

计算经典 Ramsey 数 $R(3, q)$ 下界的新方法*

New Method for Computing Lower Bounds for Classical Ramsey Numbers $R(3, q)$

罗海鹏¹, 许晓东¹, 苏文龙², 吴康³

LUO Hai-peng¹, XU Xiao-dong¹, SU Wen-long², WU Kang³

(1. 广西科学院, 广西南宁 530007; 2. 梧州学院, 广西梧州 543002; 3. 华南师范大学, 广东广州 510631)

(1. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China; 2. Wuzhou University, Wuzhou, Guangxi, 543002, China; 3. South China Normal University, Guangzhou, Guangdong, 510631, China)

摘要: 发现计算经典 Ramsey 数 $R(3, q)$ 下界的一种新方法——自同构循环图的方法, 并得到 6 个经典 Ramsey 数的新下界: $R(3, 35) \geq 226, R(3, 37) \geq 241, R(3, 38) \geq 246, R(3, 40) \geq 261, R(3, 43) \geq 281, R(3, 44) \geq 293$.

关键词: Ramsey 数 下界 自同构 循环图

中图分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2007)04-0334-05

Abstract: By using a newly found method for computing lower bounds for classical Ramsey numbers $R(3, q)$ — automorphism cyclic graph method, we get new lower bounds for six classical Ramsey numbers: $R(3, 35) \geq 226, R(3, 37) \geq 241, R(3, 38) \geq 246, R(3, 40) \geq 261, R(3, 43) \geq 281$ and $R(3, 44) \geq 293$.

Key words: Ramsey number, lower bound, automorphism, cyclic graph

1 Ramsey 数 $R(3, q)$ 的已知结果和本文的新下界

经典 Ramsey 数的计算是组合数学中非常困难的问题. 1955 年, R. E. Greenwood 与 A. M. Gleason^[1] 在确定 Ramsey 数 $R(3, 3) = 6, R(3, 4) = 9, R(3, 5) = 14, R(4, 4) = 18, R(3, 3, 3) = 17$ 的时候, 首先用循环图计算它们的下界, 再用递推不等式证明其上界, 从而得到历史上第一批 Ramsey 数的准确值. 后世的学者沿用这种方法, 得到一些新的成果. 动态综述论文^[2] 记录了迄今已知的一些 Ramsey 数的准确值或上下界.

我们在文献^[3~11] 中利用素数阶循环图研究经典 Ramsey 数的下界. 本文借鉴这些论文的经验, 发

现了前人尚未使用过的新方法——自同构循环图的方法, 得到一些新的成果.

定理 1 $R(3, 35) \geq 226, R(3, 37) \geq 241, R(3, 38) \geq 246, R(3, 40) \geq 261, R(3, 43) \geq 281, R(3, 44) \geq 293$.

2 自同构循环图的基本性质

给定整数 $n \geq 8$, 令 $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. 对于整数 $s < t$, 记 $[s, t] = \{s, s+1, \dots, t\}$, 约定, 当 n 是奇数时 $Z_n = [-m, m]$, 当 n 是偶数时 $Z_n = [1-m, m]$.

以下除非特别说明, 所有模 n 整数的运算结果都理解为模 n 后属于 Z_n , 并用通常的等号“=”表示“模 n 相等”.

定义 1 对于集合 $S = [1, m]$ 的一个 2 部分拆 $S = S_1 \cup S_2$, 记 $A_i = \{x \mid x \in S_i\}$, 设 n 阶完全图 K_n 的顶点集 $V = Z_n$, 边集 E 是 Z_n 的所有 2 元子集的集且有分拆 $E = E_1 \cup E_2$, 其中

$$E_i = \{\{x, y\} \mid \{x, y\} \in E \text{ 且 } x - y \in A_i\}, i = 1, 2.$$

收稿日期: 2007-08-13

作者简介: 罗海鹏(1947-), 男, 研究员, 主要从事组合数学与算法研究工作.

* 国家自然科学基金项目(批准号: 60563008), 广东省自然科学基金项目(05005928), 广西自然科学基金项目(桂科字 0640037), 梧州学院科研基金项目资助.

把 E_i 中的边叫做 A_i 色边, 记 K_n 中 A_i 色边导出的子图为 $G_n(A_i)$, 其团数记为 $[G_n(A_i)]$, 这里 $i = 1, 2$. 于是我们按照参数集合 A_1 或 A_2 (即 S_1 或 S_2) 把 K_n 的边 2-染色, 得到素数阶循环图 $G_n(A_i)$. 称 $G_n(A_i)$ 是由参数集 S_i 生成的.

