解析算子函数空间上复合算子的两个性质

Two Properties of Composition Operators on a Space of Analytic Operator Functions

吴树宏

WU Shu-hong

(武汉理工大学理学院数学系,湖北武汉　430070)

(Department of Mathematics, College of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei, 430070, China)

摘要:在解析算子函数所形成的空间上定义复合算子,给出此复合算子的紧性和闭值域性质.

关键词:解析算子函数　复合算子　紧算子　闭值域

中图法分类号:O177　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2007)03-0224-03

Abstract: Composition operators on a space of analytic operator functions are defined. A sufficient condition is obtained to the composition operators with compact and closed range.

Key words: analytic operator function, composition operators, compact operator, closed range

1　预备知识

设D为复平面C上以原点为圆心的单位圆盘,H为复 Hilbert 空间,$B(H)$为所有H上的有界线性算子构成的复 Banach 空间,并且$B(H)^*$为$B(H)$的共轭空间. D上的算子值函数意味着对每一个$z\in D$,都有$f(z)\in B(H)$,并且一个D上的算子值函数称为是解析的,如果对每个$\varphi\in B(H)^*$,在经典的意义下,$\varphi(f(z))$在D内解析. 对于$T\in B(H)$,$\sigma(T)$表示算子T的谱,I表示H上的恒等算子.

$$A(H)=\{f\in B(H):\forall\, z\in D, f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n, A_k\in B(H), k\geqslant 0\}.$$

复函数理论中的许多熟知的结果,例如,Cauchy 积分定理,Cauchy 估计,以及最大模原理等都适用于$A(H)$[1].

定义 1.1[2]　设$f\in A(H)$,$T\in B(H)$且$\sigma(T)\subseteq D$,定义一个从$B(H)$到$B(H)$的映射:

$$f(T)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}f(z)(zI-T)^{-1}\mathrm{d}z,$$

其中Γ为正定向简单可求长闭曲线,并且$\sigma(T)$包含在Γ的内域Ω中,$\Omega\cup\Gamma\subseteq D$. 称此映射为 Hilbert 空间$H$上的解析算子函数.

设$f,g\in A(H)$,称f与g可交换,如果对于所有$z,w\in D$,

$$f(z)g(w)=g(w)f(z).$$

以$N(H)$表示所有$f\in A(H)$使得对$z,w\in D$,都有

$$f(z)f(w)=f(w)f(z), f(z)f(z)^*=f(z)^*f(z)$$

的解析算子值函数构成的集合.

$B_H=\{A\in B(H):\|A\|<1\}$,$\Delta=\{f\in A(H):\forall\, z\in D, \|f(z)\|<1\}$.

设$T,T_1,T_2\in B(H)$,若$\forall\, x\in H$,$\langle Tx,x\rangle\geqslant 0$($\langle Tx,x\rangle>0(x\neq 0)$),则称$T\geqslant 0$($T>0$). 若$T_1-T_2\geqslant 0$($T_1-T_2>0$),则称$T_1\geqslant T_2$($T_1>T_2$).

性质 1.1[2]　设$f\in A(H)$,且其 Taylor 展开式为:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n, z\in D,$$

其中$\{A_n\}$是$B(H)$中的算子序列. 如果$T\in B_H$,则

$$f(T)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nT^n.$$

性质 1.2[2]　设$f,g\in A(H)$,并且对于D的任一紧子集K_2,存在D的紧子集K_1使得对每个$z\in K_2$,均有$\sigma(g(z))$包含在K_1内. $\forall\, z\in D$,设$h(z)=(f\circ g)(z)=f[g(z)]$,则$h=f\circ g\in A(H)$.

收稿日期:2007-03-05

修回日期:2007-05-17

作者简介:吴树宏(1963-),男,副教授,主要从事泛函分析方面的研究工作。

性质 1.3[2] 设 $f,g\in A(H)$，并且对于 D 的任一紧子集 K_2，存在 D 的紧子集 K_1 使得对每个 $z\in K_2$，均有 $\sigma(g(z))$ 包含在 K_1 内. 如果 $T\in B(H)$ 与 g 可交换，并且 $\sigma(T)\subseteq D,\sigma(g(T))\subseteq D$，则 $(f\circ g)(T)=f(g(T))$.

