广西科学 Guangxi Sciences 2007,14(4):348～351,353

一类具脉冲时滞 Rayleigh 型方程的周期解
Periodic Solutions of the Rayleigh Equation with Delays and Impulses

秦发金[1,2],姚晓洁[1]
QIN Fa-jin[1,2],YAO Xiao-jie[1]
(1.柳州师范高等专科学校数学与计算机科学系,广西柳州 545004;2.四川大学数学学院,四川成都 610064)
(1. Department of Mathematics and Computer Science, Liuzhou Teachers College, Liuzhou, Guangxi, 545004, China; 2. Mathematical College, Sichuan University, Chendu, Sichuan, 610064, China)

摘要:利用重合度理论,研究一类具脉冲时滞的 Rayleigh 型方程

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x'(t-\delta))+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t),t\neq t_i, \\ \Delta x(t_i)=I_i(x(t_i),x'(t_i)), \\ \Delta x'(t_i)=J_i(x(t_i),x'(t_i)) \end{cases}$$

周期解的存在性问题.在不要求$\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=0$的条件下,得到其周期解存在的2组充分条件,推广和改进了已经报道的相关结果.

关键词:Rayleigh 型方程 脉冲 周期解 存在性 重合度
中图法分类号:O175.8 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2007)04-0348-04

Abstract:By means of the coincidence degree theory, we study the existence of periodic solutions of the Rayliegh equation

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x'(t-\delta))+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t),t\neq t_i, \\ \Delta x(t_i)=I_i(x(t_i),x'(t_i)), \\ \Delta x'(t_i)=J_i(x(t_i),x'(t_i)) \end{cases}$$

with delays and impulses. Some new sufficient conditions of periodic solutions are obtained without requiring $\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=0$. The results have extend and improved the related reports in the literatures.

Key words:Rayleigh equation, impulses, periodic solutions, existence, coincidence degree

由于 Duffing 型方程

$$x''(t)+g(x)=p(t)=p(t+T)$$

具有广泛的应用背景,人们对其周期解的存在性尤为关注,并做了大量的研究工作[1,2].时滞 Duffing 型方程

$$x''(t)+g(t,x(t-\tau))=p(t)=p(t+T)$$

周期解存在性问题也已有人研究过[3],但关于时滞脉冲 Duffing 型方程的周期解存在性研究目前还很少.最近,李建利等在文献[4]中研究了一类具脉冲时滞的 Duffing 型方程

$$\begin{cases} x''(t)+\beta(t)g(x(t-\tau(t)))=p(t),t\neq t_i, \\ \Delta x(t_i)=I_i(x(t_i),x'(t_i)), \\ \Delta x'(t_i)=J_i(x(t_i),x'(t_i)) \end{cases} \quad (1)$$

的周期解问题,利用重合度理论得到方程(1)至少存在一个周期解的充分条件.关于 Rayleigh 型方程周期解的研究也有许多相关文献发表,并取得了很好的结果[5~8].但据作者所知,到目前为止,还未见有关于具有脉冲时滞的 Rayleigh 型方程周期解的文献发表.本文借用文献[4,9]的思想方法研究一类具有脉冲时滞的 Rayleigh 型方程

收稿日期:2006-12-22
修回日期:2007-01-12
作者简介:秦发金(1967-),男,副教授,主要从事微分方程研究。

$$\begin{cases} x''(t)+f(t,x'(t-\delta))+g(t,x(t-\\ \quad \tau(t)))=p(t),t\neq t_i, \\ \Delta x(t_i)=I_i(x(t_i),x'(t_i)), \\ \Delta x'(t_i)=J_i(x(t_i),x'(t_i)) \end{cases} \tag{2}$$