根据 Ramsey 定理, 显然有

引理 1 设 $G_n(A_i)$ 的团数为 $k_i, i = 1, 2$, 则 $R(k_1 + 1, k_2 + 1) \geq n + 1$.

引理 2 设 $k \in Z_n$ 且 $(k, n) = 1$, 则 Z_n 到自身的变换 $f: x \mapsto kx$ 是 $G_n(A_i)$ 的同构变换.

证明 对于任意 $x, y \in Z_n$, 注意到 $(k, n) = 1$ 便有

$$x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow kx \equiv ky \pmod{n},$$

$$x - y \in A_i \Leftrightarrow f(x) - f(y) = kx - ky \in A_i^*.$$

因此 f 是顶点集 V 的 1-1 变换, 并且 f 把 A_i 色边变换成 A_i^* 色边. 这里 $A_i^* = \{kx | x \in A_i\}$. 因此 f 把循环图 $G_n(A_i)$ 变换成另一个循环图 $G_n(A_i^*)$, 此时参数集 S_i 变换成 S_i^* , 这里 $S_i^* = \{|kx| | x \in S_i\}$.

注意到变换 f 使循环图 $G_n(A_i^*) = G_n(A_i)$ 的特殊情形, 我们有

定义 2 对于参数集 S_i , 如果存在 $k \in Z_n$ 且 $(k, n) = 1$ 使 $kA_i = A_i$, 那么就把 Z_n 到自身的变换 $f: x \mapsto kx$ 称为 $G_n(A_i)$ 的同构变换, $G_n(A_i)$ 称为自同构循环图, k 称为自同构循环图 $G_n(A_i)$ 的特别元, 简称为 n 的特别元. S_i 称为图 $G_n(A_i)$ 的同构参数集, k 也称为 S_i 或 A_i 的特别元.

令 $k = \pm 1$, 则对于任意参数集 S_i 作成的循环图 $G_n(A_i)$, 都有 $kA_i = A_i$, 因此 $G_n(A_i)$ 是自同构循环图, 称这样的自同构循环图为平凡的, 称 $k = \pm 1$ 为平凡的特别元. 注意到特别元 k 与 $-k$ 对于定义式 $kA_i = A_i$ 是等效的, 因此约定, 以下所说的自同构循环图都是非平凡的, 并且 n 的非平凡的特别元 $k \in [2, m]$.

设 $|ka| \neq a$, 则由引理 2 得 $a \in A_i \Leftrightarrow ka \in A_i \Leftrightarrow k^2a \in A_i \Leftrightarrow k^3a \in A_i \Leftrightarrow k^4a \in A_i \Leftrightarrow \dots$, 它们都是 A_i 的元. 注意到 A_i 是有限集, 因此存在最小的正整数 s 使 $k^s a = a$, 即得 A_i 的 s 阶子集 $a(k) = \{a, ka, \dots, k^{s-1}a\}$, 这有点类似于素数阶循环图中 a 与循环群 $\langle k \rangle$ 的一个陪集. 称 k 为 n 的 s 阶特别元. 一个特殊的情形是 $a(k) \subseteq \{a, -a\}$, 即 $ka = a$ 或 $ka = -a$, 此时就称 a 是 f 的不变元, 简称不变元. 根据上述讨论, 容易得到

引理 3 S_i 是自同构参数集 \Leftrightarrow 存在 s 阶特别元 k , 使得对于任意 $a \in S_i$, 都有 $a(k) = \{a, ka, \dots, k^{s-1}a\} \subset A_i$.

引理 4 a 是不变元 $\Leftrightarrow a \equiv 0 \pmod{\frac{n}{(n, k-1)}}$ 或

$$a \equiv 0 \pmod{\frac{n}{(n, k+1)}}.$$

3 自同构参数集的制作方法

给定整数 $n \geq 8$, 设整数 $k \in [2, m], s \geq 2$ 满足条件

$$(k, n) = 1 \text{ 并且 } k^s \equiv 1 \pmod{n}. \quad (1)$$

记

$$a^*(k) = \{|k^{j-1}a| | 1 \leq j \leq s\}. \quad (2)$$

由上述讨论容易证明

引理 5 S_i 是以 k 为 s 阶特别元的自同构参数集的充要条件是

$$S_i = \{\text{若干个 } a^*(k)\} \cup \{\text{若干个不变元}\}.$$

引理 5 提供了制作自同构参数集的方法, 其中特别元 k 具有关键性的作用. 以下对于某些特定类型的 n , 给出其特别元的一些计算方法.

