关于丢番图方程$[(10k_1+2)^n-1][(10k_2+3)^n-1]=x^2$的解*

Solutions on the Diophantine Equation $[(10k_1+2)^n-1][(10k_2+3)^n-1]=x^2$

唐　波,杨仕椿
TANG Bo,YANG Shi-chun

(阿坝师范高等专科学校数学系,四川汶川　623000)
(Department of Mathematics,Aba Teachers College,Wenchuan,Sichuan,623000,China)

摘要:利用二次剩余的方法,证明丢番图方程 $(a^n-1)(b^n-1)=x^2$ 在 $(a,b)=(10k_1+2,10k_2+3)$ 时,k_2 满足:(1)$k_2\equiv 0,1(\mathrm{mod}4)$,(2)$k_2\equiv 11,14(\mathrm{mod}16)$,(3)$k_2\equiv 6,19(\mathrm{mod}64)$,则这类丢番图方程没有正整数解.

关键词:丢番图方程　指数方程　解　二次剩余
中图法分类号:O156.7　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2007)03-0204-02

Abstract:By using quadratic residue module method, it is proved that the Diophantine equation $(a^n-1)(b^n-1)=x^2$ has no solutions for some cases of k_2, where $(a,b)=(10\,k_1+2,10\,k_2+3)$, $k_2\equiv 0,1(\mathrm{mod}\ 4)$, or $k_2\equiv 11,14(\mathrm{mod}\ 4)$,or $k_2\equiv 6,19(\mathrm{mod}\ 64)$.

Key words:Diophantine equation,exponential equation,solutions,quadratic residue

设 N 表示正整数集合.指数丢番图方程

$$(a^n-1)(b^n-1)=x^2,a<b,n,x\in \mathrm{N} \tag{1}$$

是 L.Szalay 在讨论某些代数结构的问题时提出的.2000年,L.Szalay[1] 用了比较长的篇幅证明了,当$(a,b)=(2,3)$时,方程(1),即丢番图方程

$$(2^n-1)(3^n-1)=x^2 \tag{2}$$

没有正整数解.L.Hajdu 和 L.Szalay[2] 证明了当$(a,b)=(2,6)$时,方程(1)没有正整数解.2002年,J.H.E.Cohn[3] 对一般的 a,b 进行了讨论,给出了当 $2\leqslant a,b\leqslant 12$ 时方程(1)的所有解.由于方程(1)在代数、数论、群论以及编码学中有广泛、深入的应用[4~8],因此研究 a,b 较大时方程(1)的解的情况,是一件非常有意义的工作.本文考虑丢番图方程

$$[(10k_1+2)^n-1][(10k_2+3)^n-1]=x^2,k_1,k_2\in \mathrm{N}, \tag{3}$$

给出了这类方程的解的一些较一般的结论,而且作为推论,给出了方程(2)的简洁解法.

1　引理

首先给出两个引理.

引理 1[3]　若 $4|n$,则方程(1)仅在$(a,b)=(13,239)$时才有解,而且仅有解$(n,x)=(4,9653280)$.

引理 2[9]　若 Jabobi 符号$\left(\frac{a}{p}\right)=-1$,则同余式 $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\ p)$ 无解.

2　主要结果

定理　若 k_2 满足:

i)$k_2\equiv 0,1(\mathrm{mod}4)$;ii)$k_2\equiv 11,14(\mathrm{mod}16)$;iii)$k_2\equiv 6,19(\mathrm{mod}64)$ 则方程(3)没有正整数解.

证明　由引理1,由于此时$(a,b)\neq(13,239)$,因此只需考虑方程(3)在 $n\equiv 1(\mathrm{mod}2)$ 和 $n\equiv 2(\mathrm{mod}4)$ 的情形.

1)若 $n\equiv 1(\mathrm{mod}2)$,当 $n=4m_1+1$ 时,

$[(10k_1+2)^n-1][(10k_2+3)^n-1]\equiv(2^n-1)(3^n-1)\equiv(2^{4m_1+1}-1)(3^{4m_1+1}-1)\equiv(2-1)(3-1)\equiv 2(\mathrm{mod}5)$,

但$\left(\frac{2}{5}\right)=-1$,则此时方程(3)无解.

当 $n=4m_1+3$ 时,

收稿日期:2007-01-19
作者简介:唐　波(1986-),男,主要从事代数及数论研究。
* 四川省教育厅自然科学基金项目(2006C057)和阿坝师专校级科研基金项目资助。

$[(10k_1+2)^n-1][(10k_2+3)^n-1] \equiv (2^n-1)(3^n-1) \equiv (2^{4m_1+3}-1)(3^{4m_1+3}-1) \equiv (8-1)(27-1) \equiv 2(\mathrm{mod}5)$,
同样,此时方程(3)也无解.

