

# 框架-剪力墙结构分析的高精度平面矩形单元\*

## A High Precision Plane Rectangular Element of Frame-Shear Wall Structure Analysis

李秀梅<sup>1</sup>, 秦 荣<sup>1</sup>, 袁新胜<sup>2</sup>

LI Xiu-mei<sup>1</sup>, QIN Rong<sup>1</sup>, YUAN Xin-sheng<sup>2</sup>

(1. 广西大学土木建筑工程学院, 广西南宁 530004; 2. 广西大学基建处, 广西南宁 530004)

(1. College of Civil and Architecture Engineering, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China; 2. Basic Construction Office of Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

**摘要:**从双线性矩形单元出发,通过广义协调条件和连续介质力学中关于旋转度概念,同时引入含两个内部参数的泡状位移场,推导出含转角自由度的平面矩形单元的形函数及单元刚度矩阵,并进行算例分析.结果表明,把带转角自由度的矩形平面单元用于框架-剪力墙结构分析,在不增加单元自由度的情况下大大改善了单元的性能,单元列式简单,保证收敛,可以自然地解决框架-剪力墙结构的连接问题,还能获得很高的精度,而且能为平板壳结构分析提供有效的膜元.

**关键词:**矩形单元 框架-剪力墙结构 转角自由度 广义协调

**中图法分类号:**TU311.4 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2007)03-0261-04

**Abstract:** The element shape functions containing a plane rectangular element (GR12M) with rotational freedoms and stiffness matrix are developed based on the bilinear conforming displacement fields and the bubble displacement fields with internal parameters, according to the generalized conforming conditions and the rotation degree concepts of continuum mechanics. In the analysis of frame-shear wall, the plane rectangular element (GR12M) with rotational freedoms can greatly improve the performance of elements without increase of freedom degree of elements, with simplicity and convergence. The connection problem of analysis is solved at ease. A high precision membrane element can be offered to flat shell analysis.

**Key words:** rectangle element, frame-shear wall, rotational degree of freedom, generalized conforming

用有限单元法分析框架-剪力墙结构将遇到一维单元和二维单元的连接问题,结点自由度的不协调给计算带来很大的麻烦,采用铰接的方法去处理显然与工程实际情况相差甚远.解决这一问题最直接有效的方法是构造出有旋转自由度的平面单元,而且该旋转自由度要与连续介质力学的定义一致<sup>[1]</sup>.在平面单元中引入旋转自由度,一方面可以在不增加结点的情况下提高单元位移场阶次,改善单元性能;另一方面也

为平板壳元提供有效的膜元,在平板型壳元中采用具有平面内旋转自由度的平面膜元,自然地解决了平板分析中单元面内旋转零刚度、结构整体刚度可能出现的奇异问题,避免了用其它方法处理这个问题所引起的麻烦<sup>[2,3]</sup>.采用有旋转自由度的平面单元,剪力墙和框架单元每个结点都具有相同的自由度,自然地解决了一维单元和二维单元的连接问题,因而框架-剪力墙结构分析的关键是构造高精度的带旋转自由度的平面单元<sup>[1,4]</sup>.

龙驭球等<sup>[2,3]</sup>提出的广义协调元理论综合了协调元和非协调元的优点,又摈弃了二者缺点,在不违反变分原理的前提下,对假定位移场在单元边界上的严格协调要求改为广义协调,大大改善了单元性能.在单元中引入含内部参数的附加位移是改善单元精度

收稿日期:2007-01-17

修回日期:2007-05-14

作者简介:李秀梅(1968-),女,副教授,在读博士研究生,主要从事高层建筑结构的计算方法研究。

\* 国家自然科学基金项目(19872020)和广西 2004 年度科学研究与技术开发计划项目(桂科攻 0442001)资助。

的一种不错的做法,因内部参数可以在单元水平上凝聚,不会增加结构的整体自由度<sup>[3]</sup>.广义协调元在理论和实施上为合理增加内参型附加位移提供了可靠的保证.

本文采用带转角自由度的矩形单元(GR12M)从双线性协调位移场出发,通过平均边广义协调条件并引入含两个内部参数的泡状位移场,建立了单元的附加位移场,推导出单元的形函数和刚度矩阵.并通过算例验证了单元 GR12M 的实用性.