例 1 设 $n = 4h, s = 2$. 则 $k = 2h - 1$ 满足 (1) 式, 于是 $k = 2h - 1$ 可作为 n 的一个 2 阶特别元. 易知当 a 为奇数时 $a^*(k) = \{a, 2h - a\}$. 当 a 为偶数时 $a^*(k) = \{a\}$. 因此根据引理 5 易知参数集 S_i 由若干个奇数对 $\{a, 2h - a\}$ 与若干个偶数构成.

例 2 设 $n = 9h, s = 3$. 则 $k = 3h - 1$ 满足 (1) 式, 于是 $k = 3h - 1$ 可作为 n 的一个 3 阶特别元. 易知当 $a \equiv 0 \pmod{3}$ 时 $a^*(k) = \{a\}$. 因此根据引理 5 易知参数集 S_i 由若干个三元数组 $\{1, |ka|, |k^2a|\}$ 与若干个 $3t$ 型整数构成.

例 3 设 $n = bc, (b, c) = 1$ 且 $b | (c + 2)$. 令 $k = c + 1$, 则当 $(n, k) = 1$ 时 k 可作为 n 的一个 2 阶特别元. 易知当 $a \equiv 0 \pmod{b}$ 时 $a^*(k) = \{a\}$. 因此根据引理 5 易知参数集 S_i 由若干个二元数对 $\{1, |ka|\}$ 与若干个 bt 型整数构成.

上述各例都很容易得到自同构参数集 S_i .

例 4 设 p 是奇素数, 则当 $n = 2p + 1$ 也是素数时, 据 Fermat 小定理, 对于任意 $k \in [2, p]$ 都有 $k^{2p} \equiv 1 \pmod{n}$, 由此易知特别元 k 是 p 阶的, 并且 $a(k) = [1, m] = S$. 据定义 1 与引理 5 易知定义 2 所说的自同构循环图不存在.

综上所述, 当 n 不是素数时往往都很容易找到参数集构造自同构循环图, 但有些素数 p 的自同构循环图不存在. 可见一般阶的自同构循环图与素数阶循环图各有所长.

4 自同构循环图 $G_n(A_i)$ 团数的计算

在构造了自同构循环图 $G_n(A_i)$ 之后, 计算其团数便是重要的一环.

定义3 在 $G_n(A_i)$ 中, 如果存在自同构变换 f 使 $f(a) = b$, 就称 a 与 b 等价. 与 a 等价的元做成一个等价类, 记为 $\langle a \rangle$, 称 a 为 $\langle a \rangle$ 的代表元.

按等价关系可以把 A_i 分拆成若干个等价类. 注意到 $A_i = \{x \mid |x| \in S_i\}$, 由定义2与定义3容易得到

引理6 设 k 是 s 阶特别元, 则对于 $a \in A_i$, 一般地有 $2s$ 阶等价类

$$\langle a \rangle = \{a, -a, ka, -ka, \dots, k^{s-1}a, -k^{s-1}a\}.$$

除非其中有若干个元相等, $\langle a \rangle$ 才会退化为低于 $2s$ 阶的等价类. 特别地, 当 a 是不变元时, 如果 $a \neq -a$ 则 $\langle a \rangle = \{a, -a\}$, 否则 $\langle a \rangle = \{a\}$.

注意到图 $G_n(A_i)$ 是顶点可迁的, 由此易知 $G_n(A_i)$ 的团数等于 $G_n(A_i)$ 中含顶点0的团的最大阶. 因此只须考察含顶点0的团. 根据定义1知这样的团的其他非零顶点是集合 A_i 的元. 故有

引理7 记图 $G_n(A_i)$ 中顶点集为 A_i 的导出子图为 $G_n[A_i]$, 其团数为 $[A_i]$, 则有 $[G_n(A_i)] = [A_i] + 1$.

于是求 $G_n(A_i)$ 的团数就转化为求 $G_n[A_i]$ 的团数. 为了求得 $[A_i]$, 引进 A_i 的一个全序.

定义4 设 $x \in S_i$, 记

$$d_i(x) = |\{y \in A_i : x - y \in A_i\}|.$$

在 A_i 上的序 $<$ 规定如下:

(1) A_i 中的子集 $\langle a \rangle = \{a, -a, ka, -ka, \dots, k^{s-1}a, -k^{s-1}a\}$ 对于序 $<$ 构成区间, 并且 $a < -a < ka < -ka < \dots < k^{s-1}a < -k^{s-1}a$.

