广西科学 Guangxi Sciences 2007,14(3):209～212

几类图的符号星控制数*

Signed Star Domination Numbers for Some Graphs

熊　坤,苏健基
XIONG Kun,SU Jian-ji

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林　541004)
(College of Mathematics,Guangxi Normal University,Guilin,Guangxi,541004,China)

摘要:给出 $K_m \times C_n, C_m \times C_n, K_m \times K_n$ 这三类图的符号星控制数.

关键词:函数　符号星控制数　偶圈

中图法分类号:O157.5　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2007)03-0209-04

Abstract: The signed star domination numbers for the graphs of $K_m \times C_n, C_m \times C_n, K_m \times K_n$ are given.

Key words: function, signed star domination number, even cycle

本文只考虑有限简单(无环,无平行边)无向图,未说明的符号和术语同于文献[1]. $G=(V(G),E(G))$ 为一个图,$V(G)$ 和 $E(G)$ 分别是 G 的顶点集和边集.若 $A,B \subseteq G, A \cap B = \varnothing$,$G$ 中所有满足一个端点在 A 中,另一个端点在 B 中的边集合记为 $E_G(A,B)$,$E_G(A) = E_G(A, V(G)-A)$.我们用 $d_G(x)$,$N_G(x)$ 分别表示 G 中点 x 的度和邻域.若 $e \in E(G)$,$N_G(e)$ 表示 G 中与 e 相邻的边的集合,称为 e 的边邻域,称 $N_G[e] = N_G(e) \cup \{e\}$ 为 e 的闭边邻域.在所指的图 G 很明确时,我们在记号中省略下标.P_n 表示阶为 n 的路.若 $S \subseteq V(G)$,则 $G[S]$ 表示 S 在 G 中的导出子图.对 $x,y \in V(G)$,如果 x,y 相邻,xy 表示连接 x,y 的边.我们用 $G \times H$ 表示 G 和 H 的卡氏积,其顶点集是 $V(G) \times V(H)$,对 $x,y \in V(G)$,$a,b \in V(H)$,(x,a) 与 (y,b) 相邻当且仅当 $x=y$ 且 $ab \in E(H)$ 或 $a=b$ 且 $xy \in E(G)$.徐保根在文献[2]中引入了图的符号边控制数的概念,并进一步在文献[3～5]中引入了图的符号星控制数的概念.

对于一个图 $G=(V,E)$,$v \in V$,则 v 点的边邻域定义为 $E(v) = \{uv \in E \mid u \in V\}$.

定义[3]　设 G 是一个没有孤立点的图,一个函数 $f: E \to \{+1,-1\}$ 如果对每一个 $v \in V(G)$ 都有 $\sum_{e \in E(v)} f(e) \geq 1$,则称 f 为图 G 的符号星控制函数.图 G 的符号星控制数定义为:

$$\gamma_{ss}(G) = \min\{\sum_{e \in E(G)} f(e) \mid f \text{ 为 } G \text{ 的符号星控制函数}\}.$$

若 $v \in V$,用 $f(v)$ 表示 $\sum_{e \in E(v)} f(e)$.

引理 1　对任意图 G,设 n_1, n_2 分别为 G 的奇度点和偶度点数目,则 $\gamma_{ss}(G) \geq \frac{n_1}{2} + n_2$.

证明　设 f 是图 G 的符号星控制函数,且使得 $\gamma_{ss}(G) = \sum_{e \in E(G)} f(e)$,由定义,$\sum_{e \in E(G)} f(e) = \frac{1}{2}\sum_{v \in V(G)} f(v) \geq \frac{n_1}{2} + n_2$,从而得到结论.

引理 2[6]　(1)偶数阶完全图 K_n 可分解为一个 1-因子和 $\frac{n}{2}-1$ 个 Hamilton 圈;(2)奇数阶完全图 K_n 可分解为 $\frac{n-1}{2}$ 个 Hamilton 圈.

引理 3　$|E(G)| - \gamma_{ss}(G)$ 是偶数.

