广西科学 Guangxi Sciences 2007，14(3)：233～235

$\tilde{\rho}$ 混合阵列行加权和的 L_2 收敛性*

L_2 Convergence Properties of Weighted Sums for $\tilde{\rho}$ Random Sequences

谭成良，吴群英
TAN Cheng-liang，WU Qun-ying

（桂林工学院数理系，广西桂林　541004）
（Department of Mathematics and Physics，Guilin Institute of Technology，Guilin，Guangxi，541004，China）

摘要：讨论 $\tilde{\rho}$ 混合阵列行加权和在 Cesàro 一致可积条件下，或者在更为广泛条件下的 L_2 收敛性，改进并推广了鞅差阵列行加权和的相应结果.

关键词：$\tilde{\rho}$ 混合序列　Cesàro 一致可积　L_2 收敛性
中图法分类号：O211.4　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2007)03-0233-03

Abstract：The L_2 convergence of the weighted sums of $\tilde{\rho}$-mixing random sequences under the condition of Cesàro uniformly integrable or the very mild condition were discussed. That extended and improved corresponding results of Martingle difference sequence.

Key words：$\tilde{\rho}$-mixing random sequence，Cesàro uniformly integrable，L_2 convergence.

$\tilde{\rho}$ 混合序列是 Bradley[1] 提出来的. $\tilde{\rho}$ 混合序列的矩不等式，完全收敛性，不变原理和强大数定律在文献[2～4]中有所讨论. 本文讨论 $\tilde{\rho}$ 混合阵列行加权和在 Cesàro 一致可积条件下，或者在更为广泛条件下的 L_2 收敛性，改进并推广了鞅差阵列行加权和的相应结果.

1　相关定义与引理

设 N 为自然数集，$\{X_n;n\geqslant 1\}$ 是概率空间 (Ω,Ψ,P) 上的随机变量序列，$\mathbb{F}_s=\sigma(X_i;i\in S\subset \mathrm{N})$，$\mathbb{F}_1^k\triangleq\sigma(X_i;i\leqslant k)$，$\mathbb{F}_{k+n}^{\infty}\triangleq\sigma(X_i;i\geqslant k+n)$ 为 σ- 域，记 $L_p(\Psi)$ 为所有的 Ψ 可测且 p 阶矩有限的随机变量全体，在 Ψ 中给定 σ 域 $\mathbb{F}$，u. 令 $\rho(\mathbb{F},u)=\sup\{|\mathrm{corr}(X,Y)|;X\in L_2(\mathbb{F}),Y\in L_2(u)\}$. 其中：$\mathrm{corr}(X,Y)=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{\mathrm{Var}X\mathrm{Var}Y}}$ 为相关系数，对 $k\geqslant 0$，令 $\rho(n)=\sup\limits_{k\in \mathrm{N}}\rho(\mathbb{F}_1^k,\mathbb{F}_{k+n}^{\infty})$. 定义：$\tilde{\rho}(n)=\sup\{\rho(\mathbb{F}_s,u_T)$；有限子集 $S,T\subset\mathrm{N}$，且 $\mathrm{dist}(S,T)\geqslant n\}$. 其中 $\mathrm{dist}(S,T)$ 表示集合 S,T 的距离. 显然 $0\leqslant\tilde{\rho}(n+1)\leqslant\tilde{\rho}(n)\leqslant 1$，$\tilde{\rho}(0)=1$.

定义 1[5]　对随机序列 $\{X_n,n\geqslant 1\}$，如果存在 $n_0\geqslant 1$，使得 $\tilde{\rho}(n_0)<1$，则称 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列.

下文中“≪”表示通常的大“0”，C 为正常数，且在不同的地方可为不同的值.

引理 1[5]　设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列；$EX_n=0$，$E|X_n|^q<\infty$，$q>0$，则存在仅依赖于 q 和 $\tilde{\rho}$ 的常数 C，使对 $\forall\ n\geqslant 1,a\geqslant 0$ 有：$ES_n^2(a)\leqslant C\sum\limits_{i=k}^{n}EX_i^2$

设 (Ω,Ψ,P) 为概率空间，N 为自然数集，随机阵列 $\{X_{nk};1\leqslant k\leqslant k_n\uparrow\infty,n\in\mathrm{N}\}$，固定 n，假设每一行内的随机变量列 $\{X_{nk};1\leqslant k\leqslant k_n\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合的，记 $S_n\triangleq\sum\limits_{k=1}^{k_n}X_{nk}$.

