广西科学 Guangxi Sciences 2007,14(3):239～243

一个共轭梯度方法的全局收敛性*

The Global Convergence of a Conjugate Gradient Method

洪　玲，莫利柳，韦增欣

HONG Ling，MO Li-liu，WEI Zeng-xin

（广西大学数学与信息科学学院，广西南宁　530004）

（College of Mathematics and Information Science，Guangxi University，Nanning，Guangxi，530004，China）

摘要：给出一种较弱的线搜索：寻找一个步长 $t_k=\rho^{j_k}\Delta_k$ 满足 $f(x_k+\rho^j d_k)-f(x_k)\leqslant\alpha\rho^j g_k^T d_k-\frac{m}{2}(\rho^j)^2\|d_k\|^2$，$\alpha\in(0,1)$，$\rho\in(0,1)$，$m>0$ 和 $g_{k+1}^T d_{k+1}<0$，将此线搜索应用于求解共轭梯度公式的 β_k^*，得到一种新共轭梯度算法，并证明新算法具有全局收敛，用数值实验说明新算法是有效的.

关键词：无约束优化　共轭梯度法　线搜索　全局收敛性

中图法分类号：O224　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1005-9164(2007)03-0239-05

Abstract：A line search is proposed. Under some suitable weak condition，we search a stepsize $t_k=\rho^{j_k}\Delta_k$ satisfying $f(x_k+\rho^j d_k)-f(x_k)\leqslant\alpha\rho^j g_k^T d_k-\frac{m}{2}(\rho^j)^2\|d_k\|^2$，$\alpha\in(0,1)$，$\rho\in(0,1)$，$m>0$ and $g_{k+1}^T d_{k+1}<0$. A new algorithm is obtained by using the present line search ，and its global convergence is proved. Preliminary numerical results show that this method is efficient.

Key words：unconstrained optimization，conjugate gradient method，line search，global convergence

考虑无约束优化问题

$$\min\{f(x)\mid x\in R^n\},\tag{1}$$

其中 $f:R^n\to R$ 为连续可微函数.共轭梯度法是用来求解无约束优化问题(1)式的一种方法，其迭代公式为：

$$x_{k+1}=x_k+t_k d_k,\tag{2}$$

$$d_k=\begin{cases}-g_k, & k=1,\\ -g_k+\beta_k d_{k-1}, & k\geqslant 2.\end{cases}\tag{3}$$

其中 $g_k=\nabla f(x_k)$，d_k 为搜索方向，t_k 为步长因子，β_k 为参数.关于 β_k 的计算公式有很多，其中较著名的公式有[1~5]：

$$\beta_k^{FR}=\frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2},\beta_k^{PRP}=\frac{g_k^T(g_k-g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2},\beta_k^{HS}=\frac{g_k^T(g_k-g_{k-1})}{(g_k-g_{k-1})^T d_{k-1}},\beta_k^{DY}=\frac{\|g_k\|^2}{(g_k-g_{k-1})^T d_{k-1}}.$$

最近，文献[6]给出了一种新的 Armijo-type 线搜索(ATLS).寻找一个步长 $t_k=\rho^{j_k}$，j_k 是最小的正整数 j，并满足：

$$f(x_k+\rho^j d_k)-f(x_k)\leqslant\alpha\rho^j g_k^T d_k-\frac{m}{2}(\rho^j)^2\|d_k\|^2,\alpha\in(0,1),\rho\in(0,1),m>0,\tag{4}$$

$$g(x_k+\rho^j d_k)^T Q_k(j)\leqslant -c\|g(x_k+\rho^j d_k)\|^2,c\in(0,1).\tag{5}$$

其中，

$$Q_k(j)=-g(x_k+\rho^j d_k)+\beta_{k+1}^{PRP}d_k.\tag{6}$$

并已证明该线搜索下 PRP 方法的全局收敛性.

文献[7]给出了一种新的 β_k^* 计算公式，即

$$\beta_k^*=\frac{g_k^T\left(g_k-\frac{\|g_k\|}{\|g_{k-1}\|}g_{k-1}\right)}{\|g_{k-1}\|^2},\tag{7}$$

并且已证明 $\beta_k^*\geqslant 0$ 以及在精确线搜索、GL 线搜索、WWP 线搜索下的全局收敛性，其数值结果甚至要优于著名的 PRP 方法.本文吸收文献[6,7]的思想，给出一种较弱的线搜索：寻找一个步长 $t_k=\rho^{j_k}\Delta_k$ 满足线搜索条件(4)式和较弱条件，即

$$g_{k+1}^T d_{k+1}<0.\tag{8}$$

收稿日期：2006-11-29

修回日期：2007-02-02

作者简介：洪　玲(1971-)，女，讲师，主要从事最优化理论与方法研究工作。

*广西自然科学基金项目(No. 0542043)资助。

并将此线搜索应用于 β_k^*，得出了一个具有全局收敛的共轭梯度法.