证明　设 f 为 G 一符号星控制函数,且使得 $\gamma_{ss}(G) = \sum_{e \in E} f(e)$.$E(G)$ 中 f 取 1 的边数记为 m_1,f 取 -1 的边数记为 m_2,则 $|E(G)| = m_1 + m_2$,$m_1 - m_2 = \gamma_{ss}(G)$,因此 $|E(G)| - \gamma_{ss}(G) = 2m_2$ 是偶数.

定理 1　设 $m \geq 4, n \geq 3$,则

$\gamma_{ss}(K_m \times C_n) =$

收稿日期:2006-11-29
作者简介:熊　坤(1981-),女,硕士研究生,主要从事图论研究工作。
*广西自然科学基金项目(桂科自 0640063)资助。

$$\begin{cases}\frac{mn}{2}, \text{当 } m \text{ 为偶数；} \\ mn, \text{当 } m \text{ 为奇数且 } n, \frac{m-1}{2} \text{ 不同时为奇数；} \\ mn+1, \text{当 } m, n, \frac{m-1}{2} \text{ 同时为奇数.}\end{cases}$$

证明　令 $G = K_m \times C_n$，

$G_1 = nK_m = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$，其中 $H_i \cong K_m$，$i = 1,2,\cdots,n$，

$G_2 = mC_n = H'_1 \cup H'_2 \cup \cdots \cup H'_m$，其中 $H'_i \cong C_n$，$i = 1,2,\cdots,m$，

$G_1 \cup G_2$ 是 G 的生成子图.

情形 1　m 为偶数时.

因为 $|V(G)| = mn$，对任意 $u \in V(G)$，$d(u) = m-1+2 = m+1$ 为奇数，则由引理 1 得到 $\gamma'_{ss}(G) \geqslant \frac{mn}{2}$. 由引理 2 的(1)，$G_1$ 的子图 H_i 可分解为一个 1 － 因子和 $\frac{m}{2}-1$ 个 Hamilton 圈，其中 $i = 1,2,\cdots,n$.

可定义一符号星控制函数 f 使得 $\gamma'_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = \frac{mn}{2}$.

对 H_i 中的 $\frac{m}{2}-2$ 个 Hamitom 圈的边，交错的定义 f 的值为 $+1$，-1，对最后一个 Hamitom 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对 H_i 中的 1 － 因子定义 f 的值为 $+1$，其中，$i = 1,2,\cdots,n$. 当 $e \in E(G_2)$ 时，取 $f(e) = -1$，则 f 是一符号星控制函数，$\sum_{e\in E} f(e) = \frac{mn}{2}$，因此 $\gamma'_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = \frac{mn}{2}$.

情形 2　当 m 为奇数时.

因为 $|V(G)| = mn$，对任意 $u \in V(G)$，$d(u) = m-1+2 = m+1$ 为偶数，则由引理 1 得到 $\gamma'_{ss}(G) \geqslant mn$. 由引理 2 的(2)，奇数阶完全图 H_i 可分解为 $\frac{m-1}{2}$ 个 Hamilton 圈，其中 $i = 1,2,\cdots,n$.

(1) 若 $\frac{m-1}{2}$ 为偶数.

可定义一符号星控制函数 f 使得 $\gamma'_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = mn$. 对 H_i 中的 $\frac{m-1}{4}$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对 H_i 中的另 $\frac{m-1}{4}$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 -1，其中 $i = 1,2,\cdots,n$. 当 $e \in E(G_2)$ 时，$f(e) = +1$，则 f 是一符号星控制函数，$\gamma'_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = mn$.

(2) 若 $\frac{m-1}{2}$ 为奇数.

1) 当 n 为偶数时，

可定义一符号星控制函数 f，使得 $\gamma'_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = mn$.

对 H_i 中的 $\frac{1}{2}(\frac{m-1}{2}-1)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对 H_i 中的另 $\frac{1}{2}(\frac{m-1}{2}-1)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 -1，对 H_i 中的最后一个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对 H'_i 中的边，交错的定义 f 的值为 $+1$，-1，其中 $i = 1,2,\cdots,m$. 则 $\gamma'_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = mn$.