性质 1.4[2] 设 $f,g\in A(H)$，且其 Taylor 展开式分别为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n,g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B_nz^n(z\in D),$$

其中 $\{A_n\},\{B_n\}$ 均为 $B(H)$ 中的算子序列. 则

(1) 对于 $z,w\in D,f(z)g(w)=g(w)f(z)$ 当且仅当对所有 $n,m=0,1,2,\cdots\cdots,B_nA_m=A_mB_n$；

(2) $f\in N(H)$ 当且仅当 $\{A_n\}$ 是两两可换的正常算子序列.

设 $\mathscr{H}^2=\{f\in A(H):\forall z\in D,f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n,\ \|f\|_{\mathscr{H}}<\infty\}$，

此处

$$\|f\|_{\mathscr{H}}^2=\|\sum_{n=0}^{\infty}A_n^*A_n\|,$$

设 $\varphi\in\Delta$，由定义 1.1，性质 1.1，复合算子 C_φ 可定义为

$$(C_\varphi f)(z)=f(\varphi(z))=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\zeta)(\zeta I-\varphi(z))^{-1}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\varphi^n(z),$$

其中 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n$，$\Gamma$ 为正定向简单可求长闭曲线，并且 $\sigma(\varphi(z))(z\in D)$ 包含在 Γ 的内域 Ω 中，$\Omega\cup\Gamma\subseteq D$，则 C_φ 为 $A(H)$ 上的线性算子.

注 (1) 任给紧子集 $K_2\subset D$，$\exists z_0\in K_2$，使得 $\sup\limits_{z\in K_2}\|\varphi(z)\|=\|\varphi(z_0)\|<1$. $\forall R\in(\|\varphi(z_0)\|,1)$，$z\in K_2$，有 $\sigma(\varphi(z))\subseteq RD$，由性质 1.2 知，$f\circ\varphi=C_\varphi\in A(H)$.

(2) 若 $f\in A(H),f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n\equiv 0$，$\forall\psi\in B^*(H)$，有 $\psi f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\psi A_nz^n\equiv 0\Leftrightarrow\psi A_n\equiv 0(n\in N\cup\{0\})\Leftrightarrow A_n=0(n\in N\cup\{0\})$，故 $f(z)$ 的表达式唯一.

2 几个引理

引理 2.1(Cauchy-Schwarz 不等式) $\forall x,y\in H$，$f,g\in A(H)$，$0<r<1$，则

$$|\int_0^{2\pi}\langle f(re^{i\theta})x,g(re^{i\theta})y\rangle d\theta|^2\leqslant\int_0^{2\pi}\langle f(re^{i\theta})x,f(re^{i\theta})x\rangle d\theta\cdot\int_0^{2\pi}\langle g(re^{i\theta})y,g(re^{i\theta})y\rangle d\theta.$$

引理 2.2(三角不等式) $\forall r\in(0,1),x\in H$，$f,g\in A(H)$ 有

$$\{\int_0^{2\pi}\langle[f(re^{i\theta})+g(re^{i\theta})]x,[f(re^{i\theta})+g(re^{i\theta})]x\rangle d\theta\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\{\int_0^{2\pi}\langle f(re^{i\theta})x,f(re^{i\theta})x\rangle d\theta\}^{\frac{1}{2}}+\{\int_0^{2\pi}\langle g(re^{i\theta})x,g(re^{i\theta})x\rangle d\theta\}^{\frac{1}{2}}.$$

引理 2.3 设 $f\in A(H),r\in(0,1)$，

$$M^2(f,r)=\frac{1}{2\pi}\|\int_0^{2\pi}f^*(re^{i\theta})f(re^{i\theta})d\theta\|,$$

那么当 $r\to 1^-$ 时，$M(f,r)$ 单调增加收敛于 $\|f\|_{\mathscr{H}}$，即

$$\|f\|_{\mathscr{H}}^2=\lim_{r\to 1^-}\frac{1}{2\pi}\|\int_0^{2\pi}f^*(re^{i\theta})f(re^{i\theta})d\theta\|,$$

$f\in\mathscr{H}^2$ 当且仅当 $M(f,r)$ 在 $[0,1)$ 上关于 r 有界.