1 算法

定义 $\| d_k \|_{Q_k} = \sqrt{d_k^T Q_k d_k}$ 和 $\Delta_k = \dfrac{|g_k^T d_k|}{\| d_k \|_{Q_k}^2}$，其中 $\{Q_k\}$ 是一个对角阵序列.

在上述基础上，提出如下新的算法 1：

步骤 1：取 $Q_1 \in R^{n\times n}$，初始点 $x_1 \in R^n$，当 $k = 1$ 时，$d_1 = -g_1$. 若 $g_1 = 0$，则停止.

步骤 2：寻找一个 $t_k = \rho^{j_k}\Delta_k > 0$ 满足(4)式和(8)式.

步骤 3：令 $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$，$g_{k+1} = g(x_{k+1})$. 若 $g_{k+1} = 0$，则停止.

步骤 4：利用公式(7)式计算 β_{k+1}^*，利用公式(3)式计算 d_{k+1}.

步骤 5：通过某些方法计算 Q_{k+1}，然后令 $k := k + 1$，转步骤 2.

2 算法的全局收敛性

引理 2.1 对 $\forall k$，假设 $\| g_k \| \neq 0$，则一定存在一个 j_k，使得由上述算法产生的步长 $t_k = \rho^{j_k}\Delta_k$ 满足(4)式和(8)式.

证明 如果 $g_k^T d_k < 0$，先证存在一个 j_0，对 $\forall j \geqslant j_0$，使得公式(4)式成立.

假设结论不成立，则存在一个无穷点列 $\{j_l\}$，使得

$$f(x_k + \rho^{j_l}\Delta_k d_k) - f(x_k) > \alpha\rho^{j_l}\Delta_k g_k^T d_k - \frac{m}{2}(\rho^{j_l}\Delta_k)^2 \| d_k \|^2,$$

由 Taylor's 展开式，有

$$\rho^{j_l}\Delta_k g_k^T d_k + o(\rho^{j_l}\Delta_k) > \alpha\rho^{j_l}\Delta_k g_k^T d_k - \frac{m}{2}(\rho^{j_l}\Delta_k)^2 \| d_k \|^2,$$

两边除以 $\rho^{j_l}\Delta_k$，当 $j_l \to \infty$，得到

$$g_k^T d_k \geqslant \alpha g_k^T d_k.$$

由于 $g_k^T d_k < 0$，得到 $\alpha > 1$. 这与条件 $\alpha \in (0,1)$ 矛盾，所以这种情况成立.

再证明 $\exists\, j_1 \in (j_0, +\infty)$，使得公式(8)式成立.

由 $d_{k+1} = -g(x_k + \rho^j\Delta_k d_k) + \beta_{k+1}^* d_k$，得

$$g(x_k + \rho^j\Delta_k d_k)^T d_{k+1} = g(x_k + \rho^j\Delta_k d_k)^T(-g(x_k + \rho^j\Delta_k d_k) + \beta_{k+1}^* d_k) = -\| g(x_k + \rho^j\Delta_k d_k) \|^2 + \beta_{k+1}^* g(x_k + \rho^j\Delta_k d_k)^T d_k,$$

当 $j \to \infty$，由于 $\| g_k \| \neq 0$ 以及上面的第二项小于等于 0，有

$$g(x_k + \rho^j\Delta_k d_k)^T d_{k+1} < 0.$$

所以这种情况也成立，即引理成立.

我们注意到 $g_1^T d_1 < 0$，由归纳法得出对 $\forall k$，都有 $g_k^T d_k < 0$.

为了建立上述算法的全局收敛性，我们需要假设存在 $\lambda_{\min} > 0$ 和 $\lambda_{\max} > 0$，使得对所有 $d \in R^n$，都有

$$\lambda_{\min} d^T d \leqslant d^T Q_k d \leqslant \lambda_{\max} d^T d. \tag{9}$$

这个条件应该是满足的，比如令 $Q_k = |\delta_k| I$ 和 $|\delta_k| \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$.