2) 当 n 为奇数时，

因为 $|E(G)| = \frac{mn(m-1)}{2} + mn$，若 $\gamma'_{ss}(G) = mn$，则 $|E(G)| - \gamma'_{ss}(G) = \frac{mn(m-1)}{2}$ 为奇数，但是由引理 3，$|E(G)| - \gamma'_{ss}(G)$ 必须是偶数，矛盾. 所以，$\gamma'_{ss}(G) \geqslant mn+1$.

对 H_i 中的 $\frac{1}{2}(\frac{m-1}{2}-1)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$. 对 H_i 中的另 $\frac{1}{2}(\frac{m-1}{2}-1)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 -1，对 H_i 中的最后一个 Hamilton 圈的边，交错的定义 f 的值为 $+1$，-1，使得与 H'_m 中的点关联的两条边 f 的值为 $+1$，其中 $i = 1,2,\cdots,n$.

当 $e \in H'_1 \cup \cdots \cup H'_{m-1}$ 时，$f(e) = +1$，对 H'_m 中的边，交错的定义 f 的值为 $+1$，-1，而与 H_n 关联的两条边 f 的值均取 $+1$，则 f 是一符号星控制函数，f 使得 $\sum_{e\in E} f(e) = mn+1$，因此 $\gamma'_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = mn+1$.

定理 2　设 $m \geqslant 3$，$n \geqslant 3$，则

$$\gamma'_{ss}(C_m \times C_n) = \begin{cases} mn, \text{当 } m, n \text{ 中有一个为偶数；} \\ mn+1, \text{当 } m, n \text{ 均为奇数.}\end{cases}$$

证明　令 $G = C_m \times C_n$，则 $|V(G)| = mn$，G 是顶点数为 mn 的 4 正则图，则由引理 1 得 $\gamma'_{ss}(G) \geqslant mn$.

$G_1 = nC_m = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$，其中 $H_i \cong C_m$，$i = 1,2,\cdots,n$.

$G_2 = mC_n = H'_1 \cup H'_2 \cup \cdots \cup H'_m$，其中 $H'_i \cong C_n$，$i = 1,2,\cdots,m$.

$G_1 \cup G_2$ 为 G 的生成子图.

情形 1　m，n 中有一个为偶数时.

假设 m 为偶数，

可定义一符号星控制函数 f 使得 $\gamma'_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = mn$. 对 H_i 中的边，交错的定义 f 的值为 $+1$，-1，其中 $i = 1,2,\cdots,n$. 当 $e \in G_2$ 时，$f(e) = +1$，

则 f 是一符号星控制函数，$\sum_{e\in E} f(e) = mn$，因此 $\gamma_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = mn$.

当 n 为偶数时同理.

情形 2 m,n 均为奇数时.

因为 $|E(G)| = 2mn$，$|E| - \gamma_{ss}(G) = mn$ 是奇数，与引理 3 矛盾，所以，$\gamma_{ss}(G) \geqslant mn+1$.

当 $e \in H'_2 \cup \cdots \cup H'_m$ 时，$f(e) = +1$.

对 H_i 中的边，交错的定义 f 的值为 $+1,-1$，使得与 H'_1 中的点关联的边 f 的值为 $+1$，其中 $i=1,2,\cdots,n$. 对 H'_1 中的边，交错的定义 f 的值为 $+1,-1$，而与 H_1 关联的两条边 f 的值均取 $+1$. 则 f 是一符号星控制函数，$\sum_{e\in E} f(e) = mn+1$，因此 $\gamma_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = mn+1$.

定理 3 设 $m \geqslant 2, n \geqslant 2$，则

$$\gamma_{ss}(K_m \times K_n) = \begin{cases} mn，当\ m,n\ 全为偶数； \\ \dfrac{mn}{2}，当\ m,n\ 奇偶性相反； \\ mn+1，当\ m,n\ 全为奇数，且\ \dfrac{m-1}{2},\dfrac{n-1}{2} \\ \quad 奇偶性相同； \\ mn，当\ m,n\ 全为奇数，且\ \dfrac{m-1}{2},\dfrac{n-1}{2}\ 奇偶性相反. \end{cases}$$

证明 令 $G = K_m \times K_n$，

$G_1 = nK_m = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$，其中 $H_i \cong K_m$，$i=1,2,\cdots,n$.