(2) 对于 A_i 中分属不同子集的元 $x \in \langle a \rangle = \{a, -a, ka, -ka, \dots, k^{s-1}a, -k^{s-1}a\}$ 和 $y \in \langle b \rangle = \{b, -b, kb, -kb, \dots, k^{s-1}b, -k^{s-1}b\}$, 规定 $x < y$ 当且仅当 $d_i(a) < d_i(b)$, 或者当 $d_i(a) = d_i(b)$ 时 $a < b$.

注意到, A_i 的子集 $\{a, -a, ka, -ka, \dots, k^{s-1}a, -k^{s-1}a\}$ 中至少有一个元属于 S_i ; 并且

$$y \in A_i, y - a \in A_i \Leftrightarrow -y \in A_i, -y + a \in A_i.$$

故有 $d_i(a) = d_i(-a)$, 由此易知序是明确定义的, 并且 $(A_i, <)$ 是全序集. $x < y$ 称为 x 前于 y 或 y 后于 x .

引理8 记全序集 $(A_i, <)$ 中所有等价类的代表元的集合为 M . 如果对于任意 $x \in M$, 恒有 $d_i(x) = 0$, 那么 $[A_i] = 1$.

证明 否则, 设对于任意 $x \in M$, 恒有 $d_i(x) = 0$, 且有 $[A_i] \geq 2$, 则 $[G_n(A_i)] \geq 3$, 在图 $G_n(A_i)$ 中有3阶团 $\{0, x, y\}$, 其中 $x, y \in A_i$ 且 $x - y \in A_i$.

有如下情形.

如果 x 或 $y \in M$, 就有 $d_i(x) \geq 1$ 或 $d_i(y) \geq 1$, 与已知条件矛盾.

如果 $-x$ 与 $-y \in M$, 则由引理2知 $\{0, -x,$

$-y\}$ 也是图 $G_n(A_i)$ 的3阶团, 就有 $d_i(-x) \geq 1$, 与已知条件矛盾.

定义5 在全序集 $(A_i, <)$ 上的长为 $t (t \geq 1)$ 的链 $x_0 < x_1 < \dots < x_t$ 称为起点为 x_0 的长为 t 的 A_i 色的链, 如果对于 $0 \leq h < j \leq t$ 有 $x_h - x_j \in A_i$. 起点是 x_0 的链的最大长记为 $\iota_i(x_0)$. 如果起点是 x_0 的长为 $t \geq 1$ 的链不存在, 就令 $\iota_i(x_0) = 0$.

引理9 $[A_i] = 1 + \max\{\iota_i(a) : a \in M\}$.

证明 设 $[A_i] = 1$, 即对于任意 $a \in M$ 与 $y \in A_i$, 恒有 $y - a \notin A_i$, 根据定义5有 $\iota_i(a) = 0$. 此时就有 $\max\{\iota_i(a) : a \in M\} = 0$, 引理9成立.

以下考察 $[A_i] = 1 + t (t \geq 1)$ 的情形.

据定义4可知链 $x_0 < x_1 < \dots < x_t$ 的 $t + 1$ 个元构成 $G_n[A_i]$ 的一个团, 即得 $[A_i] \geq 1 + \max\{\iota_i(a) : a \in S_i\}$. 以下再证 $[A_i] \leq 1 + \max\{\iota_i(a) : a \in M\}$.

设 $[A_i] = 1 + t \geq 2$. 则 $G_n[A_i]$ 中有 $t + 1$ 个顶点按 $<$ 排序后得 $(A_i, <)$ 上的长为 t 的链, 再在 $(A_i, <)$ 上所有长为 t 的链中取起点按 $<$ 来说最前面的一条, 记为 $x_0 < x_1 < \dots < x_t$, 我们断言一定有 $x_0 \in M$.

假若不然, 即 x_0 所在的等价类中有另一个元为代表元, 不妨设 $kx_0 \in M$. 作 Z_n 到自身的变换 $f: x \mapsto kx$, 由引理2知这是 $G_n(S_i)$ 的同构变换, 从而也是 $G_n[A_i]$ 的同构变换, 它把 $G_n[A_i]$ 中 $t + 1$ 个顶点的团 $\{x_0, x_1, \dots, x_t\}$ 变成另一个团 $\{kx_0, kx_1, \dots, kx_t\}$. 根据定义6可知, 这 $t + 1$ 个元 kx_0, kx_1, \dots, kx_t 在 $(A_i, <)$ 上构成长为 t 的链. 由定义5所规定的全序集 $(A_i, <)$ 的排序方式可知这条链可表示为 $kx_0 < kx_1 < \dots < kx_t$, 其起点 $kx_0 < x_0$. 因此原来给定的链 $x_0 < x_1 < \dots < x_t$ 不是“起点按 $<$ 来说最前”的一条, 矛盾. 于是断言 $x_0 \in M$ 为真. 从而有 $[A_i] \leq 1 + \max\{\iota_i(a) : a \in M\}$. 引理9得证.