的周期解问题，其中 $f,g\in C(R\times R,R)$ 且 $f(t+T,x)=f(t,x)$，$g(t+T,x)=g(t,x)$，$p\in C(R,R)$，$p(t+T)=p(t)$，$\delta\geqslant 0$ 为常数，$\Delta x(t_i)=x(t_i^+)-x(t_i^-)$，$x(t_i^+)$，$x(t_i^-)$ 分别表示 $x(t)$ 在 $t=t_i$ 处的左右极限，且 $x(t_i^-)=x(t_i)$；$\Delta x'(t_i)=x'(t_i^+)-x'(t_i^-)$，$x'(t_i^+)$，$x'(t_i^-)$ 分别表示 $x(t)$ 在 $t=t_i$ 处的左右导数，且 $x'(t_i^-)=x'(t_i)$；$t_i<t_{i+1}$，且 $\lim\limits_{i\to\pm\infty}t_i=\pm\infty$，$i\in Z$(整数集)；存在正整数 k 使得 $t_{i+k}=t_i+T$，$I_{i+k}(x,x')=I_i(x,x')$，$J_{i+k}(x,x')=J_i(x,x')$. 利用重合度理论，在不要求 $\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=0$ 的条件下，我们得到了方程(2)周期解存在性的2组新结果，推广和改进了已报道的相关结果.

设 $0<t_1<t_2<\cdots<t_k<T$，为了方便，以下记 $I_i(x(t_i),x'(t_i))$ 为 I_i，$J_i(x(t_i),x'(t_i))$ 为 J_i. $X=\{x(t)\in PC^1(R,R),x(t+T)=x(t)\}$，$Y=PC(R,R)\times R^k\times R^k$，其中 $PC(R,R)=\{x:R\to R$ 在 $t\neq t_i$ 处连续，$x(t_i^+)$，$x(t_i^-)$ 存在，且 $x(t_i^-)=x(t_i)$，$i\in Z\}$，$PC^1(R,R)=\{x\in PC(R,R)$ 在 $t\neq t_i$ 处连续可微，$x'(t_i^+)$，$x'(t_i^-)$ 存在，且 $x'(t_i^-)=x'(t_i)$，$i\in Z\}$. 对一切 $x\in X$ 定义其范数为 $\|x\|_X=\max\{|x|_\infty,|x'|_\infty\}$，其中 $|x|_\infty=\sup\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$，$|x'|=\sup\limits_{t\in[0,T]}|x'(t)|$，对一切 $u=(y,c)\in Y$，定义其范数为 $\|u\|_Y=\max\{|y|_\infty,|c|\}$，其中 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_{2k})$，$|c|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 2k}\{|c_i|\}$，则 X,Y 在所定义的范数下成为 Banach 空间.

1 主要引理

引理 1[10] 设 X,Y 是 Banach 空间，$L:DomL\subset X\to Y$ 是指标为零的 Fredholm 算子，Ω 是 X 中的有界开集，且 $N:\bar{\Omega}\to X$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的. 如果下列条件成立.

(a) $Lx\neq\lambda Nx$，$\forall\ x\in\partial\Omega\cap DomL$，$\lambda\in(0,1)$；

(b) $QNx\neq 0$，$\forall\ x\in\partial\Omega\cap \mathrm{Ker}L$，且 $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0$，其中 $Q:Y\to Y$ 是一投影算子，且 $\mathrm{Im}L=\mathrm{Ker}Q$，$J:\mathrm{Im}Q\to\mathrm{Ker}L$ 是同构映射，那么方程 $Lx=Nx$ 在 Ω 中至少有一个解.

定义算子

$L:DomL\cap X\to X$，$x\to(x'',\Delta x(t_1),\cdots,\Delta x(t_k),\Delta x'(t_1),\cdots,\Delta x'(t_k))$，

$N:X\to Y$，$x\to(-f(t,x'(t-\delta))-g(t,x(t-\tau(t)))+p(t),I_1,\cdots,I_k,J_1,\cdots,J_k)$.

这样方程(2)有周期解等价于算子方程 $Lx=Nx$，$x\in DomL$ 有解.