和所有共轭梯度方法相同，本文总假设目标函数满足以下假设：

假设 A 水平集 $\Omega = \{x \in R^n \,|\, f(x) \leqslant f(x_1)\}$ 有界；

假设 B 在水平集上梯度 $g(x)$ 是 Lipschitz 连续，即存在常量 $L > 0$，

$$\| g(x) - g(y) \| \leqslant L \| x - y \|, \forall\, x, y \in \Omega. \tag{10}$$

由于 $\{f(x_k)\}$ 是一个下降序列，显然有：上述算法产生的序列 $\{x_k\}$ 包含在 Ω 中；存在一个常数 f^*，使得

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f^*. \tag{11}$$

引理 2.2 若假设 A 成立，则有：

$$\lim_{k\to\infty} t_k \| d_k \| = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{k\to\infty} -t_k g_k^T d_k = 0. \tag{13}$$

该引理的证明与文献[6,8]的证明类似，为了文章的完整性，我们把整个证明过程写出来.

证明 对于(11)式，我们有

$$\sum_{k=1}^{\infty}(f(x_k) - f(x_{k+1})) = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}(f(x_k) - f(x_{k+1})) = \lim_{N\to\infty}(f(x_1) - f(x_{k+1})) = f(x_1) - f^*,$$

因此 $\sum_{k=1}^{\infty}(f(x_k) - f(x_{k+1})) < +\infty$.

上式结果和 $f(x_k + t_k d_k) - f(x_k) \leqslant \alpha t_k g_k^T d_k - \frac{m}{2}t_k^2 \| d_k \|^2$ 联立得

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k^2 \| d_k \|^2 < +\infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} -t_k g_k^T d_k < +\infty.$$

故(12)式和(13)式成立.

引理 2.3 若假设 A 和 B 成立，则存在两个正常数 M_1，M_2，使得 $\forall k$，都有

$$t_k \geqslant M_1 |g_k^T d_k| / \| d_k \|^2 \text{ 或 } t_k \geqslant M_2 \| g_k \|^2 / \| d_k \|^2. \tag{14}$$

证明 分两种情况：$t_k = \Delta_k$ 和 $t_k < \Delta_k$.

情形 1 当 $t_k = \Delta_k$ 时，由于 $t_k \| d_k \|^2 = \Delta_k \| d_k \|^2 \geqslant \dfrac{|g_k^T d_k|}{\lambda_{\max}}$，得

$$t_k \geqslant \frac{|g_k^T d_k|}{\lambda_{\max} \| d_k \|^2}. \quad (15)$$

情形 2 当 $t_k < \Delta_k$,在这种情形中,$\frac{t_k}{\rho}$ 不能同时满足(4)式和(8)式.

情形 2.1 当 t_k/ρ 不满足(4)式,有

$$f(x_k + (t_k/\rho)d_k) - f(x_k) > \alpha(t_k/\rho)g_k^T d_k - \frac{m}{2}(t_k/\rho)^2 \| d_k \|^2,$$

对上面不等式使用中值定理,有 $\theta_k \in (0,1)$,使得

$$g(x_k + \theta_k(t_k/\rho)d_k)^T(t_k/\rho)d_k > \alpha(t_k/\rho)g_k^T d_k - \frac{m}{2}(t_k/\rho)^2 \| d_k \|^2,$$

上面不等式两边除以 t_k/ρ,得

$$g(x_k + \theta_k(t_k/\rho)d_k)^T d_k > \alpha g_k^T d_k - \frac{m}{2}(t_k/\rho) \| d_k \|^2,$$

上式两边减 $g_k^T d_k$,得

$$(g(x_k + \theta_k(t_k/\rho)d_k) - g_k)^T d_k > -(1-\alpha)g_k^T d_k - \frac{m}{2}(t_k/\rho) \| d_k \|^2,$$

由假设 B,有

$$L\theta_k(t_k/\rho) \| d_k \|^2 > -(1-\alpha)g_k^T d_k - \frac{m}{2}(t_k/\rho) \| d_k \|^2,$$

因此

$$t_k > \frac{2(1-\alpha)\rho(-g_k^T d_k)}{2L\theta_k + m \| d_k \|^2}.$$

又利用 $\theta_k \in (0,1)$,有

$$t_k > \frac{2(1-\alpha)\rho}{2L+m} \frac{|g_k^T d_k|}{\| d_k \|^2}. \quad (16)$$