定义 2　称随机变量阵列 $\{X_{nk};1\leqslant k\leqslant k_n\uparrow\infty,n\in\mathrm{N}\}$ 是 Cesàro 一致可积的，若

$$\lim_{x\to\infty}\sup_{n\geqslant 1}k_n^{-1}\sum_{k=1}^{k_n}E|X_{nk}|I(|X_{nk}|\geqslant x)=0.$$

显然，Cesàro 一致可积是严格弱于一致可积的.

定义 3　设 $\{a_{nk};1\leqslant k\leqslant k_n\uparrow\infty,n\geqslant 1\}$ 是实数阵列，$p>0$，如果满足：

收稿日期：2007-01-31
修回日期：2007-04-09
作者简介：谭成良（1982-），男，硕士研究生，主要从事概率极限理论研究。
* 国家自然科学基金项目(10661006)资助课题。

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n} a_{nk}=0$;

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^p\leqslant M$, M 为常数.

则称 $\{a_{nk};1\leqslant k\leqslant k_n\uparrow\infty,n\geqslant 1\}$ 为 L_p-Toeplitz 矩阵.

2 主要结果及其证明

定理 1 设 $\{X_{nk};1\leqslant k\leqslant k_n\uparrow\infty,n\geqslant 1\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合阵列，$EX_{nk}=0$，若 $\{|X_{nk}|^2;1\leqslant k\leqslant k_n\uparrow\infty,n\geqslant 1\}$ 是 Cesàro 一致可积的，$\{a_{nk};1\leqslant k\leqslant k_n\uparrow\infty,n\geqslant 1\}$ 为 L_p-Toeplitz 矩阵，其中 $1\leqslant p<2$；若 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|^2\cdot k_n=O(1)$，则 $E(\sum\limits_{k=1}^{k_n}a_{nk}X_{nk})^2\to 0(n\to\infty)$.

证明 对任意固定的 $\delta>0$，对每一 $1\leqslant k\leqslant k_n$，$n\geqslant 0$，令

$$X'_{nk}=X_{nk}I(|X_{nk}|\leqslant\delta)-EX_{nk}I(|X_{nk}|\leqslant\delta),$$

$$X''_{nk}=X_{nk}I(|X_{nk}|>\delta)-EX_{nk}I(|X_{nk}|>\delta),$$

则 $X_{nk}=X'_{nk}+X''_{nk}$ 且 $EX'_{nk}=EX''_{nk}=0$. 因此由引理 1，c_r 不等式有：

$$E(\sum_{k=1}^{k_n}a_{nk}X_{nk})^2 = E\sum_{k=1}^{k_n}a_{nk}(X'_{nk}+X''_{nk})^2\leqslant 2(E(\sum_{k=1}^{k_n}a_{nk}X'_{nk})^2+E(\sum_{k=1}^{k_n}a_{nk}X''_{nk})^2)\triangleq 2(I_1+I_2),$$

$$I_1\leqslant C\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^2E|X'_{nk}|^2\leqslant 2C\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^2E[X_{nk}I(|X_{nk}|\leqslant\delta)-EX_{nk}I(|X_{nk}|\leqslant\delta)]^2\leqslant 8C\{\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^2EX_{nk}^2I(|X_{nk}|\leqslant\delta)\leqslant 8C\delta^2\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^2,$$

$$I_2\leqslant C\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^2E|X''_{nk}|^2\leqslant 8C\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^2EX_{nk}^2I(|X_{nk}|>\delta),$$

$$2(I_1+I_2)\leqslant 16C\delta^2\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^2+16C\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^2EX_{nk}^2I(|X_{nk}|\geqslant\delta)\leqslant 16C\delta^2M\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|^{2-p}+16C\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|^2\cdot k_n\sup_{n\geqslant 1}(\frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_n}E|X_{nk}|^2I(|X_{nk}|\geqslant\delta)).$$

先令 $n\to\infty$，再令 $\delta\to\infty$，即得 $E(\sum\limits_{k=1}^{k_n}a_{nk}X_{nk})^2\to 0$.