由文献[4]知

$\mathrm{Ker}L=\{x\in X,x=c,c\in R\}$，

$\mathrm{Im}L=\{(y,a_1,a_2,\cdots,a_k,b_1,b_2,\cdots,b_k):x''=y,\Delta x'(t_i)=b_i,i=1,2,\cdots,k\}=\{(y,a_1,a_2,\cdots,a_k,b_1,b_2,\cdots,b_k):\int_0^T(T-s)y(s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{i=1}^k b_i(T-t_i)+\sum\limits_{i=1}^k a_i+x'_0T=0\}$，这里 $x'(0)=x'_0$ 是初值.

定义投影算子

$P(x)=x(0)$，$x\in X$，$Q:Y\to Y$，

$Q(y,a_1,\cdots,a_k,b_1,\cdots,b_k)=(\frac{2}{T^2}[\int_0^T(T-s)y(s)\mathrm{d}s+\sum\limits_{i=1}^k b_i(T-t_i)+\sum\limits_{i=1}^k a_i+x'_0T],0,\cdots,0)$

令 $G\subset R$ 是有界开子集，$\Omega_0=\{x\in X,x(t),x'(t)\in G,x(t_k^+),x'(t_k^+)\in G,t\in[0,T]\}$，那么 Ω_0 是 X 中的有界开集.

模仿文献[4]的方法易证如下2个引理成立.

引理 2 L 是指标为零的 Fredholm 算子.

引理 3 N 在 $\bar{\Omega}_0$ 上是 L-紧的.

2 主要结果

定理 1 若 $f(t,0)=0$ 且下列条件满足.

(B_0) $x'I_i\geqslant 0$，$xJ_i\leqslant 0$，$\forall\ x,x'\in R$；

(B_1) 存在正常数 M_1,M_2，使得 $|I_i|\leqslant M_1$，$|J_i|\leqslant M_2$，$\forall\ x,x'\in R$；

(B_2) 存在常数 $M>0$，使得 $|f(t,x)|\leqslant M$，$\forall\ t,x\in R$；

(B_3) 存在常数 $D>0$，$m>0$，$n\geqslant 0$，使

$x[g(t,x)-p(t)]>0$，$|g(t,x)-p(t)|>M$，$\forall\ t\in R$，$|x|>D$，并且使下列条件之一成立.

(i) 当 $t\in R$，$x<-D$ 时，$g(t,x)-p(t)\geqslant nx-m$；

(ii) 当 $t\in R$，$x>D$ 时，$g(t,x)-p(t)\leqslant nx+m$；

则当 $nT^2<2$ 时，方程(2)至少存在1个 T-周期解.

证明 考虑算子方程 $Lx=\lambda Nx$，$\lambda\in(0,1)$，即

$$\begin{cases} x''(t)+\lambda f(t,x'(t-\delta))+\lambda g(t,x(t-\\ \quad \tau(t)))=\lambda p(t),t\neq t_i, \\ \Delta x(t_i)=\lambda I_i, \\ \Delta x'(t_i)=\lambda J_i. \end{cases} \tag{3}$$

设 $x(t)$ 是方程(3)的任一 T-周期解，从0到 T 积分得

$\int_0^T[f(t,x'(t-\delta))+g(t,x(t-\tau(t)))-$

$p(t)]\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{k} J_i.$ (4)

由条件(B_2)、(B_3)，可断言必存在$\zeta \in [0,T]$，使得

$$|x(\zeta - \tau(\zeta))| \leqslant D. \tag{5}$$

若不然，如果$\forall\, t \in [0,T]$，均有$x(t-\tau(t)) > D$，那么$g(t,x(t-\tau(t))) - p(t) > 0, J_i \leqslant 0$，因此

$$\int_0^T [f(t,x'(t-\delta)) + g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)]\mathrm{d}t > 0 > \sum_{i=1}^{k} J_i,$$

这与(4)式相矛盾.