## 1 单元位移模式

平面矩形单元 GR12M 共有 12 个自由度,单元的结点位移向量为

$$\{\delta\}^e = \{\{\delta_1\}^T \ \{\delta_2\}^T \ \{\delta_3\}^T \ \{\delta_4\}^T\}^T, \quad (1)$$

其中每个结点含 3 个位移,如图 1 所示;

$$\{\delta_i\} = \{u_i \ v_i \ \theta_i\}^T (i = 1, 2, 3, 4), \quad (2)$$

(2) 式中  $u_i$  和  $v_i$  是结点线位移,  $\theta_i$  是结点转角位移,仅与图 2 所示的附加位移场有关.

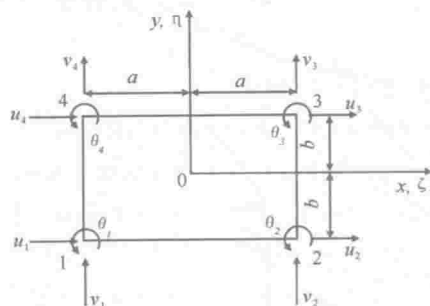


图 1 带转角自由度的矩形单元

Fig.1 Rectangle element with rotational degrees of freedom

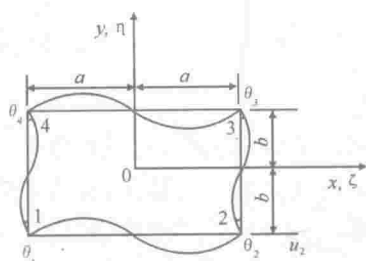


图 2 转角位移相关的附加位移场

Fig.2 Additional displacement field caused by rotational degrees of freedom

设单元的位移场由以下三部分构成

$$\{u\} = \{u^0\} + \{u_\theta\} + \{u_\lambda\}, \quad (3)$$

式中  $\{u^0\}$  是由结点线位移  $u_i, v_i$  表示的双线性协调位移场,  $\{u_\theta\}$  是由结点平面内刚体旋转自由度  $\theta_i$  表示的附加位移场,  $\{u_\lambda\}$  是单元内部参数表示的附加位移场. 本文引入的是泡状位移场, (3) 式可进一步写成

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u^0 + u^\theta + u^\lambda \\ v^0 + v^\theta + v^\lambda \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i^0 \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} +$$

$$\sum_{i=1}^4 \begin{Bmatrix} N_i^\theta \\ N_i^\theta \end{Bmatrix} \theta_i + N_\lambda \begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

其中:

$$N_i^0 = \frac{1}{4} (1 + \zeta_i \zeta) (1 + \eta_i \eta). \quad (5)$$

结点转角自由度  $\theta_i$  引起单元的附加位移场  $\{u^\theta\}$

可设为

$$\begin{Bmatrix} u^\theta \\ v^\theta \end{Bmatrix} = (1 - \zeta^2) \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{Bmatrix} + (1 - \eta^2) \begin{Bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{Bmatrix} + (1 - \zeta^2) \eta \begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} + (1 - \eta^2) \zeta \begin{Bmatrix} \alpha_4 \\ \beta_4 \end{Bmatrix}. \quad (6)$$

(6) 式所表示的位移场在单元四个结点的数值为零,不会产生附加的结点线位移. 由结点转角自由度  $\theta_i$  引起的单元边界的附加位移,在边界切线方向均为 0,在法线方向可根据连续介质力学旋转度的概念用两端结点的转角自由度表示出来. 应用平均边广义协调条件<sup>[2]</sup>

$$\int_{S_k} (\{u^\theta\} - \{\bar{u}^\theta\}) ds = 0, (k = 1, 2, 3, 4), \quad (7)$$

由此可解出(6)式中的待定系数. 然后代入(6)式,整理后得

$$N_{ii}^\theta = \frac{b}{8} (1 - \eta^2) (1 + \zeta_i \zeta) \eta_i, N_{iv}^\theta = -\frac{a}{8} (1 - \zeta^2) (1 + \eta_i \eta) \zeta_i. \quad (8)$$

(4) 式中  $\lambda_1, \lambda_2$  为单元的内部自由度,泡状位移场的形函数为

$$N_\lambda = (1 - \zeta^2) (1 - \eta^2). \quad (9)$$

把(5)式、(8)式、(9)式代入(4)式,可得到 GR12M 单元的位移场为

$$\{u\} = [N] \{\delta\}^e + [N_\lambda] \{\lambda\}, \quad (10)$$

$$N_i = \begin{bmatrix} N_i^0 & 0 & N_{ii}^\theta \\ 0 & N_i^0 & N_{iv}^\theta \end{bmatrix}, [N_\lambda] = \begin{bmatrix} N_\lambda & 0 \\ 0 & N_\lambda \end{bmatrix}. \quad (11)$$