情形 2.2 当 t_k/ρ 不满足(8)式,在这种情形中,有

$$0 \leqslant g(x_k + (t_k/\rho)d_k)^T d_{k+1},$$

由(3)式得

$$0 \leqslant - \| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) \|^2 + [(g(x_k + (t_k/\rho)d_k)^T(g(x_k + (t_k/\rho)d_k) - \frac{\| g_{k+1} \|}{\| g_k \|}g(x_k)))/ \| g_k \|^2]g(x_k + (t_k/\rho)d_k)^T d_k \leqslant - \| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) \|^2 + [(\| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) \|^2 \| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) - \frac{\| g_{k+1} \|}{\| g_k \|}g(x_k) \|)/ \| g_k \|^2] \| d_k \| \leqslant - \| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) \|^2 + \| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) \|^2[(\| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) - g_k + g_k - \frac{\| g_{k+1} \|}{\| g_k \|}g(x_k) \|)/ \| g_k \|^2] \| d_k \| \leqslant - \| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) \|^2 + \| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) \|^2 \frac{\| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) - g_k \| + | \| g_k \| - \| g_{k+1} \| |}{\| g_k \|^2} \cdot \| d_k \|,$$

因此 $0 \leqslant - \| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) \|^2 + \frac{\| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) \|^2}{\| g_k \|^2} 2 \| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) - g(x_k) \| \| d_k \|$.

上式两边除 $\| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) \|^2$,得

$$0 \leqslant -1 + \frac{2 \| g(x_k + (t_k/\rho)d_k) - g(x_k) \| \| d_k \|}{\| g_k \|^2}, \quad (17)$$

利用假设 B,得

$$0 \leqslant -1 + \frac{2L(t_k/\rho) \| d_k \|^2}{\| g_k \|^2},$$

因此,$t_k \geqslant (\rho/2L)(\| g_k \|^2 / \| d_k \|^2)$. (18)

情形 2 证明完毕.

由(15)式,(16)式和(18)式,令 $M_1 = \min\{\frac{1}{\lambda_{\max}}, \frac{2(1-\alpha)\rho}{2L+m}\}$ 和 $M_2 = \frac{\rho}{2L}$.

由情形 1 和情形 2 引理得证.

引理 2.4 若假设 A 和 B 成立,$\exists\ \varepsilon > 0$,使得对 $\forall\ k$,

$$\| g_k \| \geqslant \varepsilon, \quad (19)$$

则存在一个常数 $M_3 > 0$,使得对 $\forall\ k$,有

$$\| d_k \| \leqslant M_3. \quad (20)$$

证明 由 d_k 的定义,有 $\| d_k \| \leqslant \| g_k \| + \| \beta_k^* \| \| d_{k-1} \| \leqslant \| g_k \| + (\| g_k \| \| g_k - \frac{\| g_k \|}{\| g_{k-1} \|} g_{k-1} \| / \| g_{k-1} \|^2) \| d_{k-1} \| \leqslant \| g_k \| + \frac{2 \| g_k \| \| g_k - g_{k-1} \|}{\| g_{k-1} \|^2} \| d_{k-1} \|$,

利用假设 B,得

$$\| d_k \| \leqslant \| g_k \| + \| g_k \| \frac{2Lt_{k-1} \| d_{k-1} \|}{\varepsilon^2} \| d_{k-1} \|, \quad (21)$$

另一方面,由 $\{x_k\}$ 有界和假设 B,能推导出:$\exists\ M_4 > 0$,使得对 $\forall\ k$,有

$$\| g_k \| \leqslant M_4. \quad (22)$$

由(21)式和(22)式得到下面的不等式:

$$\| d_k \| \leqslant M_4 + \frac{2M_4L}{\varepsilon^2}t_{k-1} \| d_{k-1} \|^2 = M_4 + (\frac{2M_4L}{\varepsilon^2}t_{k-1} \| d_{k-1} \|) \| d_{k-1} \|, \quad (23)$$

由引理 2.2 给出的(12)式意味着存在一个常数 $q \in (0,1)$ 和一个整数 k_0,使得 $\forall\ k \geqslant k_0$,有

$$\frac{2M_4L}{\varepsilon^2}t_{k-1} \| d_{k-1} \| \leqslant q,$$

因此 $\forall\ k > k_0$,有 $\| d_k \| \leqslant M_4 + q \| d_{k-1} \| \leqslant$

$M_4(1+q+q^2+\cdots+q^{k-k_0-1})+q^{k-k_0}\|d_{k_0}\| \leqslant \frac{M_4}{1-q}+q^{k-k_0}\|d_{k_0}\| \leqslant \frac{M_4}{1-q}+\|d_{k_0}\|$.