引理9表明, 为了计算 $G_n[A_i]$ 的团数, 只须寻求以 $a \in M$ 为起点的链就可以了. 注意到大多数等价类都是 $2s$ 元子集, 根据引理9, 不必计算非代表元为起点的链, 因此工作量可减少为原来的 $2s$ 分之一.

此外, 根据定义4的 $(A_i, <)$ 的排序方式是“按顶点的度数小者优先”的原则, 这样又能够把运算效率提高若干倍. 综合起来, 就会使下述方法在计算团数时, 其运算效率可以提高数十倍.

5 用自同构循环图计算 Ramsey 数下界的计算方法

根据上述理论, 我们有

算法1 用自同构循环图计算 Ramsey 数下界的计算方法.

步骤1: 给定整数 $n \geq 8$, 特别元 k , 以及集合 $S = [1, m]$ 的一个2部分拆 $S = S_1 \cup S_2$, 其中 $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, S_1 与 S_2 是自同构参数集. 令 $i = 1$.

步骤2: 作集合 $A_i = \{x: |x| \in S_i\}$, 令 $[A_i] = 1$.

步骤3: 根据引理6把 A_i 分拆成若干个等价类.

步骤4: 对于任意 $a \in M$, 计算 $d_i(a) = |\{y \in A_i: a - y \in A_i\}|$. 如果对于任意 $a \in M$, 恒有 $d_i(a) = 0$, 转到步骤8.

步骤5: 按定义4作全序集 $(A_i, <)$, 其中所有等价类的代表元的集合记为 M . 设 $h = |S_i|$. 令 $j = 1$.

步骤6: 计算以 $x_j \in M$ 为起点的 A_i 色的链. 如果 $\iota(x_j) \geq [A_i]$, 令 $[A_i] = \iota(x_j) + 1$, 并打印这条 A_i 色的链.

步骤7: 令 $j = j + 1$, 如果 $j < h$, 转到步骤6.

步骤8: 令 $k_i = [A_i] + 1, i = i + 1$. 如果 $i = 2$, 转到步骤2.

步骤9: 打印 $R(k_1 + 1, k_2 + 1) \geq n + 1$.

步骤10: 运算结束.

在算法1中, 步骤6与步骤7实际上是用回溯法计算最长的 A_i 色的链, 其中最后打印出来的, 就是按序 $<$ 排列在最前面的(第一条)长度为 $\iota(x_j) = [A_i] - 1$ 的 A_i 色的链.

例5 令 $n = 35, k = 11$. 注意到 $k^3 \equiv 1 \pmod{n}$, 故11是35的3阶特别元. 令 $S_1 = (11) \cup \{7\} = \{1, 7, 11, 16\}$, 根据引理5知 S_1 是自同构参数集, $G_{35}(A_1)$ 是自同构循环图.

容易证明 $G_{35}(A_1)$ 的团数 $[G_{35}(A_1)] = 2$.

为了计算 $G_{35}(A_2)$ 的团数, 根据引理6把 A_2 分拆成下述5个等价类:

$$\langle 2 \rangle = \{2, -2, -13, 13, -3, 3\},$$

$$\langle 4 \rangle = \{4, -4, 9, -9, -6, 6\},$$

$$\langle 5 \rangle = \{5, -5, -15, 15, 10, -10\},$$

$$\langle 14 \rangle = \{14, -14\},$$

$$\langle 8 \rangle = \{8, -8, -17, 17, -12, 12\}.$$

按定义4作全序集 $(A_2, <)$, 得所有等价类的代表元的集合为 $M = \{2, 4, 5, 8, 14\}$. 计算以 $x \in M$ 为起点的 A_2 色的链, 得到第一条长为6的 A_2 色链

$$2 < -2 < 4 < -4 < -6 < 6 < 8.$$

此后没有更长的 A_2 色链, 根据引理9有 $[A_2] = 1 + \max\{\iota(a): a \in M\} = 7$. 根据引理9有 $[G_{35}(A_2)] = [A_2] + 1 = 8$. 根据引理1有 $R(3, 9) \geq 36$.