如果$\forall\, t \in [0,T]$，均有$x(t-\tau(t)) < -D$，那么$g(t,x(t-\tau(t))) - p(t) < 0, J_i \geqslant 0$，因此

$$\int_0^T [f(t,x'(t-\delta)) + g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)]\mathrm{d}t < 0 \leqslant \sum_{i=1}^{k} J_i,$$

这也与(4)式相矛盾，因此(5)式必成立. 记$\zeta - \tau(\zeta) = N_0 T + t_0, t_0 \in [0,T]$，$N_0$为某整数，则$|x(t_0)| \leqslant D$. 同时存在$t_1 \in [t_0, t_0 + T]$，使得$x(t_1) = \max\limits_{t\in[t_0,t_0+T]} x(t)$. 于是由$x(t_1) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} x'(t)\mathrm{d}t + \sum\limits_{t_0 \leqslant t_i \leqslant t_1} I_i$，得

$$|x(t_1)| \leqslant |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t_1} |x'(t)|\mathrm{d}t + kM_1. \tag{6}$$

此外，还有$x(t_1) = x(t_0 + T) - \int_{t_1}^{t_0+T} x'(s)\mathrm{d}s + \sum\limits_{t_1 \leqslant t_i < t_0+T} I_i = x(t_0) - \int_{t_1}^{t_0+T} x'(t)\mathrm{d}t + \sum\limits_{t_1 \leqslant t_i < t_0+T} I_i$，则有

$$|x(t_1)| \leqslant |x(t_0)| + \int_{t_1}^{t_0+T} |x'(t)|\mathrm{d}t + kM_1. \tag{7}$$

(6)式、(7)式相加得$|x(t_1)| \leqslant |x(t_0)| + \frac{1}{2}\int_0^T |x'(t)|\mathrm{d}t + kM_1$. 即

$$|x|_\infty \leqslant D + \frac{1}{2}\int_0^T |x'(t)|\mathrm{d}t + kM_1. \tag{8}$$

结合条件(B_3)，我们分两种情形证明$\int_0^T |x'(t)|^2\mathrm{d}t$有界.

情形1 若条件(B_3)的(i)成立，由(4)式有

$$\int_{[x(t-\tau(t))>D]} |g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)|\mathrm{d}t = \int_{[x(t-\tau(t))>D]} [g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)]\mathrm{d}t = -\int_{[x(t-\tau(t))\leqslant D]} [g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)]\mathrm{d}t + \int_0^T f(t,x'(t-\delta))\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{k} J_i \leqslant \int_{[x(t-\tau(t))\leqslant D]} |g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)|\mathrm{d}t + \int_0^T |f(t,x'(t-\delta))|\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{k} |J_i|,$$

从而有

$$\int_0^T |g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)|\mathrm{d}t \leqslant 2\int_{[x(t-\tau(t))\leqslant D]} |g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)|\mathrm{d}t + \int_0^T |f(t,x'(t-\delta))|\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{k} |J_i| = 2\Big[\int_{[|x(t-\tau(t))|\leqslant D]} |g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)|\mathrm{d}t + \int_{[x(t-\tau(t))<-D]} |g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)|\mathrm{d}t\Big] + \int_0^T |f(t,x'(t-\delta))|\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{k} |J_i| \leqslant 2\Big[g_D T + \int_0^T (n|x(t-\tau(t))| + m)\mathrm{d}t\Big] + \int_0^T |f(t,x'(t-\delta))|\mathrm{d}t + kM_2 \leqslant 2(g_D + m)T + 2nT|x|_\infty + \int_0^T |f(t,x'(t-\delta))|\mathrm{d}t + kM_2, \tag{9}$$

其中$g_D = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T,\, |x|\leqslant D} |g(t,x) - p(t)|$.