2) 若 $n \equiv 2(\mathrm{mod}4)$,设 $n=2w, 2\nmid w$,则

$[(10k_1+2)^n-1][(10k_2+3)^n-1]=[(10k_1+2)^n-1](100k_2^2+60k_2+8)[(10k_2+3)^{2(w-1)}+(10k_2+3)^{2(w-2)}+\cdots+1]=4(25k_2^2+15k_2+2)A$.
这里 $2\nmid A$.

i) 若 $k_2 \equiv 0(\mathrm{mod}4)$,可设 $k_2=4m$,则 $25k_2^2+15k_2+2=400m^2+60m+2$,于是由方程(3)得,$x^2=8(200m^2+30m+1)A=8B$,但 $2\nmid B$,因此方程(3)无解.

若 $k_2 \equiv 1(\mathrm{mod}4)$,可设 $k_2=4m+1$,则 $25k_2^2+15k_2+2=400m^2+260m+42$,于是由(3)得,$x^2=8(200m^2+130m+21)A=8B$,但 $2\nmid B$,因此方程(3)无解.

ii) 若 $k_2 \equiv 11(\mathrm{mod}16)$,可设 $k_2=16m+11$,则 $25k_2^2+15k_2+2=6400m^2+8800m+1216$,于是由(3)得,$x^2=32(200m^2+275m+38)A=32B$,但 $2\nmid B$,因此方程(3)无解.

若 $k_2 \equiv 14(\mathrm{mod}16)$,可设 $k_2=16m+14$,则 $25k_2^2+15k_2+2=6400m^2+11440m+5112$,于是由(3)得,$x^2=8(800m^2+1430m+639)A=8B$,但 $2\nmid B$,因此方程(3)无解.

iii) 若 $k_2 \equiv 6(\mathrm{mod}64)$,可设 $k_2=64m+6$,则 $25k_2^2+15k_2+2=102400m^2+32960m+992$,于是由(3)得,$x^2=32(3200m^2+1030m+31)A=32B$,但 $2\nmid B$,因此方程(3)无解.

若 $k_2 \equiv 19(\mathrm{mod}64)$,可设 $k_2=64m+19$,则 $25k_2^2+15k_2+2=102400m^2+61760m+9312$,于是由(3)得,$x^2=32(3200m^2+1930m+219)A=32B$,但 $2\nmid B$,因此方程(3)无解.

于是定理得证.

3 推论

由定理的证明,可得如下推论:

推论1 若 $2^k|25k_2^2+15k_2+2$,且 $2^{k+1}\nmid 25k_2^2+15k_2+2$,而 $2\nmid k$,则方程(3)没有正整数解.

证明 由2)的i)～iii)定理即可得证.

推论2 方程 $(2^n-1)(3^n-1)=x^2$ 没有正整数解.

证明 在定理中令 $k_1=0, k_2=0$ 即可.

参考文献:

[1] SZALAY L. On the diophantine equation $(2^n-1)(3^n-1)=x^2$ [J]. Publ Math Debrecen, 2000, 57: 1-9.

[2] HAJDU L, SZALAY L. On the diophantine equation $(2^n-1)(6^n-1)=x^2$ and $(a^n-1)(b^{kn}-1)=x^2$ [J]. Per Math Hungarica, 2000, 40(20): 141-145.

[3] COHN J H E. The diophantine equation $(a^n-1)(b^n-1)=x^2$ [J]. Per Math Hungarica, 2002, 44(2): 169-175.

[4] COHN J H E. The diophantine equation $x^4-Dy^2=1$, Ⅱ [J]. Acta Arith, 1997, 78: 401-403.

[5] COHN J H E. The diophantine equation $x^n=Dy^2+1$ [J]. Acta Arith, 2003, 106: 73-78.

[6] HERRMANN E, JARASI I, PETHO A. Note on J H E Cohn's paper "the diophantine equation $x^n=Dy^2+1$" [J]. Acta Arith, 2004, 113: 69-76.

[7] 乐茂华. Gel'found-Baker 方法在丢番图方程中的应用[M]. 北京:科学出版社, 1998: 44-45.

[8] 曹珍富. 不定方程及其应用[M]. 上海:上海交通大学出版社, 2000: 149-158.

[9] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京:科学出版社, 1979.

(责任编辑:邓大玉)

美国开发出三维面部识别软件

三维面部识别是生物特征鉴别技术的前沿研究热点,由于人脸三维数据获取困难、数据海量存储和计算困难等,三维面部识别研究一直突破不大。最近人脸识别技术取得新进展。美国休斯敦大学的卡拉法蒂斯教授和他的研究团队开发出三维 URxD 面部识别软件。该软件使用面部的三维快照获得人脸某个独一无二的标识符,考虑了人脸部的轮廓、结构、红外线成像特点,也考虑了时间因素。研究人员使用一套包含电脑、光学扫描器和网络摄像头的识别系统,将人面部的数据扫描进入数据库,然后采用特殊的三维人脸识别算法对人脸部的某些区域编码,用 RGB 三种颜色表示人面部的三维轮廓特征。上述系统使用人脸的三维信息,在国际面部识别超级挑战赛中,在 4007 个资料组的测试上脱颖而出,获得了好成绩。该软件可以应用于政府和工业。

(据科学网)