

一个非线性 Drinfeld-Sokolov 系统的行波解分支 * Bifurcations of Travelling Wave Solutions in a Nonlinear Drinfeld-Sokolov System

陈爱永¹, 洪银芳¹, 赵大虎², 唐生强¹

CHEN Ai-yong¹, HONG Yin-fang¹, ZHAO Da-hu², TANG Sheng-qiang¹

(1. 桂林电子科技大学数学与计算科学学院, 广西桂林 541004; 2. 广西大学数学与信息科学学院, 广西南宁 530004)

(1. College of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. College of Mathematics and Informational Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要: 用动力系统分支理论研究一个非线性 Drinfeld-Sokolov 系统, 证明该系统存在扭子波、反扭子波、孤立波和无穷多光滑周期波解, 获得在不同参数条件下上述解存在的充分条件及其精确表达式。

关键词: 孤立波 扭子波 周期波

中图分类号: O175 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2007)03-0217-04

Abstract: The bifurcation theory of planar dynamical systems is used to analyze a nonlinear Drinfeld-Sokolov system. The existence of kink wave, anti-kink wave solutions, solitary wave solutions and periodic wave solutions is proved. The sufficient conditions and exact explicit parametric expression of above solutions are obtained under different parametric conditions.

Key words: solitary wave, kink wave, periodic wave

在非线性波的研究里, 有以下 Drinfeld-Sokolov 系统:

$$\begin{aligned} u_t + (v^n)_x &= 0, \\ v_t - av_{xxx} + 3bu_xv + 3kuv_x &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

这里 a, b, k 是常数. Wazwaz A M^[1] 用正弦余弦方法对系统(1)进行了研究. 我们利用动力系统分支理论来研究该系统.

令 $u(x, t) = u(x - ct) = u(\zeta), v(x, t) = v(x - ct) = v(\zeta)$, 其中 c 是波速, 则系统(1)变成常微分方程组

$$\begin{aligned} -cu' + (v^n)' &= 0, \\ cv' + av''' - 3bu'v - 3kuv' &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

这里 $u' = \frac{du}{d\zeta}, v' = \frac{dv}{d\zeta}$. 积分(2)式的第一个方程并忽略积分常数, 得

$$cu = v^n, \quad (3)$$

将(3)式代入(2)式的第二个方程, 积分一次并忽略积分常数, 得

$$c^2v - \frac{3(bn + k)}{n + 1}v^{n+1} + acv'' = 0. \quad (4)$$

系统(4)等价于下列二维系统:

$$\frac{dv}{d\zeta} = y, \frac{dy}{d\zeta} = \frac{3(bn + k)v^{n+1} - c^2(n + 1)v}{ac(n + 1)}. \quad (5)$$

显然, 系统(5)是一个 Hamilton 系统, 它的 Hamilton 量为

$$H(v, y) = \frac{1}{2}y^2 - \frac{3(bn + k)}{ac(n + 1)(n + 2)}v^{n+2} + \frac{c}{2a}v^2. \quad (6)$$

系统(5)是一个定义在四参数空间 (a, b, c, k) 的平面自治动力系统, 对固定的 $bn + k$, 将研究当参数 a, c 变化时, 在相平面 (v, y) 内系统(5)的相轨线的分支, 由于所考虑的物理模型只对有界行波解才有意义, 因此我们仅关注系统(5)的有界解.

假设当 $\zeta \in (-\infty, +\infty)$ 时, $v(\zeta)$ 是系统(5)的一个连续解, 且有 $\lim_{\zeta \rightarrow +\infty} v(\zeta) = a$ 和 $\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} v(\zeta) = b$. 相应

收稿日期: 2007-04-25

作者简介: 陈爱永(1977-), 男, 讲师, 主要从事微分方程研究工作.

* 广西自然科学基金项目(0575092)和新世纪广西高等教育教学改革工程重点立项项目资助.

有:(i)当 $a=b$ 时,称 $v(x-ct)$ 是一个孤立波解;(ii)当 $a \neq b$ 时,称 $v(x-ct)$ 是一个扭子或反扭子波解.通常,系统(1)的一个孤立波解对应系统(5)的一个同宿轨线,系统(1)的一个扭子或反扭子波解对应系统(5)的一个异宿轨线.类似有,系统(5)的一个周期轨线对应系统(1)的一个周期行波解.因此,为了研究系统(1)的孤立波和周期波分支,我们需要找到依赖于系统参数系统(5)的周期轨线和同宿轨线.动力系统分支理论^[2-4]在研究领域里有非常重要的作用.