推论 1 设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列，$EX_n=0$，$\{|X_n|^2;n\geqslant 1\}$ 是 Cesàro 一致可积的 $\{a_{nk};1\leqslant k\leqslant k_n\uparrow\infty,n\geqslant 1\}$ 为 L_p-Toeplitz 矩阵，其中 $1\leqslant p<2$ 若 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|^2\cdot k_n=O(1)$，则 $E(\sum\limits_{k=1}^{k_n}a_{nk}X_{nk})^2\to 0(n\to\infty)$.

推论 2 设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列，$EX_n=0$，$\{|X_n|^2;n\geqslant 1\}$ 是 Cesàro 一致可积的，则 $n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{L_2}0(n\to\infty)$. 特别，$\{X_n,n\geqslant 1\}$ 满足弱大数定理，即 $n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\xrightarrow{P}0(n\to\infty)$.

定理 2 设 $\{X_{nk};1\leqslant k\leqslant k_n\uparrow\infty,n\geqslant 1\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合阵列，$EX_{nk}=0$，如果存在常数 $a>0$，使得下面的条件成立：$\sup\limits_{n\geqslant 1}\sum\limits_{k=1}^{k_n}E|X_{nk}|^2I(|X_{nk}|>a)<\infty$，$\{a_{nk};1\leqslant k\leqslant k_n\uparrow\infty,n\geqslant 1\}$ 为 L_p-Toeplitz 矩阵，其中，$1\leqslant p<2$，且 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|\to 0(n\to\infty)$，则 $E(\sum\limits_{k=1}^{k_n}a_{nk}X_{nk})^2\to 0(n\to\infty)$.

证明 取 $\delta>0$，对每一 $1\leqslant k\leqslant k_n$，$n\geqslant 0$，仍沿用定理 1 的记号，由定理 1 的证明过程有

$$E(\sum_{k=1}^{k_n}a_{nk}X_{nk})^2\leqslant 16C\delta^2\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^2+16C\sum_{k=1}^{k_n}|a_{nk}|^2EX_{nk}^2I(|X_{nk}|\geqslant\delta). \tag{1}$$

又由定理 2 的条件得

$$(1)\leqslant 16C\delta^2M\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|^{2-p}+16C\max_{1\leqslant k\leqslant k_n}|a_{nk}|^2\sup_{n\geqslant 1}\sum_{k=1}^{k_n}EX_{nk}^2I(|X_{nk}|\geqslant\delta).$$

在上式中令 $n\to\infty$，则有 $E(\sum\limits_{k=1}^{k_n}a_{nk}X_{nk})^2\to 0$.

定理 3 设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是 $\tilde{\rho}$ 混合序列，$EX_n=0$，满足条件：对某 $\varepsilon>0$，存在正常数序列 $\{a_i,i\geqslant 1\}$，使 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\frac{a_i}{i})^2<\infty$ 及 $E|X_i|^2I(|X_i|\geqslant a_i)\leqslant\varepsilon(i\geqslant 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}E|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i|^2=0$.

证明 由题意，令 $X'_i=X_iI(|X_i|\leqslant a_i)-EX_iI(|X_i|\leqslant a_i)$，

$$X''_i=X_iI(|X_i|>a_i)-EX_iI(|X_i|>a_i),$$

则 $X_n=X'_n+X''_n$ 且 $EX'_n=EX''_n=0$. 因此由引理 1，c_r 不等式有：

$$E|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i|^2=E|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X'_i+X''_i)|^2\leqslant 2\frac{1}{n^2}E|\sum_{i=1}^{n}X'_i|^2+2\frac{1}{n^2}E|\sum_{i=1}^{n}X''_i|^2\triangleq 2(I_1+I_2),$$

$$I_1 \leqslant \frac{C}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E|X'_i|^2 = \frac{2C}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E[X_i I(|X_i| \leqslant a_i) - EX_i I(|X_i| \leqslant a_i)]^2 \leqslant \frac{8C}{n^2}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 I(|X_i| \leqslant a_i) \leqslant \frac{8C}{n^2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

$$I_2 \leqslant \frac{2C}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E|X''_i|^2 \leqslant \frac{8C}{n^2}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 I(|X_i| > a_i),$$

$$2(I_1 + I_2) \leqslant \frac{16C}{n^2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{16C}{n^2}\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 I(|X_i| > a_i). \quad (2)$$

由已知条件 $\sum_{i=1}^{n}(\frac{a_i}{i})^2 < \infty (n \to \infty)$，所以由文献[6]中 Kronecker 引理知：$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \to 0 (n \to \infty)$；又由已知条件 $E|X_i|^2 I(|X_i| \geqslant a_i) \leqslant \varepsilon (i \geqslant 1)$，得(2)式最右边一项 $\leqslant 16\varepsilon C/n$，所以当 $n \to \infty$ 时，$\lim_{n\to\infty} E|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i|^2 = 0$.