将方程(3)两边同乘以$x(t)$并从0到T积分得

$$-\sum_{i=1}^{k} [x'(t_i)I_i + x(t_i^+)J_i] - \int_0^T |x'(t)|^2\mathrm{d}t + \lambda\int_0^T f(t,x'(t-\delta))\mathrm{d}t + \lambda\int_0^T x(t)[g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)]\mathrm{d}t = 0.$$

从而有

$$\int_0^T |x'(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant \max_{t\in[0,T]} |x(t)| \Big[\int_0^T |f(t,x'(t-\delta))|\mathrm{d}t + \int_0^T |g(t,x(t-\tau(t))) - p(t)|\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{k} |J_i|\Big] \leqslant \Big(D + \frac{1}{2}\int_0^T |x'(t)|\mathrm{d}t + kM_1\Big)\Big[2(g_D + m)T + 2nT|x|_\infty + 2\int_0^T |f(t,x'(t-\delta))|\mathrm{d}t + 2kM_2\Big] \leqslant \Big(D + \frac{1}{2}\int_0^T |x'(t)|\mathrm{d}t + kM_1\Big)\Big[2(g_D + m)T + 2nT\Big(D + \frac{1}{2}\int_0^T |x'(t)|\mathrm{d}t + kM_1\Big) + 2MT + 2kM_2\Big] = (D + kM_1)[2(g_D + m)T + 2nT(D + kM_1) + 2MT + 2kM_2] + \frac{nT^2}{2}\int_0^T |x'(t)|^2\mathrm{d}t + [2nT(D + kM_1) + (g_D + m)T + MT + kM_2]\int_0^T |x'(t)|\mathrm{d}t. \tag{10}$$

情形2 若条件(B_3)的(ii)成立，则类似情形1的证明，可得(10)式仍然成立. 由条件$nT^2 < 2$及(10)式知，必存在常数$R_0 > 0$，使得

$$\int_0^T |x'(t)|^2\mathrm{d}t \leqslant R_0. \tag{11}$$

再由(8)式得

$$|x|_\infty \leqslant D + \sqrt{T}\left(\int_0^T |x'(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + kM_1 \leqslant D + \sqrt{TR_0} + kM_1 \triangleq R_1. \tag{12}$$

进一步由(3)式、(12)式得

$$\int_0^T |x''(t)| dt \leqslant \lambda\int_0^T |f(t,x'(t-\delta))| dt + \lambda\int_0^T |g(t,x(t-\tau(t)))| dt + \lambda\int_0^T |p(t)| dt \leqslant MT + g_{R_1}T + |p|_\infty T = (M + g_{R_1} + |p|_\infty)T \triangleq R_2,$$

其中 $g_{R_1} = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T,\, |x|\leqslant R_1} |g(t,x)|$. 由(11)式有 $\int_0^{t_2} |x'(t)|^2 dt \leqslant R_0$,利用积分中值定理可知,存在 $t_3 \in [0,t_2]$,常数 $R_3 > 0$,使得 $|x'(t_3)| \leqslant R_3$,于是对一切 $t \in [0,T]$ 有

$$|x'(t)| \leqslant |x'(t_3)| + \int_0^T |x''(t)| dt + \sum_{i=1}^k |J_i| \leqslant R_2 + R_3 + kM_2 \triangleq R_4,$$

即有 $|x'|_\infty \leqslant R_4$. 取 $R_5 > \max\{R_1,R_4\}$,令 $\Omega = \{x \in X: \|x\| < R_5\}$,则 $\forall\, x \in \partial\Omega, \forall\, \lambda \in (0,1)$ 有 $Lx \neq \lambda Nx$. 因为当 $x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}L = \partial\Omega \cap R$ 时,x 为常数且 $|x| = R_5$,所以

$$QNx = \left(-\frac{2}{T^2}\int_0^T (T-t)[g(t,x) - p(t)]dt, 0, \cdots, 0\right) \neq 0.$$

定义同构映射 $J(d,0,\cdots,0) = d$,则

$$JQNx = \left(-\frac{2}{T^2}\int_0^T (T-t)[g(t,x) - p(t)]dt\right).$$

作变换

$$H(x,\mu) = -\mu x + (1-\mu)\left(-\frac{2}{T^2}\int_0^T (T-t)[g(t,x) - p(t)]dt\right), \mu \in [0,1],$$