根据文献[2]知 $R(3, 9) = 36$, 因此上述结论给出的是 $R(3, 9)$ 的下确界.

例6 令 $n = 45, k = 19$. 注意到 $k^2 \equiv 1 \pmod{n}$,

故19是45的2阶特别元. 令 $S_1 = (19) \cup 3(19) \cup \{5\} = \{1, 3, 5, 12, 19\}$, 根据引理5知 S_1 是自同构参数集, $G_{35}(A_1)$ 是自同构循环图.

容易证明 $G_{45}(A_1)$ 的团数 $[G_{45}(A_1)] = 2$.

为了计算 $G_{45}(A_2)$ 的团数, 根据引理6, 把 A_2 分拆成下述11个等价类:

$$\langle 8 \rangle = \{8, -8, 17, -17\},$$

$$\langle 10 \rangle = \{10, -10\},$$

$$\langle 11 \rangle = \{11, -11, -16, 16\},$$

$$\langle 13 \rangle = \{13, -13, 22, -22\},$$

$$\langle 6 \rangle = \{6, -6, -21, 21\},$$

$$\langle 9 \rangle = \{9, -9\},$$

$$\langle 15 \rangle = \{15, -15\},$$

$$\langle 18 \rangle = \{18, -18\},$$

$$\langle 20 \rangle = \{20, -20\},$$

$$\langle 4 \rangle = \{4, -4, -14, 14\},$$

$$\langle 2 \rangle = \{2, -2, -7, 7\}.$$

按定义4作全序集 $(A_2, <)$, 得所有等价类的代表元的集合为 $M = \{8, 10, 11, 13, 6, 9, 15, 18, 20, 4, 2\}$. 计算以 $x \in M$ 为起点的 A_2 色的链, 得到第一条长为8的 A_2 色链

$$8 < 17 < 10 < -10 < -6 < 21 < -20 < 4 < -14.$$

此后没有更长的 A_2 色链, 根据引理9有 $[A_2] = 1 + \max\{\iota(a): a \in M\} = 9$. 根据引理7有 $[G_{45}(A_2)] = [A_2] + 1 = 10$. 根据引理1有 $R(3, 11) \geq 46$.

根据文献[2]可知 $R(3, 11)$ 的迄今最好的下界是46, 因此, 例6的结论是较强的.

6 定理1的证明

为了节省篇幅, 以下只写出给定的 n, k, S_1 与自同构循环图 $G_n(A_2)$ 中第一条长为 $[A_2] - 1$ 的 A_2 色链, 以及所得到的 $R(3, q)$ 的下界.

1) 给定 $n = 225$ 与3阶特别元 $k = 74$, 参数集 $S_1 = \{1, 3, 5, 14, 18, 30, 42, 54, 61, 70, 74, 76, 80, 87, 89, 93, 99\}$. 根据算法1得到第一条长为32的 A_2 色链

$$8 < -8 < 83 < -67 < -20 < 109 < -48 < 111 < 64 < 25 < 100 < 27 < -104 < 44 < -106 < -110 < 40 < 36 < -65 < 102 < 23 < 52 < -33 < 17 < 92 < -58 < -39 < -77 < -73 < 96 < 4 < 19 < 75.$$

此后没有更长的 A_2 色链, 根据引理9有 $[A_2] = 1 + \max\{\iota(a): a \in M\} = 33$. 根据引理7有 $[G_{45}(A_2)] = [A_2] + 1 = 34$. 根据引理1有 $R(3, 35) \geq 226$.

2) 给定 $n = 240$ 与 2 阶特别元 $k = 119$, 参数集 $S_1 = \{1, 4, 13, 22, 37, 48, 53, 64, 67, 76, 78, 83, 92, 102, 107, 110, 119\}$. 根据算法 1 得到第一条长为 34 的 A_2 色链

$6 < -6 < -21 < 33 < 51 < 69 < 8 < 105 < 17 < 25 < -91 < -112 < 40 < 60 < -60 < -3 < 49 < -49 < -30 < -46 < 74 < 90 < 114 < -114 < -11 < -109 < 35 < -35 < 79 < -55 < -65 < 63 < -63 < -80 < -120$.

此后没有更长的 A_2 色链, 根据引理 9 有 $[A_2] = 1 + \max\{t_2(a); a \in M\} = 35$. 根据引理 7 有 $[G_{45}(A_2)] = [A_2] + 1 = 36$. 根据引理 1 有 $R(3, 37) \geq 241$.