证明 设 $f\in A(H)$，$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}A_nz^n$. 记 $z=re^{i\theta}$，对 $0\leqslant r<1$，有

$$M^2(f,r)=\frac{1}{2\pi}\|\int_0^{2\pi}f^*(re^{i\theta})f(re^{i\theta})d\theta\|=\frac{1}{2\pi}\|\int_0^{2\pi}[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}A_m^*A_nr^{m+n}e^{i(n-m)\theta}]d\theta\|=\frac{1}{2\pi}\|\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}A_m^*A_nr^{m+n}e^{i(n-m)\theta}d\theta\|=\|\sum_{n=0}^{\infty}A_n^*A_nr^{2n}\|.$$

此公式说明 $M(f,r)$ 为 r 的非单调减函数. 如果 $f\in\mathscr{H}^2$，则 $M(f,r)\leqslant\|f\|_{\mathscr{H}}$. 反之，如果 $\lim\limits_{r\to 1^-}M(f,r)=K<\infty$，对任意非负整数 N，有

$$\|\sum_{n=0}^{N}A_n^*A_nr^{2n}\|\leqslant\|\sum_{n=0}^{\infty}A_n^*A_nr^{2n}\|\leqslant K^2.$$

令 $r\to 1^-$，则有 $\|\sum_{n=0}^{N}A_n^*A_n\|\leqslant K^2$，由 N 的任意性即可知 $\|f\|_{\mathscr{H}}\leqslant K$. 由此即得引理结论.

推论 2.1 $\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$ 为 $\mathscr{H}^2$ 上的范数.

证明 由引理 2.2，$\forall r\in(0,1)$，当 $f,g\in A(H)$ 时，有

$$\{\int_0^{2\pi}\langle[f(re^{i\theta})+g(re^{i\theta})]x,[f(re^{i\theta})+g(re^{i\theta})]x\rangle d\theta\}^{\frac{1}{2}}\leqslant\{\int_0^{2\pi}\langle f(re^{i\theta})x,f(re^{i\theta})x\rangle d\theta\}^{\frac{1}{2}}+\{\int_0^{2\pi}\langle g(re^{i\theta})x,g(re^{i\theta})x\rangle d\theta\}^{\frac{1}{2}}.$$

关于 $x\in\{y:\|y\|=1,y\in H\}$，对上述三角不等式取上确界，再令 $r\to 1^-$，并由引理 2.3，得

$$\|f+g\|_{\mathscr{H}}\leqslant\|f\|_{\mathscr{H}}+\|g\|_{\mathscr{H}}.$$

又因 $\forall k\in C$，$\|kf\|_{\mathscr{H}}=|k|\ \|f\|_{\mathscr{H}}$；$\|f\|_{\mathscr{H}}=0$ 当且仅当 $\sum_{q=0}^{\infty}A_q^*A_q=0,f=0$，故 $\|\cdot\|_{\mathscr{H}}$ 是 $\mathscr{H}^2$ 上的范数.

3 复合算子的紧性和闭值域性质

当 H 为无限维时，$B(H)$ 为无限维，$\forall A\in$

$B(H)$，$C_\varphi A = A$，故 C_φ 不可能为紧算子，故只能在 H 为有限维时讨论 C_φ 的紧性.

定理 3.1 当 H 为有限维时，若 $\varphi \in \Delta$，$H_\varphi = \{g \in A(H)$：φ 与 g, g^* 可交换$\}$，φ 与 φ^* 可换，$\| \int_0^{2\pi} [I - \varphi^*(e^{i\theta})\varphi(e^{i\theta})]^{-1} d\theta \| < \infty$，则 C_φ 为 $\mathscr{H}^2 \cap H_\varphi$ 上的紧算子.