$G_2 = mK_n = H'_1 \cup H'_2 \cup \cdots \cup H'_m$，其中 $H'_i \cong K_n$，$i=1,2,\cdots,m$.

$G_1 \cup G_2$ 为 G 的生成子图，且 $|V(G)| = mn$.

情形 1 当 m,n 均为偶数时.

对任意 $u \in G$，$d(u) = n-1+m-1 = m+n-2$ 为偶数，则由引理 1 得到 $\gamma_{ss}(G) \geqslant mn$.

由引理 2 的(1)，G_1 的子图 H_i 可分解为一个 1 − 因子和 $\frac{m}{2}-1$ 个 Hamilton 圈，其中 $i=1,2,\cdots,n$. G_2 的子图 H'_i 可分解为一个 1 − 因子和 $\frac{n}{2}-1$ 个 Hamilton 圈，其中 $i=1,2,\cdots,m$.

对 H_i 中的 $\frac{m}{2}-1$ 个 Hamilton 圈的边，交错的定义 f 的值为 $+1,-1$. 对 H_i 中的 1 − 因子定义 f 的值为 $+1$，其中 $i=1,2,\cdots,n$.

对 H'_i 中的 $\frac{n}{2}-1$ 个 Hamilton 圈的边，交错的定义 f 的值为 $+1,-1$，对 H'_i 中的 1 − 因子定义 f 的值为 $+1$，其中 $i=1,2,\cdots,m$.

则 f 是图 G 的一符号星控制函数，$\sum_{e\in E} f(e) = mn$，因此 $\gamma_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = mn$.

情形 2 当 m,n 奇偶性相反时.

假设 m 为偶数，n 为奇数，则奇数阶完全图 H'_i 可分解为 $\frac{n-1}{2}$ 个 Hamilton 圈，其中 $i=1,2,\cdots,m$.

对任意 $u \in G$，$d(u) = m+m-2$ 为奇数，则由引理 1 得 $\gamma_{ss}(G) \geqslant \frac{mn}{2}$.

(1) 当 $\frac{n-1}{2}$ 为偶数.

对 H_i 中的 $\frac{m}{2}-1$ 个 Hamilton 圈的边，交错地定义 f 的值为 $+1,-1$，对 H_i 中的 1 − 因子定义 f 的值为 $+1$，其中 $i=1,2,\cdots,n$.

对 H'_i 中的 $\frac{n-1}{4}$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对 H'_i 中的另 $\frac{n-1}{4}$ 个 Hamilton 圈的边定义 f 的值为 -1，其中 $i=1,2,\cdots,m$.

则得到 $\gamma_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = \frac{mn}{2}$.

(2) 当 $\frac{n-1}{2}$ 为奇数.

对 H_i 中的 $\frac{m}{2}-1$ 个 Hamilton 圈的边，交错的定义 f 的值为 $+1,-1$，对 H_i 中的 1 − 因子定义 f 的值为 -1，其中 $i=1,2,\cdots,n$.

对 H'_i 中的 $\frac{1}{2}(\frac{n-1}{2}-1)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对 H'_i 中的另 $\frac{1}{2}(\frac{n-1}{2}-1)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 -1，对 H'_i 中剩下的 1 个 Hamilton 圈的边定义 f 的值为 $+1$.

则得到 $\gamma_{ss}(G) = \sum_{e\in E} f(e) = \frac{mn}{2}$.

n 为偶数，m 为奇数时同理.

情形 3 m,n 均为奇数.

对任意 $u \in G$，$d(u) = m+m-2$ 为偶数，则由引理 1 得 $\gamma_{ss}(G) \geqslant mn$.

(1) 当 $\frac{m-1}{2},\frac{n-1}{2}$ 同为偶数时.

因为 $|E| = \frac{mn}{2}(m+n-2)$，若 $\gamma_{ss}(G) = mn$，则 $|E(G)| - \gamma_{ss}(G) = \frac{mn(m+n-4)}{2}$ 为奇数，但由引理 3 得到 $|E(G)| - \gamma_{ss}(G)$ 必须是偶数，矛盾. 所以 $\gamma_{ss}(G) \geqslant mn+1$.

对 H_i 中 $\frac{m-1}{4}$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对 H_i 中另 $\frac{m-1}{4}$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f

的值为 -1，其中 $i=2,\cdots,n$.