## 2 单元刚度矩阵、等效结点力及单元应力

GR12M 单元的应变场可表示为

$$\{\epsilon\} = [B] \{\delta\}^e + [B_\lambda] \{\lambda\}, \quad (12)$$

式中  $[B], [B_\lambda]$  分别为与(11)式对应的应变矩阵. 单元的应变能可以写成

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \epsilon^T D \epsilon dA = \frac{1}{2} \{\delta\}^{eT} [K_{qq}] \{\delta\}^e + \\ &\frac{1}{2} \{\lambda\}^T [K_{\lambda q}] \{\delta\}^e + \frac{1}{2} \{\lambda\}^T [K_{\lambda\lambda}] \{\lambda\}, \end{aligned} \quad (13)$$

式中:

$$\begin{aligned} [K_{qq}] &= abh \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B^T D B d\zeta d\eta, [K_{\lambda q}] = \\ &abh \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_\lambda^T D B d\zeta d\eta, \end{aligned} \quad (14)$$

$$[K_{\lambda\lambda}] = abh \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_{\lambda}^T D B_{\lambda} d\zeta d\eta. \quad (15)$$

由驻值条件:  $\frac{\partial \Pi}{\partial \lambda} = 0$ , 可求出单元的内部自由度, 用单元的结点位移表示为

$$\{\lambda\} = -[K_{\lambda\lambda}]^{-1}[K_{\lambda q}]\{\delta\}^e, \quad (16)$$

这样也就凝聚掉单元的内部自由度, 把(16)式代入(10)式, 则单元的位移场可写成

$$\{u\} = [N^*]\{\delta\}^e, \quad (17)$$

其中形函数

$$[N^*] = [N] - [N_{\lambda}][K_{\lambda\lambda}]^{-1}[K_{\lambda q}]. \quad (18)$$

根据(17)式, 按双线性矩形单元的推导方法, 可得到该矩形单元的刚度矩阵

$$[K]^e = [K_{qq}] - [K_{\lambda q}]^T [K_{\lambda\lambda}]^{-1} [K_{\lambda q}]. \quad (19)$$

单元刚度矩阵中的元素具体值如下:

$$K_{rs} = \frac{5Ehab}{144(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}, (r, s = 1, 2, 3, 4), \quad (20)$$

其中,  $k_{11} = \frac{12b}{5a^2}\zeta_r\zeta_s(3 + \eta_r\eta_s) + \frac{6(1-\mu)}{5b^2}\eta_r\eta_s(3 + \zeta_r\zeta_s) - q(1 + \mu)^2\zeta_r\zeta_s\eta_r\eta_s$ ,  $k_{12} = \frac{18}{5ab}(2\mu\zeta_r\eta_s + (1 - \mu)\eta_r\zeta_s)$ ,  $k_{13} = \frac{12b}{5a^2}\zeta_r\zeta_s\eta_r - \frac{6}{5b}\zeta_r\zeta_s(2\mu\eta_r - (1 - \mu)\eta_r) - p(1 + \mu)^2\zeta_r\zeta_s\eta_r$ ,  $k_{21} = \frac{18}{5ab}(2\mu\eta_r\zeta_s + (1 - \mu)\zeta_r\eta_s)$ ,  $k_{22} = \frac{12}{5b^2}\eta_r\eta_s(3 + \zeta_r\zeta_s) + \frac{6(1-\mu)}{5a^2}\zeta_r\zeta_s(3 + \eta_r\eta_s) - p(1 + \mu)^2\zeta_r\zeta_s\eta_r\eta_s$ ,  $k_{23} = \frac{12a}{5b^2}\eta_r\eta_s\zeta_s + \frac{6}{5a}\eta_r\eta_s(2\mu\zeta_s - (1 - \mu)\zeta_s) + pa(1 - \mu^2)\zeta_r\eta_r\eta_s$ ,  $k_{31} = \frac{12b}{5a^2}\zeta_r\zeta_s\eta_r - \frac{6}{5b}\zeta_r\zeta_s(2\mu\eta_r - (1 - \mu)\eta_r) - qb(1 - \mu^2)\zeta_r\zeta_s\eta_s$ ,  $k_{32} = \frac{12a}{5b^2}\zeta_r\eta_r\eta_s + \frac{6}{5a}\eta_r\eta_s(2\mu\zeta_r - (1 - \mu)\zeta_r) + pa(1 - \mu^2)\zeta_r\eta_r\eta_s$ ,  $k_{33} = \frac{24}{25}(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} - \frac{5\mu}{3})\zeta_r\zeta_s\eta_r\eta_s + \frac{6}{5}(1 - \mu)(\zeta_r\zeta_s + \eta_r\eta_s) - pa^2(1 - \mu^2)\eta_r\eta_s - qb(1 - \mu^2)\zeta_r\zeta_s$ , 其中:  $p = 1/(2b^2 + (1 - \mu)a^2)$ ,  $q = 1/(2a^2 + (1 - \mu)b^2)$ ,  $h$  为单元厚度,  $\mu$  为波松比.