证明 若 A_k, B_k, A_k^* 两两可换，则

$$(\sum_{k=1}^{\infty} A_k^* A_k)(\sum_{k=1}^{\infty} B_k^* B_k) - (\sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k)^* \cdot (\sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} [A_p^* A_p B_q^* B_q - B_p^* A_p^* A_q B_q] = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} (A_p^* B_q - A_q^* B_p)^* (A_p^* B_q - A_q^* B_p) \geqslant 0,$$

故

$$(\sum_{k=1}^{\infty} A_k^* A_k)(\sum_{k=1}^{\infty} B_k^* B_k) \geqslant (\sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k)^* (\sum_{k=1}^{\infty} A_k B_k).$$

若 $f \in \mathscr{H}^2 \cap H_\varphi$，$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$，由性质 1.4，$\varphi$ 的算子系数与 f, f^*, φ^* 的算子系数可换，故

$$(\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \phi^k(z))^* (\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \phi^k(z)) \leqslant (\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^* A_k)(\sum_{k=n+1}^{\infty} (\phi^k(z))^* \phi^k(z)).$$

$\forall n \in N$，设 $T_n f = \sum_{k=0}^{n} A_k \phi^k$，因 H 为有限维，$B(H)$ 亦为有限维，故 T_n 为 $\mathscr{H}^2$ 上的有限秩算子. 由引理 2.3

$$\| (C_\varphi - T_n) f \|_{\mathscr{H}}^2 = \| \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \phi^k \|_{\mathscr{H}}^2 = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \to 1^-} \| \int_0^{2\pi} [\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \phi^k(re^{i\theta})]^* [\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k \phi^k(re^{i\theta})] d\theta \| \leqslant \frac{1}{2\pi} \lim_{r \to 1^-} \| \int_0^{2\pi} (\sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^* A_k)(\sum_{k=n+1}^{\infty} [\phi^k(re^{i\theta})]^* \phi^k(re^{i\theta})) d\theta \| \leqslant \| f \|_{\mathscr{H}}^2 \cdot \lim_{r \to 1^-} \| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} [\phi^k(re^{i\theta})]^* \phi^k(re^{i\theta})) d\theta \|.$$

因 H 为有限维且

$$\| \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} [\phi^k(e^{i\theta})]^* \phi^k(e^{i\theta})) d\theta \| = \| \int_0^{2\pi} [I - \phi(e^{i\theta})^* \phi(e^{i\theta}))]^{-1} d\theta \| < \infty,$$

故 $\lim_{n \to \infty} \| C_\varphi - T_n \| = 0$. 从上面推导可看出 T_n 为有界算子，故 T_n 为紧算子，从而紧算子的范数极限 C_φ 亦为紧算子.

引理 3.1 设 X, Y 为复 Banach 空间，U 是 X 中的开集，$x_0 \in U$，$f \in C^m(U, Y)$，$m \geqslant 1$. 若 $f'(x_0)$：$X \to Y$ 是正则算子，则存在 x_0 的邻域 V 与 y_0 的邻域 W，使得映射 $f: V \to W$ 是 C^m 微分同胚，即 $f: V \to W$ 同胚，并且 f, f^{-1} 都具有 m 阶连续导映射.

引理 3.2 若 $f \in A(H)$，E 为 B_H 中的开集，$\forall A \in E$，$f(A) = 0$，则 $\forall A \in B_H$，$f(A) \equiv 0$.