则当 $x \in \mathrm{Ker}L \cap \partial\Omega$ 及 $\mu \in [0,1]$ 时,有

$$xH(x,\mu) = -\mu x^2 - (1-\mu)\left(\frac{2}{T^2}\int_0^T (T-t)x[g(t,x) - p(t)]dt\right) < 0.$$

故 $H(x,\mu)$ 为同伦映射,因而有

$$\deg\{JQN, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\} = \deg\left\{-\frac{1}{T}\int_0^T [g(t,x) - p(t)]dt, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\right\} = \deg\{-x, \Omega \cap \mathrm{Ker}L, 0\} \neq 0.$$

根据引理1易知,方程(2)至少存在1个 T-周期解.

定理 2 假设条件(B_1)、(B_2)成立,若 $f(t,0) = 0$,且满足:

(B_4)存在常数 $D > 0, m > 0, n \geqslant 0$,使

$x[g(t,x) - p(t)] < 0, |g(t,x) - p(t)| > M, \forall\, t \in R, |x| > D$,并且使下列条件(i),(ii)之一成立.

(i) 当 $t \in R, x > D$ 时,$g(t,x) - p(t) \geqslant -nx - m$;

(ii) 当 $t \in R, x < -D$ 时,$g(t,x) - p(t) \leqslant -nx + m$;

(B_5) $x'I_i \geqslant 0, xJ_i \geqslant 0, \forall\, x, x' \in R$.

则当 $nT^2 < 2$ 时,方程(2)至少存在一个 T-周期解.

类似定理1的证明,可得定理2结论成立.

注 当 $f(t,x) = 0, g(t,x) = \beta(t)g(x)$, $\int_0^T p(t)dt = 0$ 时,只要把本文条件中 $g(t,x) - p(t)$ 改为 $g(x)$,那么文献[4]中的定理3.2、定理3.3和定理3.4、定理3.5分别是本文定理1和定理2的特殊情形. 即使没有脉冲,我们的结果也改进了文献[3,7]的相关结果.

3 应用举例

例 考虑方程

$$\begin{cases} x''(t) + e^{-x'^2} + g(t,x(t-\pi)) = 2 + \sin t, t \neq t_i = i\pi, \\ \Delta x(t) = \dfrac{x'(t)x^2(t)}{1 + x'(t)x^4(t)}, t = t_i, \\ \Delta x'(t) = \dfrac{x(t)x'^2(t)}{1 + x^2(t)x'^4(t)}, t = t_i. \end{cases} \tag{13}$$

这里

$$g(t,x) = \begin{cases} -2 + \sin t, x \geqslant \pi, \\ -\dfrac{2}{\pi}x, x < \pi. \end{cases}, p(t) = 1 + \sin t,$$

$f(x) = e^{-x^2} - 1$; $I_i(x(t),x'(t)) = \dfrac{x'(t)x^2(t)}{1 + x'(t)x^4(t)}$, $J_i(x(t),x'(t)) = \dfrac{x(t)x'^2(t)}{1 + x^2(t)x'^4(t)}$,容易验证 $\int_0^{2\pi} p(t)dt \neq 0, f(0) = 0, |f(x)| \leqslant 1, \forall\, x \in R$; $x[g(t,x) - p(t)] < 0, |g(t,x) - p(t)| > 1, \forall\, |x| > \pi$; $x'I_i \geqslant 0, xJ_i \geqslant 0$; $|I_i| = \left|\dfrac{x'(t)x^2(t)}{1 + x'(t)x^4(t)}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$, $|J_i| = \left|\dfrac{x(t)x'^2(t)}{1 + x^2(t)x'^4(t)}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$;当 $x > \pi$ 时,有,$g(t,x) - p(t) \geqslant -3$, $nT^2 = 0 < 2$,则利用定理2可得方程(13)至少存在一个 2π-周期解.