令 $M_3 = \max\{\|d_1\|,\|d_2\|,\cdots,\|d_{k_0}\|, \frac{M_4}{1-q}+\|d_{k_0}\|\}$,推导出对 $\forall k$,(20) 式成立.

由以上引理,推出上述新算法 1 的全局收敛性.

定理 2.1 若假设 A 和 B 成立,$\{x_k\}$ 由上述算法产生,则

$$\liminf_{k\to\infty}\|g_k\| = 0. \tag{24}$$

证明 假设结论不成立,则 $\exists\ \varepsilon>0$,使得对 $\forall k$,(19) 式成立. 由引理 2.4,有 $\|d_k\| \leqslant M_3$. 因此,由等式(12) 式和序列 $\{\|d_k\|\}$ 有界,得出

$$\lim_{k\to\infty} t_k\|d_k\|^2 = 0, \tag{25}$$

由引理 2.3,若 $t_k \geqslant M_1|g_k^Td_k|/\|d_k\|^2$,联立(25) 式得

$$\lim_{k\to\infty}|g_k^Td_k| = 0, \tag{26}$$

另一方面,由(3) 式得

$$g_k^Td_k = -\|g_k\|^2 + \frac{g_k^T(g_k - \frac{\|g_k\|}{\|g_{k-1}\|}g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2}\cdot g_k^Td_{k-1},$$

由假设 B,得

$$\|g_k\|^2 \leqslant |g_k^Td_k| + \frac{\|g_k\|^2 2Lt_k\|d_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2}, \tag{27}$$

又由(19) 式、(22) 式、(25) 式和(26) 式以及对(27) 式取极限,得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|g_k\| = 0$,这与(19) 式矛盾.

若 $t_k \geqslant M_2\|g_k\|^2/\|d_k\|^2$,得 $\|g_k\|^2 \leqslant \frac{t_k\|d_k\|^2}{M_2}$. 结合(25) 式和在上述不等式中当 $k\to\infty$,得到结论与(19) 式矛盾. 因此定理成立.

3 数值试验

在这一部分中,我们对两个共轭梯度法进行数值试验,数值试验中的 10 个函数来自 ftp://ftp.mathworks.com/,使用的数学软件为 MATLAB7.01. 终止条件为 $\|g(x_k)\| \leqslant 10^{-5}$. 表中的相关符号表示如下:

MPRP:试验参数为 β_k^{PRP} + (4) + (5),其中 $\rho = 0.5, \alpha = 0.1, c = 0.05, m = 0.1$;

NCG:试验参数为 β_k^*(7) + (4) + (8).

对于算法 1,我们限制 Q_k 为一个对角阵,比如 $Q_k = |\delta_k|I$,这里 δ_k 由以下公式计算:

$$\delta_k^{(1)} = \frac{y_k^Ts_k}{s_k^Ts_k}, \delta_k^{(2)} = \frac{y_k^Ty_k}{y_k^Ts_k}, \tag{28}$$

其中 $y_k = g(x_{k+1}) - g(x_k), s_k = x_{k+1} - x_k$,在文献[9]中,公式(28) 曾经被用作最速下降法的步长. 另外,为了保证条件(9) 式成立,我们可以通过下面的方法来更新 Q_{k+1},即

$$Q_{k+1} = \begin{cases} |\delta_k|I, & |\delta_k| \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}], \\ Q_k, & \text{其它}. \end{cases} \tag{29}$$

其中 $\rho = 0.5, \alpha = 0.1, m = 0.1, \lambda_{\min} = 10^{-30}, \lambda_{\max} = 10^{30}, Q_1 = I$. 特别地,我们测试以下三个方案:

NCG1:算法 1,其中对所有的 $k > 0, Q_k = I$.

NCG2:算法 1,其中 Q_k 由(29) 式来更新,$\delta_k = \delta_k^{(1)}$.

NCG3:算法 1,其中 Q_k 由(29) 式来更新,$\delta_k = \delta_k^{(2)}$.

表 1 列出了数值结果,其中各列意义为 Problem 表示测试问题的名称,Dim 表示目标函数的维数,— 表示方法对这个数值例子失效,NI/NF/NG 分别表示迭代次数 / 目标函数计算次数 / 目标梯度函数计算次数.