单元的等效结点力可写成

$$\{F\}^e = \iint_{A^e} [N^*]^T \{p\} dA + \int_{\partial A^e} [N^*]^T \{\bar{p}\} ds, \quad (21)$$

式中  $\{p\}$ 、 $\{\bar{p}\}$  分别是作用在单元域内  $A^e$  和单元边界上  $\partial A^e$  的分布荷载, 把(18)式代入上式积分得单元的等效结点荷载向量.

求出单元结点位移后, 单元的应力可按式计算

$$\{\sigma\} = [D]([B] - [B_{\lambda}][K_{\lambda\lambda}]^{-1}[K_{\lambda q}])\{\delta\}^e. \quad (22)$$

### 3 算例分析

**例 1** 图 3 所示悬臂梁受端部剪切荷载. 弹性模量  $E = 30000$ ,  $\mu = 0.25$ ,  $h = 1.0$ , 在三种有限元网格下, 梁端中点 C 的挠度及 A 点应力的数值计算结果列于表 1 中. 表 1 中 Plane42 单元为用 ANSYS 四结点平面等参元计算的结果.

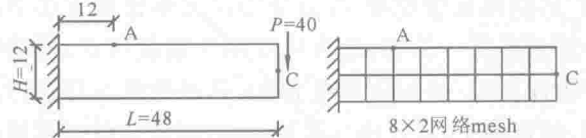


图 3 端部受剪切荷载的悬臂梁及有限元网格

Fig. 3 Cantilever subjected to shear load and finite element mesh

表 1 悬臂梁端部挠度和给定点应力

Table 1 The end deflection and stress of point A

单元类型 Element type	网格 4×1 4×1 mesh		网格 8×2 8×2 mesh		网格 16×4 16×4 mesh	
	$v_C$	$\sigma_{xA}$	$v_C$	$\sigma_{xA}$	$v_C$	$\sigma_{xA}$
Plane42 单元 Plane42 element	0.2624	-60.0	0.2636	-60.07	0.2661	-60.03
矩形膜元 Rectangle element <sup>[4]</sup>	0.3333	-73.81	0.3520	-65.69	0.3544	-63.24
GR12M 单元 GR12M element	0.3446	-60.0	0.3530	-62.0	0.3554	-60.76
精确解 Exact solution	$v_C = 0.3558$		$\sigma_{xA} = -60$			

表 1 结果说明, 在同离散条件下, 本文 GR12M 单元比 Plane42 及文献[4]的矩形膜元具有更高的位移计算精度, 随着网格的细分逐渐收敛于精确解. 应力的计算精度也能令人满意.

**例 2** 图 4 所示的平面框架-剪力墙结构受水平均布荷载  $q = 100\text{kN/m}$  的作用. 参数  $E = 2 \times 10^{11}\text{Pa}$ ,  $\mu = 1/6$ , 剪力墙厚  $h = 0.25\text{m}$ , 梁截面尺寸  $250\text{mm} \times 700\text{mm}$ , 1~4 层柱截面尺寸  $H = 500\text{mm} \times 500\text{mm}$ , 5~8 层柱截面尺寸  $H = 400\text{mm} \times 400\text{mm}$ .