证明 $\forall A \in E$，$\exists r(A) > 0$，当 $|z| < r(A)$ 时，$A + zI \in E$，故 $f(A + zI) \equiv 0(|z| < r(A))$. $\exists R(A) > 0$，当 $|z| < R(A)$ 时，$A + zI \in B_H$，$f(A + zI)$ 为 $\{z: |z| < R(A)\}$ 上的解析算子函数. $\forall \psi \in B(H)^*$，当 $|z| < R(A)$ 时 $\psi(f(A + zI))$ 为解析函数，且当 $|z| < r(A)$ 时 $\psi(f(A + zI)) \equiv 0$，故当 $|z| < R(A)$ 时 $\psi(f(A + zI)) \equiv 0$. 由 ψ 的任意性，当 $|z| < R(A)$ 时，$f(A + zI) \equiv 0$. 记集合 $\bigcup_{A \in E} \{A + zI: A + zI \in B_H\}$ 在 B_H 中的内点集为 E_1，则 $E \subseteq E_1$，$f(A) = 0(\forall A \in E_1)$ 且当 $E \neq B_H$ 时，E_1 真包含 E. 重复上述过程可证 $f(A) \equiv 0(A \in B_H)$.

定理 3.2 设 C_φ 为 $\mathscr{H}^2$ 上的有界复合算子，$\exists A \in B_H$ 满足 $\varphi(A)$，$[\varphi(A)]^{-1} \in B(H)$，则在 $\mathscr{H}^2$ 上 C_φ 有闭值域当且仅当存在 $\varepsilon > 0$，使得对一切 $f \in \mathscr{H}^2$，$\| C_\varphi f \|_{\mathscr{H}} \geqslant \varepsilon \| f \|_{\mathscr{H}}$.

证明 设对一切 $f \in \mathscr{H}^2$，$\| C_\varphi f \|_{\mathscr{H}} \geqslant \varepsilon \| f \|_{\mathscr{H}}$，$\{C_\varphi f_n\} \subset R(C_\varphi)$ 为 Cauchy 序列，那么有 $\| C_\varphi f_n - C_\varphi f_m \|_{\mathscr{H}} \geqslant \varepsilon \| f_n - f_m \|_{\mathscr{H}}$ 于是 $\{f_n\}$ 为 $\mathscr{H}^2$ 中的 Cauchy 序列. 令 $f = \lim_{n \to \infty} f_n$，故 $R(C_\varphi)$ 是闭的.

反之，若 $f \in A(H)$，$(C_\varphi f)(z) = f \circ \varphi(z) = 0$. 由定义 1.1 知，$\forall A \in B_H$，$f \circ \varphi(A) = 0$. 由引理 3.1，$\varphi(B_H)$ 包含 B_H 中的开集. 由引理 3.2，$f(A) \equiv 0(A \in B_H)$，故 C_φ 是一一变换，于是 C_φ 是 $\mathscr{H}^2$ 到 $R(C_\varphi)$ 上的双射. 由引理 2.2，引理 2.3 及 H 为有限维可以证明以 $\| \cdot \|_{\mathscr{H}}$ 为范数的空间 $\mathscr{H}^2$ 为 Banach 空间. 由逆算子定理，即知 C_φ 存在有界逆算子 C_φ^{-1}，故存在 $\varepsilon > 0$，使得对一切 $f \in \mathscr{H}^2$，$C_\varphi f \in R(C_\varphi)$，有

$$\| C_\varphi^{-1}(C_\varphi f) \|_{\mathscr{H}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \| C_\varphi f \|_{\mathscr{H}},$$

故 $\| C_\varphi f \|_{\mathscr{H}} \geqslant \varepsilon \| f \|_{\mathscr{H}}$.

参考文献：

[1] HILLE H, PHILLIPS R S. Functional analysis and semi-groups[M]//Rev ed. Amer Math Soc Coll Publ, USA: Providence R I, 1957.

[2] 李国平，蹇明. 算子函数论[M]. 武汉：武汉大学出版社，1996.

[3] TAO Z G. Analytic operator functions[J]. J Math Anal Appl, 1984, 103: 293-320.

[4] 徐宪民. 复合算子理论[M]. 北京：科学出版社，1999.

[5] 钟承奎，范先令，陈文塬. 非线性泛函分析引论[M]. 兰州：甘肃人民出版社，1998.

（责任编辑：邓大玉　尹　闯）