1 系统(5)的相图分支

假设 $bn+k \neq 0, ac \neq 0$. (i)当 $n=2m-1(m=1,2,3,\dots)$,系统(5)有2个奇点: $O(0,0), A(v_1,0)$,这里 $v_1 = \left(\frac{(n+1)c^2}{3(bn+k)}\right)^{\frac{1}{n}}$; (ii)若 $n=2m(m=1,2,3,\dots)$,则当 $bn+k > 0$ 时,系统(5)有3个奇点: $O(0,0), S_{1,2}(v_{1,2},0)$,这里 $v_{1,2} = \pm \left(\frac{(n+1)c^2}{3(bn+k)}\right)^{\frac{1}{n}}$,当 $bn+k < 0$ 时,系统(5)只有一个奇点: $O(0,0)$.

假设 $M(v_i, y_i)$ 是系统(5)的线性化系统在奇点 (v_i, y_i) 处的系数矩阵,令 $J(v_i, y_i) = \det(M(v_i, y_i))$,那么根据平面动力系统的理论,我们知道对一个平面自治可积系统的奇点,如果 $J < 0$,那么奇点是一个鞍点;如果 $J > 0$ 和 $\text{Trace}(M(v_i, y_i)) = 0$,那么奇点是一个中心点;如果 $J > 0$ 和 $(\text{Trace}(M(v_i, y_i)))^2 - 4J(v_i, y_i) > 0$,那么奇点是一个结点;如果 $J = 0$ 且奇点的指标是0,那么它是一个尖点,否则,它是一个高阶奇点.

对于系统(5),我们有

$$J(0,0) = \frac{c}{a}, J(v_i,0) = -\frac{nc}{a} \quad (7)$$

对于由(6)式所定义的 Hamilton 量,我们有

$$H(0,0) = 0, h_i = H(v_i,0) =$$

$$\frac{nc}{2a(n+2)} \left(\frac{(n+1)c^2}{3(bn+k)}\right)^{\frac{2}{n}} \quad (8)$$

考虑系统(5)的奇点类型.

I. $n=2m-1(m=1,2,3,\dots)$.

(i)当 $bn+k > 0, ac > 0$ 时, $O(0,0)$ 是中心, $A(v_1,0)$ 是鞍点.

(ii)当 $bn+k > 0, ac < 0$ 时, $O(0,0)$ 是鞍点, $A(v_1,0)$ 是中心.

(iii)当 $bn+k < 0, ac > 0$ 时, $O(0,0)$ 是中心, $A(v_1,0)$ 是鞍点.

(iv)当 $bn+k < 0, ac < 0$ 时, $O(0,0)$ 是鞍点, $A(v_1,0)$ 是中心.

II. $n=2m(m=1,2,3,\dots)$.

(i)当 $bn+k > 0, ac > 0$ 时, $O(0,0)$ 是中心,

$S_{1,2}(v_{1,2},0)$ 是鞍点.

(ii)当 $bn+k > 0, ac < 0$ 时, $O(0,0)$ 是鞍点, $S_{1,2}(v_{1,2},0)$ 是中心.

(iii)当 $bn+k < 0, ac > 0$ 时, $O(0,0)$ 是中心.

(iv)当 $bn+k < 0, ac < 0$ 时, $O(0,0)$ 是鞍点.

在 (a,c) 参数平面,直线 $a=0$ 和 $c=0$ 将参数空间划分成4个区域:

(I) $a > 0, c > 0$, (II) $a < 0, c > 0$, (III) $a < 0, c < 0$, (IV) $a > 0, c < 0$.

在这些区域,系统(5)有不同的相图显示在图1和图2.