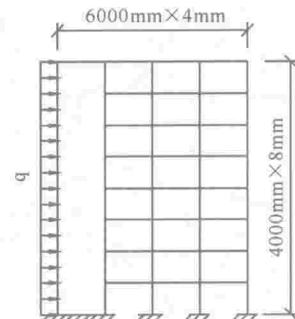


图 4 框架-剪力墙结构受侧向均布荷载

Fig. 4 Frame-shear wall subjected to uniform load

采用 GR12M 单元网格将剪力墙划分成 8 个平面单元, 框架的梁、柱每根各为一个单元. 有限单元法 (本文单元及文献[1]单元) 及文献[5]近似算法计算出剪力墙水平位移沿高度的变化曲线如图 5 所示. 从图 5 可以看出, GR12M 单元的计算精度要优于文献[1]和文献[5]. 文献[1]单元的扭转自由度视为角结点处的刚性转角, 用单元边界位移线性假定消去中间结点位移, 由 12 结点 24 自由度的平面单元退化为 4 结点 12 自由度, 单元过刚因而计算结果偏小些. 文献[5]的结果是按框架-剪力墙协同工作计算方法中的手算近似法计算的, 该方法按刚性楼板假定, 忽略梁柱轴向变形, 采用连续化方法, 通过微分方程求得侧移, 结果偏小, 随着结构高度的增加, 该法的计算误差逐渐增大.

为了说明结果的收敛性, 对例 2 结构采用 1m 的网格细化的计算结果如图 6 所示. Shell63 壳单元每个结点 6 个自由度, 考虑剪力墙的弯曲效应, 计算结果更加合理. 本文 GR12M 单元只考虑剪力墙的平面变形, 每个结点 3 个自由度, 结构的未知量减少一半, 计算结果与 ANSYS 壳单元 Shell63 的计算结果非常接近, 计算误差为 2.7%, 说明 GR12M 单元收敛于壳单元的结果, 而且具有很高的精度.

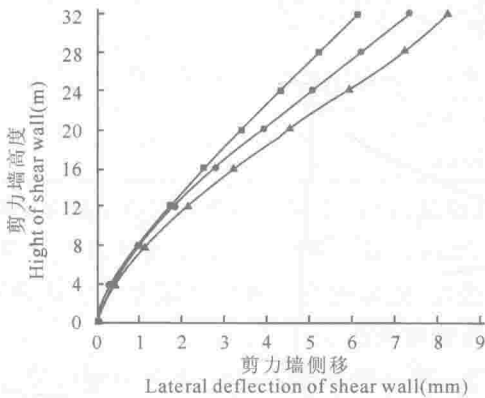


图 5 剪力墙侧移

Fig. 5 Lateral deflection of shear wall  
 ●: GR12M 单元; ■: R12 单元<sup>[1]</sup>; ▲: 近似法<sup>[5]</sup>  
 ●: GR12M element; ■: R12 element<sup>[1]</sup>; ▲: Approximation method<sup>[5]</sup>

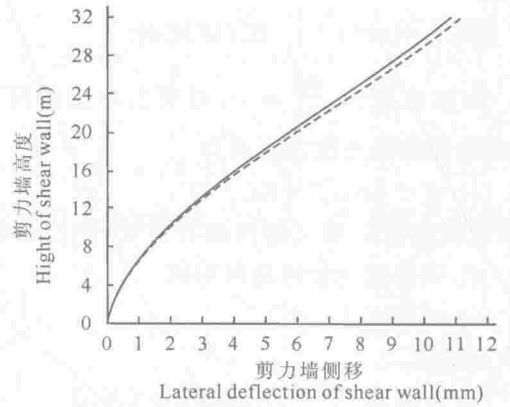


图 6 采用 1m 网格计算的剪力墙侧移

Fig. 6 Lateral deflection of shear wall with 1m mesh  
 —: GR12M 单元计算结果; ----: ANSYS(shell 63)单元计算结果  
 —: By this paper element (1m mesh); ----: By ANSYS element (shell 63)

#### 4 结论

本文所采用的带转角自由度的矩形平面单元 GR12M, 在不增加单元自由度的情况下大大改善了单元的性能, 而且单元列式简单, 保证收敛, 算例表明该单元是一种高精度的实用单元, 可以自然地解决框架-剪力墙结构分析中的单元连接问题, 也为平板壳结构的分析提供有效的膜元.

#### 参考文献:

- [1] 冯仲齐, 梅占馨. 框架-剪力墙结构分析的高精度平面单元[J]. 应用力学学报, 1998, 15(2): 105-110.
- [2] 龙驭球, 龙志飞, 岑松. 新型有限元论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 61-82, 253-302.
- [3] 须寅, 龙驭球, 龙志飞, 等. 引入泡状位移含旋转自由度的广义协调三角形膜[J]. 工程力学, 2000, 17(3): 1-9.
- [4] 夏桂云, 曾庆元, 李传习. 用有限条带构造带旋转自由度的矩形膜元[J]. 长沙交通学院学报, 2005, 21(1): 16-20.
- [5] 包世华, 方鄂华. 高层建筑结构设计[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 1990: 243-291.

(责任编辑: 韦廷宗)