对 H_i' 中 $\frac{1}{2}(\frac{n-1}{2}-2)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对另 H_i' 中 $\frac{1}{2}(\frac{n-1}{2}-2)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 -1，对余下的其中一个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对余下的另一个 Hamilton 圈的边交错地定义 f 的值为 $+1$，-1 使其在 H_1 中的点所关联两条边的 f 值为 $+1$，其中 $i=1,2,\cdots m$.

对 H_1 中 $\frac{1}{2}(\frac{m-1}{2}-2)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对 H_1 中另 $\frac{1}{2}(\frac{m-1}{2}-2)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 -1，对余下的其中一个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 -1，对余下的另一个 Hamilton 圈的边，交错的定义 f 的值为 $+1$，-1，使其在 H_1' 中的点所关联两条边的 f 值为 $+1$. 则 f 是一符号星控制函数，使得 $\sum_{e\in E}f(e)=mn+1$，因此 $\gamma_{ss}(G)=\sum_{e\in E}f(e)=mn+1$.

(2) 当 $\frac{m-1}{2}$，$\frac{n-1}{2}$ 奇偶性相反时.

由对称性，可假设 $\frac{m-1}{2}$ 为偶数，$\frac{n-1}{2}$ 为奇数时，

对 H_i 中 $\frac{m-1}{4}$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对 H_i 中另 $\frac{m-1}{4}$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 -1，其中 $i=1,2,\cdots,n$.

对 H_i' 中 $\frac{1}{2}(\frac{n-1}{2}-1)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对 H_i' 中另 $\frac{1}{2}(\frac{n-1}{2}-1)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 -1，对最后一个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，则得到 $\gamma_{ss}(G)=\sum_{e\in E}f(e)=mn$.

(3) 当 $\frac{m-1}{2}$，$\frac{n-1}{2}$ 同奇数时.

因为 $|E|=\frac{mn}{2}(m+n-2)$，若 $\gamma_{ss}(G)=mn$，则 $|E(G)|-\gamma_{ss}(G)=\frac{mn(m+n-4)}{2}$ 为奇数，但与引理 3 矛盾，所以 $\gamma_{ss}(G)\geqslant mn+1$.

可定义一符号星控制函数 f，使得 $\gamma_{ss}(G)=\sum_{e\in E}f(e)=mn+1$.

对 H_i 中 $\frac{1}{2}(\frac{m-1}{2}-1)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对 H_i 中另 $\frac{1}{2}(\frac{m-1}{2}-1)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 -1，其中 $i=1,2,\cdots,n$.

对 H_i 中最后 1 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，其中 $i=2,\cdots,n$.

对 H_i' 中 $\frac{1}{2}(\frac{n-1}{2}-1)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 $+1$，对 H_i' 中另 $\frac{1}{2}(\frac{n-1}{2}-1)$ 个 Hamilton 圈的边，定义 f 的值为 -1，对 H_i' 中最后一个 Hamilton 圈的边，交错的定义 f 的值为 $+1$，-1，使其与 H_1 中的点关联的两条边的 f 值为 $+1$，其中 $i=1,2,\cdots,m$.

对 H_1 中最后一个 Hamilton 圈的边交错的定义 f 的值为 $+1$，-1，则所定义的 $+1$ 边比 -1 边多一条，所以 $\gamma_{ss}(G)=\sum_{e\in E}f(e)=mn+1$.

参考文献：

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications[M]. London: MacMillan, 1976.

[2] XU BAOGEN. On signes edge domination numbers of graphs[J]. Discrete Mathematics, 2001, 239: 179-189.

[3] XU BAOGEN. On edge domination numbers of graphs [J]. Discrete Mathematics, 2005, 294: 311-316.

[4] 徐保根. 关于图的符号星控制数[J]. 华东交通大学学报, 2004, 21(4): 116-118.

[5] 徐保根. 两类图的符号星控制数[J]. 华东交通大学学报, 2005, 22(4): 147-148.

[6] BERGE C. Graphs[M]. Amsterdam: Elservier Science Publishers B V, 1991.

(责任编辑：邓大玉)