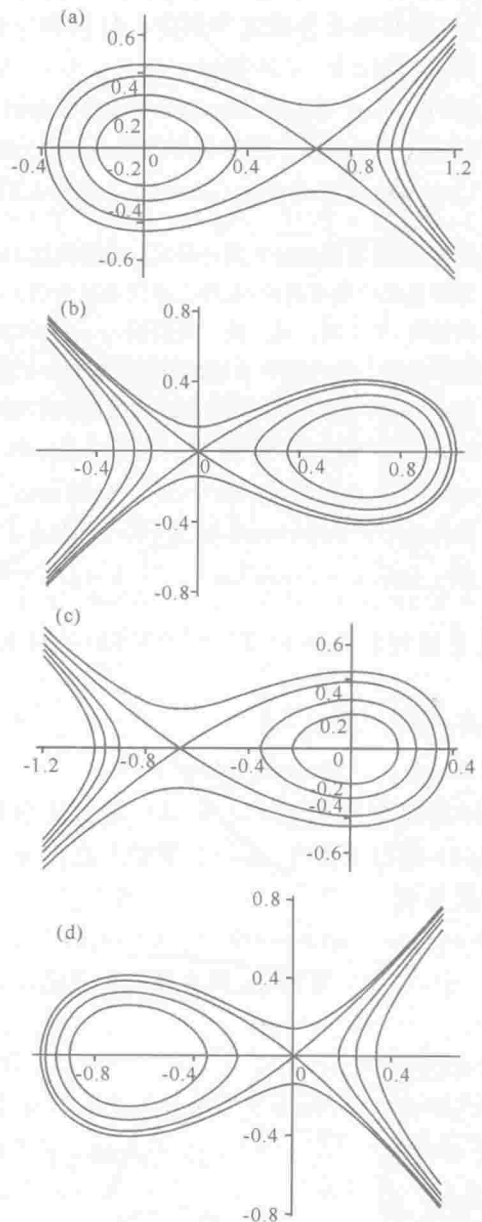


图1 当 $n=2m-1(m=1,2,3,\dots)$ 时,系统(5)的相图

Fig.1 The phase portraits of system(5) for $n=2m-1(m=1,2,3,\dots)$

(a) $bn+k > 0, ac > 0$; (b) $bn+k > 0, ac < 0$; (c) $bn+k < 0, ac > 0$; (d) $bn+k < 0, ac < 0$.

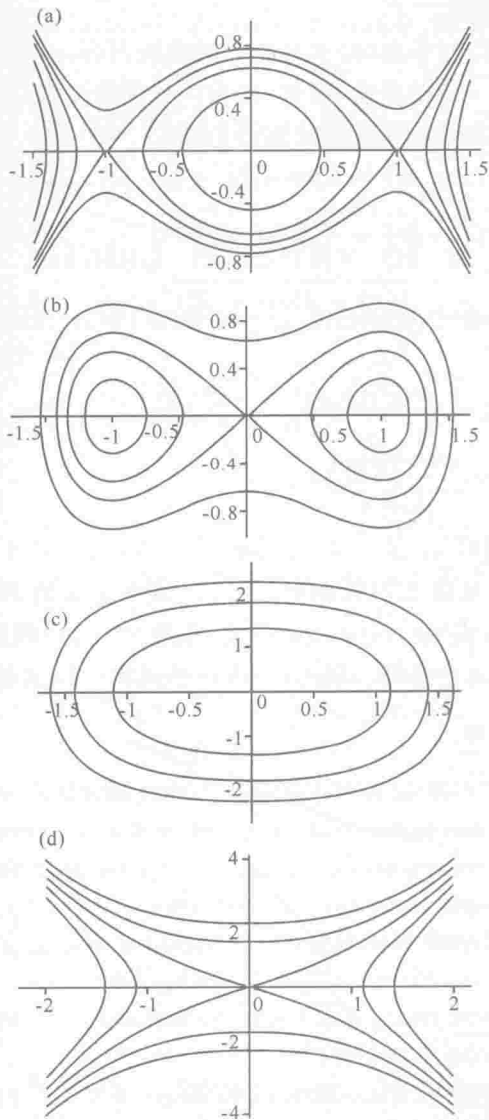


图2 当 $n = 2m (m = 1, 2, 3, \dots)$ 时, 系统(5) 的相图

Fig. 2 The phase portraits of system(5) for $n = 2m (m = 1, 2, 3, \dots)$

(a) $bn + k > 0, ac > 0$, (b) $bn + k > 0, ac < 0$, (c) $bn + k < 0, ac > 0$, (d) $bn + k < 0, ac < 0$.

2 系统(1) 的显式精确行波解

在这一节, 讨论系统(1) 的扭子波、反扭子波、孤立波和周期波解的存在性, 并在 $n = 1$ 和 $n = 2$ 时给出上述解的显式精确表达式.