参考文献：

[1] BRADLEY R C. Eqnivalent mixing conditions for random fields[M]. Carolina: Technical Roport No. 336, Center for Stochastic Processes, 1990.

[2] 吴群英. 混合序列的若干收敛性质[J]. 工程数学学报, 2001, 18(3): 58-64, 50.

[3] 杨善朝. 一类随机变量部分和的矩不等式及其应用[J]. 科学通报, 1998, 43(17): 1824-1827.

[4] 吴群英. 混合序列的不变原理[J]. 纯粹数学和应用数学, 2003, 19(1): 12-15.

[5] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京：科学出版社, 2006.

[6] 林正炎, 陆传荣, 苏中根. 概率极限理论基础[M]. 北京：高等教育出版社, 1999.

[7] CHANDRA T K. Uniform integrability in the Cesàro sence and the week law of large numbers[J]. The Indian Yournal of Statistics, 1989, 51(seriesA): 309-317.

[8] 李春丽. 两两 NQD 阵列加权和的 L^2- 收敛性[J]. 湖北大学学报, 2005, 27(3): 215-219.

（责任编辑：邓大玉）

(上接第 232 页 Continue from page 232)

若 ϕ 的完全提升 Φ 是无穷调和映射，则在上面计算中有

$$0 = G(\nabla \Phi^a, \nabla |d\Phi|_G^2) = 16 g^{il} a_{il}^a E_{ij} y^j x^l + 16 g^{il} a_{il}^a E_{ij} x^j y^l = 16(g^{il} a_{il}^a E_{ij} + g^{il} a_{ij}^a E_{il}) x^j y^l = 16Y^t\{[A_a I_p^m(\sum_{\beta=1}^{n} h_{\beta\beta}(\circ\phi) A_\beta I_p^m A_\beta)] + [A_a I_p^m(\sum_{\beta=1}^{n} h_{\beta\beta}(\circ\phi) A_\beta I_p^m A_\beta)]^t\}X,$$

其中 $(\alpha = 1, \cdots, n)$，由 x^j, y^l 的任意性知 $x^j y^l$ 前的系数都为 0(其中 $j, l = 1, 2, \cdots, m$). 这意味着：$[A_a I_p^m(\sum_{\beta=1}^{n} h_{\beta\beta}(\circ\phi) A_\beta I_p^m A_\beta)] + [A_a I_p^m(\sum_{\beta=1}^{n} h_{\beta\beta}(\circ\phi) A_\beta I_p^m A_\beta)]^t = 0 (\alpha = 1, \cdots, n)$，此正是二次齐次多项式映射 ϕ 成为无穷调和映射的充要条件.

应用命题 4.1 易验证 $u: (R_1^2, g) \to (R_1^2, h)$, $u(x^1, x^2) = (4(x^1)^2 + 4(x^2)^2, 5(x^1)^2 + 6x^1x^2 + 5(x^2)^2)$ 等的完全提升是无穷调和映射且它本身也是无穷调和映射.

致谢：

作者诚挚地感谢导师欧业林教授给本文提出的修改意见和建议.

参考文献：

[1] OU Y L, WILHELM F. ∞-Harmonic maps and morphisms between riemannian manifolds[M]. Preprint, 2006.

[2] LU WEIJUN. Some results on harmonic morphisms between semi-Euclidean spaces [J]. Guangxi Sciences, 2001, 8(4): 266-277.

[3] OU Y L, WOOD J C. On the classification of quadratic harmonic morphisms between Euclidean spaces [J]. Algebra, Groups and Geometries, 1996, 13: 41-53.

[4] LU WEIJUN, FANG LIJING. A classification of quadratic harmonic morphisms between cemi-Euclidean spaces $R_r^3 \to R_r^2$ [J]. Guangxi Sciences, 2005, 12(4): 268-272.

[5] OU Y L. Complete lifts of maps and harmonic morphisms between Euclidean space [J]. Contributions to Algebra and Geometry, 1996, 37(1): 31-40.

（责任编辑：尹　闯　邓大玉）