h_x\otimes l_y)(g_x\otimes g_y)\Delta^C_{x,y},\cdots\cdots) = (\sum_{xy=\alpha}m_B(R\,h_x\,g_x\otimes Rl_y\,g_y)\Delta^C_{x,y},\cdots\cdots)$
而 $\varphi(f)★\varphi(f') = (R\,h_\alpha g_\alpha, Rh_\beta g_\beta,\cdots\cdots)★(R\,l_\alpha g_\alpha, R\,l_\beta g_\beta,\cdots\cdots)$. 令 $K = (k_\alpha, k_\beta,\cdots\cdots) = (R\,h_\alpha g_\alpha, Rh_\beta g_\beta,\cdots\cdots)★(R\,l_\alpha g_\alpha, R\,l_\beta g_\beta,\cdots\cdots)$，由 $\oplus_{\alpha\in\pi}Hom(C_\alpha,B)$ 的乘法得 $k_\alpha = \sum_{xy=\alpha}m_B(Rh_x g_x\otimes R\,l_y g_y)\Delta^C_{x,y}$，所以 $\varphi(f★f') = \varphi(f)★\varphi(f')$. 又由于
$\varphi(0,0,\cdots,u_A\varepsilon^D,0,0,\cdots) = (0,0,\cdots,Ru_A\varepsilon^D g_1,0,0,\cdots) = (0,0,\cdots u_B\varepsilon^C,0,0,\cdots)$，即 φ 为代数同态. 又由 φ 的定义，对任意的 $\alpha \in \pi$，$\varphi(Hom(D_\alpha,A)) \subseteq Hom(C_\alpha,B)$，即 φ 也保分次，所以 φ 为 π- 分次代数同态.

参考文献：

[1] VIRELIZER A. Hopf group-coalgebras [J]. J Pure Algebra, 2002, 171: 75-122.

[2] SWEEDLER M E. Hopf algebra [M]. New York: Benjamin, 1969.

[3] ABE E. Hopf algebra [M]. New York: Combridge University Press, 1980.

(责任编辑：邓大玉)