表 1 两个共轭梯度法的数值结果

Table 1 Numerical results for two conjugate gradient methods

Problem	Dim	NI/NF/NG			
		MPRP	NCG1	NCG2	NCG3
Gauss	3	11/20/13	9/26/13	4/8/5	4/8/5
Gulf	3	1/2/2	1/5/2	1/5/2	1/5/2
Penl	2	9/14/11	6/14/8	7/13/9	7/13/9
Vardim	2	6/30/8	10/54/20	5/13/6	5/13/6
	50	13/273/18	20/405/21	24/62/25	24/62/25
Trig	3	127/127/127	60/63/61	24/42/26	61/94/62
	50	309/309/309	132/134/133	94/237/97	136/167/137
	100	271/271/271	137/139/138	78/174/80	145/165/148
Ie	3	11/17/17	15/35/20	8/11/10	8/11/10
	50	13/20/19	15/37/22	8/11/10	8/11/10
	100	13/20/19	15/37/22	9/12/11	9/12/11
	200	14/21/20	15/37/22	9/12/11	9/12/11
	500	16/41/22	15/37/22	9/12/11	9/12/11
Trid	3	24/88/28	35/152/40	21/36/25	28/40/31
	50	45/277/52	41/264/47	43/73/46	44/61/47
	100	39/248/48	36/243/40	36/60/42	60/90/66
Lin	2	13/15/15	1/3/2	1/3/2	1/3/2
	50	15/17/17	1/3/2	1/3/2	1/3/2
	500	16/18/18	1/3/2	1/3/2	1/3/2
	1000	16/18/18	1/3/2	1/3/2	1/3/2
Lin1	2	9/54/10	8/65/9	2/10/3	2/10/3
Lin2	4	9/65/10	21/190/22	2/11/3	2/11/3

由表 1 可以看出,NCG1,NCG2,NCG3 的数值结果都比 MPRP 好,特别地,NCG2,NCG3 的数值结果相当好,说明我们新的共轭梯度法是很有效的.

参考文献：

[1] DAI Y H. Conjugate gradient methods with armijo-type line search [J]. Acta Mathematical Applicate Sinica (English Series), 2002, 18(1): 123-130.

[2] POLAK B T. The conjugate gradient method in extreme problems [J]. USSR Comput Math and Math Phys, 1969, 9: 94-112.

[3] POLAK E, RIBIRE G. Note surla convergence de directions conjugees [J]. Rev Francaise Informat Recherche Operatinelle 3e Annee, 1969, 16: 35-43.

[4] HESTENES M R, STIEFEL E. Method of conjugate gradient for solving linear equations[J]. J Res Nat Bur stand, 1952, 49: 409-436.

[5] DAI Y H, YUAN Y. A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property[J]. SIAM J Optim, 1999, 10: 177-182.

[6] WEI Z X, LI G H, QI L Q. On the global convergence of the polak-ribiere-polyak conjugate gradient method with an armijo-type inexact line search for nonconvex unconstrained optimization problems [M]. Hong Kong: The Hong Kong Polytechnic University, 2002.

[7] WEI Z X, YAO S W, LIU L Y. The convergence properties of some new conjugate gradient methods[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006 (183): 1341-1350.

[8] YU G H, GUAN L T, WEI Z X. A globally convergent polak-ribiere-polyak conjugate gradient method with armijo-type line search [J]. Numerical Mathematics, 2006, 15(4): 357-367.

[9] DAI Y H, YUAN Y X. A nonlinear conjugate gradient method with a strong global convergence property[J]. SIAM Journal on Optimization, 1999, 10(1): 177-182.

（责任编辑：邓大玉）

(上接第 238 页 Continue from page 238)

[6] JIAN J B, TANG C M. An SQP feasible descent algorithm for nonlinear inequality constrained optimization without strict complementarity [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2005, 49 (2～3): 223-238.

[7] JIAN J B, ZHENG H Y, TANG C M, et al. A new superlinearly convergent norm-relaxed method of strong sub-feasible direction for inequality constrained optimization[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 182(2): 955-976.

[8] JIAN J B, ZHENG H Y, HU Q J, et al. A new norm-relaxed method of strongly sub-feasible direction for inequality constrained optimization [J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 168(1): 1-28.

[9] 袁亚湘，孙文瑜. 最优化理论与方法[M]，北京：科学出版社，1997.

（责任编辑：邓大玉）