I. $n = 2m - 1 (m = 1, 2, 3, \dots)$.

(i) $bn + k > 0, ac > 0$ 即 $(a, c) \in (I)$ 或 (III) (见图 1(a)).

i) 对于由(6) 式所定义的曲线 $H(v, y) = h_1$ 的分支, 系统(1) 有一个谷形孤立波解. 当 $n = 1$ 时, 其显式精确表达式为:

$$v(x - ct) = -\frac{c^2}{3(b+k)} + \frac{c^2}{b+k} \tanh^2\left(\sqrt{\frac{c}{4a}}(x - ct)\right),$$

$-ct)$,

$$u(x - ct) = \frac{1}{c}v. \quad (9)$$

ii) 对于由(6) 式所定义的曲线 $H(v, y) = h, h \in (0, h_1)$ 的分支, 系统(1) 有一族周期波解. 当 $n = 1$ 时, 其显式精确表达式为:

$$v(x - ct) = \gamma + (\beta - \gamma)sn^2(\omega_1(x - ct), k_1),$$

$$u(x - ct) = \frac{1}{c}v, \quad (10)$$

其中 $\omega_1 = \sqrt{\frac{(b+k)(\alpha-\gamma)}{4ac}}, k_1 = \sqrt{\frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma}}, \alpha, \beta, \gamma$ 为方程 $\frac{b+k}{ac}v^3 - \frac{c}{a}v^2 + 2h = 0$ 的根.

(ii) $bn + k > 0, ac < 0$, 即 $(a, c) \in (II)$ 或 (IV) (见图 1(b)).

i) 对于由(6) 式所定义的曲线 $H(v, y) = 0$ 的分支, 系统(1) 有一个峰形孤立波解. 当 $n = 1$ 时, 其显式精确表达式为:

$$v(x - ct) = \frac{c^2}{b+k} \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{c}{4a}}(x - ct)\right),$$

$$u(x - ct) = \frac{1}{c}v. \quad (11)$$

ii) 对于由(6) 式所定义的曲线 $H(v, y) = h, h \in (h_1, 0)$ 的分支, 系统(1) 有一族周期波解. 当 $n = 1$ 时, 其显式精确表达式为:

$$v(x - ct) = \alpha - (\alpha - \beta)sn^2(\omega_2(x - ct), k_2),$$

$$u(x - ct) = \frac{1}{c}v, \quad (12)$$

其中 $\omega_2 = \sqrt{\frac{(b+k)(\alpha-\gamma)}{-4ac}}, k_2 = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}, \alpha, \beta, \gamma$ 为方程 $\frac{b+k}{ac}v^3 - \frac{c}{a}v^2 + 2h = 0$ 的根.

(iii) 当 $bn + k < 0, ac > 0$, 即 $(a, c) \in (I)$ 或 (III) (见图 1(c)), 对于由(6) 式所定义的曲线 $H(v, y) = h_1$ 的分支, 系统(1) 有一个峰形孤立波解. 当 $n = 1$ 时, 其显式精确表达式和(9) 式相同; 对于由(6) 式所定义的曲线 $H(v, y) = h, h \in (0, h_1)$ 的分支, 系统(1) 有一族周期波解. 当 $n = 1$ 时, 其显式精确表达式和(12) 式相同.

(iv) 当 $bn + k < 0, ac < 0$, 即 $(a, c) \in (II)$ 或 (IV) (见图 1(d)), 对于由(6) 式所定义的曲线 $H(v, y) = 0$ 的分支, 系统(1) 有一个谷形孤立波解. 当 $n = 1$ 时, 其显式精确表达式和(11) 式相同; 对于由(6) 式所定义的曲线 $H(v, y) = h, h \in (h_1, 0)$ 的分支, 系统(1) 有一族周期波解. 当 $n = 1$ 时, 其显式精确表达式和(10) 式相同.

II. $n = 2m (m = 1, 2, 3, \dots)$.

(i) $bn + k > 0, ac > 0$, 即 $(a, c) \in (I)$ 或

(Ⅲ)(见图 2(a)).

i) 对于由(6)式所定义的曲线 $H(v, y) = h_1$ 的分支, 系统(1)有一个扭子波和一个反扭子波解, 当 $n = 2$ 时, 其显式精确表达式为:

$$\begin{aligned} v(x-ct) &= \pm \frac{c\sqrt{2b+k}}{2b+k} \tanh\left(\sqrt{\frac{c}{2a}}(x-ct)\right), \\ u(x-ct) &= \frac{1}{c}v^2. \end{aligned} \quad (13)$$

ii) 对于由(6)式所定义的曲线 $H(v, y) = h, h \in (0, h_1)$ 的分支, 系统(1)有一族周期波解, 当 $n = 2$ 时, 其显式精确表达式为:

$$\begin{aligned} v(x-ct) &= \beta_1 \operatorname{sn}(\omega_3(x-ct), k_3), \\ u(x-ct) &= \frac{1}{c}v^2, \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\omega_3 = \alpha_1 \sqrt{\frac{2b+k}{2ac}}, k_3 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$,

$$\alpha_1^2 = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 - 4ach(2b+k)}}{2b+k}, \beta_1^2 = \frac{c^2 - \sqrt{c^4 - 4ach(2b+k)}}{2b+k}. \quad (15)$$