3) 给定 $n = 245$ 与 2 阶特别元 $k = 99$, 参数集 $S_1 = \{1, 6, 20, 23, 31, 56, 65, 70, 72, 75, 80, 83, 91, 99, 104, 113, 116, 120\}$. 根据算法 1 得到第一条长为 35 的 A_2 色链

$4 < 18 < -67 < -28 < -53 < 78 < -88 < 2 < -39 < 59 < -12 < 7 < -7 < 89 < -14 < 121 < 43 < 48 < 45 < -3 < -74 < 29 < -69 < -64 < 64 < -110 < 57 < 114 < 21 < 119 < -85 < 50 < -50 < -55 < 100 < -66$.

此后没有更长的 A_2 色链, 根据引理 9 有 $[A_2] = 1 + \max\{t_2(a); a \in M\} = 36$. 根据引理 7 有 $[G_{45}(A_2)] = [A_2] + 1 = 37$. 根据引理 1 有 $R(3, 38) \geq 246$.

4) 给定 $n = 260$ 与 2 阶特别元 $k = 129$, 参数集 $S_1 = \{1, 6, 10, 32, 37, 41, 45, 50, 62, 65, 70, 85, 89, 93, 96, 104, 116, 118, 129\}$. 根据算法 1 得到第一条长为 37 的 A_2 色链

$17 < -17 < 123 < 111 < 29 < -81 < -2 < 36 < 88 < 9 < 107 < -77 < -63 < -66 < 84 < 92 < 119 < -119 < 13 < 115 < 103 < 95 < -55 < -42 < -90 < 128 < -97 < -59 < 64 < -38 < 40 < 44 < -46 < 31 < -51 < -86 < -94 < -130$.

此后没有更长的 A_2 色链, 根据引理 9 有 $[A_2] = 1 + \max\{t_2(a); a \in M\} = 38$. 根据引理 7 有 $[G_{45}(A_2)] = [A_2] + 1 = 39$. 根据引理 1 有 $R(3, 40) \geq 261$.

5) 给定 $n = 280$ 与 2 阶特别元 $k = 139$, 参数集 $S_1 = \{1, 6, 10, 24, 28, 40, 42, 47, 55, 58, 60, 62, 74, 76, 85, 93, 106, 108, 139\}$. 根据算法 1 得到第一条长为 40 的 A_2 色链

$26 < 126 < -3 < 137 < 69 < -71 < 128 <$

$78 < 51 < -89 < -120 < 92 < 96 < 13 < -127 < 15 < -125 < -20 < -33 < 107 < -41 < 99 < 80 < 94 < 112 < 130 < 114 < -64 < -116 < -52 < -86 < -98 < -100 < -68 < -84 < -18 < -66 < -102 < -132 < 46 < 48$.

此后没有更长的 A_2 色链, 根据引理 9 有 $[A_2] = 1 + \max\{t_2(a); a \in M\} = 41$. 根据引理 7 有 $[G_{45}(A_2)] = [A_2] + 1 = 42$. 根据引理 1 有 $R(3, 43) \geq 281$.

6) 给定 $n = 292$ 与 2 阶特别元 $k = 145$, 参数集 $S_1 = \{1, 14, 30, 34, 40, 46, 50, 57, 62, 65, 69, 72, 77, 81, 89, 94, 98, 116, 120, 145\}$. 根据算法 1 得到第一条长为 41 的 A_2 色链

$11 < -53 < -2 < 110 < -143 < 37 < 59 < -92 < -24 < 139 < -127 < -121 < -41 < 97 < 91 < -63 < 54 < 56 < 66 < -131 < 17 < 43 < -43 < -68 < 78 < -90 < 142 < 27 < 117 < -111 < 39 < 107 < -47 < 122 < -31 < 95 < -95 < -4 < -12 < -80 < 134 < -146$.

此后没有更长的 A_2 色链, 根据引理 9 有 $[A_2] = 1 + \max\{t_2(a); a \in M\} = 42$. 根据引理 7 有 $[G_{45}(A_2)] = [A_2] + 1 = 43$. 根据引理 1 有 $R(3, 44) \geq 293$.

我们在 CPU 为 AMD6400+ 的电脑上完成上述运算所用的时间大约是 60h.