参考文献:

[1] IANNACCI R, NKASHAMA M N. On periodic solutions of forced second order differential equations with a deviating argument[J]. Lecture Notes in Math, 1984, 1151: 224-232.

[2] MAWHIN J L. Periodic solutions of some vector retared functional differential equations[J]. J Math Anal Appl, 1974, 45: 588-603.

(下转第353页 Continue on page 353)

而 $Y\backslash f(X)$ 为连通集. 设 $u\in Y\backslash(f(X)\cup Z)$，则 z 与 u 在 $Y\backslash f(X)$ 的同一连通集内. 另一方面，$Y\backslash\partial Z$ 为不连通集，z 与 u 分别属于 $Y\backslash\partial Z$ 的两个不同的连通分支内，从而 z 与 u 分别属于 $Y\backslash f(X)$ 的两个不同的连通分支内. 这与前述矛盾，故 $Z\subset f(X)$.

注 设 $a<b, X=[a,b], Y=R\cup\{\infty\}=[\min\{f(a),f(b)\},\max\{f(a),f(b)\}]$，则单变量连续函数情形下的介值定理为上述引理的一个特例.

2 主要结果

定理1 设 φ 是 Ω 到自身的解析映射，若复合算子 C_φ 在 Bergman 空间 $L_a^p(\Omega)$ 上是下有界的，则 $\overline{\varphi(\Omega)}=\overline{\Omega}$.

证明 若 $\exists\, z_0\in\partial\Omega$ 及 z_0 的一个邻域 A_{z_0} 满足 $A_{z_0}\cap\varphi(\Omega)=\varnothing$. 由凸集 Ω 的性质知 $\exists\, u\in C^n, |u|=1$ 对 $z\in\overline{\Omega}\backslash\{z_0\}$ 满足 $\mathrm{Re}\langle z-z_0,u\rangle>0$. 令 $f(z)=\dfrac{1}{(a+\langle z-z_0,u\rangle)^k}(a>0,kp>n)$，$A_a(z_0)=\{z:z\in\Omega,|z-z_0|\leqslant a\}$. 那么 $\exists\,\beta>0$，当 a 充分小时有 $m[A_a(z_0)]\geqslant\beta a^n$. 故

$$\|f\|^p=\int_\Omega|f(z)|^p\mathrm{d}z=$$
$$\int_\Omega\frac{1}{|a+\langle z-z_0,u\rangle|^{kp}}\mathrm{d}z\geqslant$$
$$\int_{A_a(z_0)}\frac{\mathrm{d}z}{|a+\langle z-z_0,u\rangle|^{kp}}\geqslant(2a)^{-kp}m[A_a(z_0)]\geqslant$$
$$2^{-kp}\beta a^{n-kp}.$$
$$\|C_\varphi f\|^p=\int_\Omega|f(\varphi(z))|^p\mathrm{d}z=$$
$$\int_\Omega\frac{\mathrm{d}z}{|a+\langle\varphi(z)-z_0,u\rangle|^{kp}}\leqslant$$
$$m(\Omega)\max_{z\in\overline{\varphi(\Omega)}}\frac{1}{|a+\langle z-z_0,u\rangle|^{kp}}\leqslant m(\Omega)\max_{z\in\overline{\varphi(\Omega)}}|\langle z-z_0,u\rangle|^{-kp}<\infty.$$

因复合算子 C_φ 在 Bergman 空间 $L_a^p(\Omega)$ 上是下有界的，那么 $\exists\,\delta>0$ 满足

$$2^{-kp}\beta\delta a^{n-kp}\leqslant\delta\|f\|^p\leqslant\|f\circ\varphi\|^p\leqslant$$
$$m(\Omega)\max_{z\in\overline{\varphi(\Omega)}}|\langle z-z_0,u\rangle|^{-kp}<\infty.\tag{1}$$