(ii) $bn + k > 0, ac < 0$, 即 $(a, c) \in (I)$ 或 (IV) (见图 2(b)).

i) 对于由(6)式所定义的曲线 $H(v, y) = 0$ 的分支, 系统(1)有 2 个孤立波解, 当 $n = 2$ 时, 其显式精确表达式为:

$$\begin{aligned} v(x-ct) &= \sqrt{\frac{2c^2}{2b+k}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{-c}{a}}(x-ct)\right), \\ u(x-ct) &= \frac{1}{c}v^2. \end{aligned} \quad (16)$$

ii) 对于由(6)式所定义的曲线 $H(v, y) = h, h \in (h_1, 0)$ 的分支, 系统(1)有两族周期波解, 当 $n = 2$ 时, 其显式精确表达式为:

$$\begin{aligned} v(x-ct) &= \pm \alpha_1 \operatorname{dn}(\omega_4(x-ct), k_4), \\ u(x-ct) &= \frac{1}{c}v^2, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $\omega_4 = \alpha_1 \sqrt{\frac{2b+k}{-2ac}}, k_4 = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 - \beta_1^2}{\alpha_1^2}}, \alpha_1, \beta_1$ 和(15)

式中相同.

iii) 对于由(6)式所定义的曲线 $H(v, y) = h, h \in (0, +\infty)$ 的分支, 系统(1)有一族周期波解, 当 $n = 2$ 时, 其显式精确表达式为:

$$\begin{aligned} v(x-ct) &= \beta_2 \operatorname{cn}(\omega_5(x-ct), k_5), \\ u(x-ct) &= \frac{1}{c}v^2, \end{aligned} \quad (18)$$

其中 $\omega_5 = \sqrt{\frac{(2b+k)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)}{-2ac}}, k_5 = \frac{\beta_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}}$,

$$\alpha_2^2 = \frac{-c^2 + \sqrt{c^4 - 4ach(2b+k)}}{2b+k}, \beta_2^2 = \frac{c^2 + \sqrt{c^4 - 4ach(2b+k)}}{2b+k}. \quad (19)$$

(iii) 若 $2b+k < 0, ac > 0$, 即 $(a, c) \in (I)$ 或 (III) (见图 2(c)), 则对于由(6)式所定义的 $H(v, y) = h, h \in (0, +\infty)$ 的分支, 系统(1)有一族周期波解, 当 $n = 2$ 时, 其显式精确表达式和(18)式相同.

参考文献:

- [1] WAZWAZ A M. Exact and explicit travelling wave solutions for nonlinear Drinfeld-Sokolov system [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2006, 11(3): 311-325.
- [2] CHOW S N, HALE J K. Method of bifurcation theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1981.
- [3] WHITHAM G B. Linear and nonlinear wave [M]. New York: Wiley, 1974.
- [4] 李继彬. Klein-Gordon-Schrodinger 方程的孤立波和周期波解[J]. 云南大学学报: 自然科学版, 2003, 25(3): 176-180.

(责任编辑: 邓大玉)

委内瑞拉创 WiFi 无线网络技术新纪录

委内瑞拉安第斯大学拉美网络学院教授埃尔曼诺·彼得罗塞莫里和他领导的一个 20 人的工作团队成功地将两台距离 382km 的被分别放置在委西南部梅里达州和中部瓜里科州两座山峰上的计算机用 WiFi 无线技术连接起来, 刷新了 WiFi 无线网络技术应用距离的世界纪录。

WiFi 无线网络技术通常在短距离范围内使用。彼得罗塞莫里他们对 WiFi 技术进行了一些改进, 将相距 279km 的两台设备连接了起来, 打破了世界纪录。最近他们又刷新了自己的纪录。WiFi 技术可以为偏远贫困地区的居民服务, 因为利用的是回收的电视天线, 其使用成本非常低。该技术的另一个优点是安装和维护简单易行。

(据科学网)