参考文献

- [1] GREENWOOD R E, GLEASON A M. Combinatorial relations and chromatic graphs[J]. Canadian Journal of Mathematics, 1955, 7: 1-7.
- [2] RADZISZOWSKI S P. Small Ramsey numbers[J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2006, DS1 # 11: 1-60.
- [3] 罗海鹏, 苏文龙, 李乔. 经典 Ramsey 数 $R(6, 12)$, $R(6, 14)$ 和 $R(6, 15)$ 的新下界[J]. 科学通报, 1998, 43(12): 1336-1337.
- [4] 苏文龙, 罗海鹏, 李乔. 多色经典 Ramsey 数 $R(q, q, \dots, q)$ 的下界[J]. 中国科学: A 辑, 1999, 29(5): 408-413.
- [5] SU WENLONG, LUO HAIPENG, ZHANG ZHENGYOU, et al. New lower bounds of fifteen classical Ramsey numbers[J]. Australasian Journal of Combinatorics, 1999(19): 91-99.
- [6] SU WENLONG, LUO HAIPENG, SHEN YUNQIU. New lower bounds for classical Ramsey numbers $R(5, 13)$ and $R(5, 14)$ [J]. Applied Mathematics Letters, 1999 (12): 121-122.

(下转第 341 页 Continue on page 341)

的一个强协调标号. 所以房子图 $H_{m,n,3}$ 是强协调的.

由定理 1、定理 2 可得如下推论 1、推论 2.

推论 1^[8] 塔图都是优美的.

证明 当 $m = 1$ 时的房子图 $H_{1,n,3}$ 变成了塔图 T_{n+4} (如图 2 所示), 因此由定理 1 知塔图也是优美的.

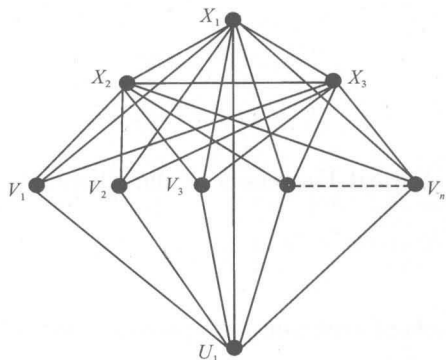


图 2 塔图

Fig. 2 Tower graph

推论 2^[9] 塔图都是强协调的.

证明 当 $m = 1$ 时的房子图 $H_{1,n,3}$ 变成了塔图 T_{n+4} , 因此由定理 2 知塔图也是强协调的.

参考文献:

[1] JOSEPH A GALLIAN. A dynamic survey of graph

labeling [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2005, #DS6(5):1-148.

[2] 梁志和. 关于图标号问题[J]. 河北师范大学学报:自然科学版, 2000, 24(3):300-303.

[3] 邦迪 J A, 默蒂 U S R. 图论及其应用[M]. 吴望名, 李念祖, 吴兰芳, 等译. 北京: 科学出版社, 1984.

[4] 王卫军, 严谦泰. 关于图 $D_{m,4}$ 的奇优美性和奇强协调性[J]. 南阳师范学院学报:自然科学版, 2003, 2(9):1-2.

[5] 哈拉里 F. 图论[M]. 李慰萱, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1980.

[6] 徐士达. $S_m + K_1$ 及其相关图的协调性[J]. 上饶师专学报, 1993(5):1-3.

[7] 朱洪, 陈增武, 段振华, 等. 算法设计和分析[M]. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1989.

[8] 徐云, 苏文龙, 罗海鹏, 等. 塔图的优美性[J]. 广西科学院学报, 2007, 23(3):133-134.

[9] 孙宗剑, 罗海鹏. 塔图 T_n 的强协调性[J]. 桂林工学院学报, 2006, 26(4):589-590.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第 338 页 Continue from page 338)

[7] LUO HAIPENG, SU WENLONG, YUN-QIU SHEN. New lower bounds of ten classical Ramsey Numbers[J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2001(24):81-90.

[8] LUO HAIPENG, SU WENLONG, LI ZHENCHONG. The properties of self-complementary graphs and new lower bounds for diagonal Ramsey numbers [J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2002 (25): 103-116.

[9] SU WENLONG, LI QIAO, LUO HAIPENG, et al. Lower bounds of Ramsey numbers based on cubic residues

[J]. Discrete Mathematics, 2002(250):197-209.

[10] LI GUIQING, SU WENLONG, LUO HAIPENG. Edge colorings of the complete graph K_{149} and the lower bounds of three Ramsey numbers[J]. Discrete Applied Mathematics, 2003(126):167-179.

[11] LUO HAIPENG, SU WENLONG, YUN-QIU SHEN. New lower bounds for two multicolor classical Ramsey numbers[J]. Radovi Matematicki, 2004(13):15-21.

(责任编辑: 尹 闯)