(1)式当 $a\to 0^+$ 时会出现矛盾，故 $\partial\Omega\subset\overline{\varphi(\Omega)}$. 又因 φ 为连续映射，Ω 为可缩集，$\varphi(\Omega)$ 亦为可缩集，故存在复 n 维可缩集序列 $\{K_t,t\in\mathrm{N}\}$ 满足 $\varnothing\neq K_1\subset K_2\subset\cdots\subset K_t\subset\cdots\subset\Omega$ 且 $\partial K_t\subset\varphi(\Omega)$，$\overline{\bigcup_{t=1}^{\infty}K_t}=\overline{\Omega}$. 在引理1中令 $X=\Omega, Y=C^n, Z=K_t, f=\varphi$ 有 $K_t\subseteq\varphi(\Omega)$. 从而 $\bigcup_{t=1}^{\infty}K_t\subseteq\varphi(\Omega)$. 故 $\overline{\Omega}=\overline{\bigcup_{t=1}^{\infty}K_t}\subseteq\overline{\varphi(\Omega)}\subseteq\overline{\Omega}$，即 $\overline{\varphi(\Omega)}=\overline{\Omega}$.

定理2 设 φ 是 Ω 到自身的解析映射，$\varphi(\Omega)=\Omega$，$\sup_{z\in\Omega}|\det J_\varphi(z)|<\infty$. 则复合算子 C_φ 在 Bergman 空间 $L_a^p(\Omega)$ 上是下有界的.

证明 设 $\sup_{z\in\Omega}|\det J_\varphi(z)|=M$. $\forall\, f\in H^p(\Omega)$，有 $\|f\|^p=\int_\Omega|f(z)|^p\mathrm{d}z=\int_{\varphi(\Omega)}|f(z)|^p\mathrm{d}z\leqslant\int_\Omega|f(\varphi(z))|^p|\det J_\varphi(z)|\mathrm{d}z\leqslant M\int_\Omega|f(\varphi(z))|^p\mathrm{d}z=M\|C_\varphi f\|^p$，即复合算子 C_φ 在 Bergman 空间 $L_a^p(\Omega)$ 上是下有界的.

参考文献：

[1] 陈怀惠. Bloch 空间上的复合算子的下有界性[J]. 中国科学：A 辑，2003，313(4)：289-296.

[2] 尤承业. 基础拓扑学讲义[M]. 北京：北京大学出版社，1997.

[3] 吴树宏. 单位 C^n 球上 Bloch 空间上复合算子的下有界性[J]. 应用泛函分析学报，2006，8(3)：233-239.

（责任编辑：尹 闯）

（上接第351页 Continue from page 351）

[3] 黄先开，向子贵. 具有时滞的 Duffing 型方程 $x''(t)+g(t,x(t-\tau))=p(t)=p(t+T)$ 的 2π 周期解[J]. 科学通报，1994，39(3)：201-203.

[4] 李建利，申建华. 具脉冲时滞的 Duffing 型方程的周期解[J]. 应用数学学报，2005，28(1)：124-133.

[5] WANG G Q. A periodic bounrs for periodic solutions of a delay Rayleigh equation [J]. Applied Mathematics Letters，1999，12：41-44.

[6] 鲁世平，葛渭高，郑祖庥. 具偏差变元的 Rayleigh 方程周期解的存在性[J]. 数学进展，2004，47(2)：299-304.

[7] 鲁世平，葛渭高. 一类具偏差变元的 Rayleigh 方程周期解问题[J]. 数学学报，2005，34(4)：425-434.

[8] 王志明，伍朝华，罗治国. 带有时滞的 Rayleigh 方程的周期解[J]. 长沙理工大学学报：自然科学版，2005，2(4)：74-79.

[9] 范良君. 一类具有偏差变元的 Duffing 型方程的周期解[J]. 湖南文理学院学报：自然科学版，2006，18(1)：10-12.

[10] GAINES R E，MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations [M]. Berlin：springer-verlag，1997：568.

（责任编辑：邓大玉 尹 闯）