广西科学 Guangxi Sciences 2007,14(4):352～353

Bergman 空间上复合算子的下有界性
Bounded Below Property of Composition Operator on Bergman Space

吴树宏
WU Shu-hong
(武汉理工大学理学院数学系,湖北武汉 430070)
(Department of Mathematics, School of Science, Wuhan University of Technology, Wuhan, Hubei, 430070, China)

摘要:给出 Bergman 空间 $L_a^p(\Omega)=\{f\in H(\Omega):\|f\|=(\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}m\ (x))^{\frac{1}{p}}<\infty\}$ 上复合算子下有界的一个充分条件 $\varphi(\Omega)=\Omega,\sup\limits_{z\in\Omega}|\det J_\varphi(z)|<\infty$,和一个必要条件 $\overline{\varphi(\Omega)}=\overline{\Omega}$,其中 φ 是 Ω 到自身的解析映射.

关键词:Bergman 空间 复合算子 下有界性
中图法分类号:O177.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2007)04-0352-02

Abstract: In this paper, we give a sufficient condition $\varphi(\Omega)=\Omega$, $\sup\limits_{z\in\Omega}|\det J_\varphi(z)|<\infty$, and a necessary condition $\overline{\varphi(\Omega)}=\overline{\Omega}$ for bounded below of composition operator on Bergman space $L_a^p(\Omega)=\{f\in H(\Omega):\|f\|=(\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}m\ (x))^{\frac{1}{p}}<\infty\}$.

Key words: Bergman space, composition operator, bounded below property

设 Ω 为 C^n 中满足如下条件的有界凸开集:$\forall z_0\in\partial\Omega$,$\exists u\in C^n$,$|u|=1$,对 $z\in\overline{\Omega}$ 满足 $\mathrm{Re}\langle z-z_0,u\rangle\geqslant 0$ 且等号仅当 $z=z_0$ 时成立. 常见的凸形如 C^n 单位球,C^n 多圆柱均属于此类凸集. 设 $H(\Omega)$ 为 Ω 上的解析函数组成的集合,dm 为 C^n 中的 Lebesgue 测度,$p\geqslant 1$. Bergman 空间定义为

$$L_a^p(\Omega)=\{f\in H(\Omega):\|f\|=(\int_\Omega|f(x)|^p\mathrm{d}m(x))^{\frac{1}{p}}<\infty\}.$$

对解析映照 $\varphi=(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n):\Omega\mapsto\Omega,z\in\Omega$,用 $J_\varphi(z)$ 表示 $n\times n$ 矩阵 $(\partial\varphi_j(z)/\partial z_k)(j,k=1,2,\cdots,n)$. $L_a^p(\Omega)$ 上的复合算子定义为 $C_\varphi:f\mapsto f\circ\varphi$. 它是 Bergman 空间 $L_a^p(\Omega)$ 上的线性算子. 显然在范数 $\|\cdot\|$ 下 Bergman 空间 $L_a^p(\Omega)(p\geqslant 1)$ 为 Banach 空间. 若存在 $k>0$,对 $f\in L_a^p(\Omega)$ 满足 $\|C_\varphi f\|\geqslant k\|f\|$,称复合算子 C_φ 在 $L_a^p(\Omega)$ 上下有界. 文献[1]讨论了 Bloch 空间上的复合算子下有界的一些性质,本文给出了 Bergman 空间 $L_a^p(\Omega)$ 上复合算子下有界的一个充分条件和一个必要条件.

1 定义及引理

定义1[2] 设 X 和 Y 都是拓扑空间,记 $C(X,Y)$ 是 X 到 Y 的所有连续映射的集合. 设 $f,g\in C(X,Y)$,$I=[0,1]$. 如果有连续映射 $H:X\times I\to Y$,使得 $\forall x\in X$,$H(x,0)=f(x)$,$H(x,1)=g(x)$,则称 f 与 g 同伦,记作 $f\simeq g:X\mapsto Y$,或简记为 $f\simeq g$. $\forall w\in X$,$f(x)=w$,$g(x)=x$,若 $f\simeq g$,则称 X 为可缩拓扑空间.

引理1[3](介值定理) 设 X 为可缩拓扑空间,Y,Z 是连通拓扑空间,f 为从 X 到 Y 中的连续映射,$f(X)\cup Z\subset Y$,$f(X)$ 为 Y 中的有界集. ∂Z 为 Z 相对于 Y 的边界. 若对任意有界单连通集 $W\subset Y$,$Y\backslash W$ 为连通集,$\partial Z\subset f(X)$,$\partial Z\neq f(X)$,则 $Z\subset f(X)$.

证明 $\forall w\in\partial Z\subset f(X)$,$f(X)$ 可在 $f(X)$ 上连续形变为 w. 在此连续形变下,∂Z 亦可在 $f(X)$ 上连续形变为 w. 若有 $z\in Z$,$z\notin f(X)$,则 $z\in Y\backslash f(X)$. 因连续映射将可缩拓扑空间映为可缩拓扑空间,故 $f(X)$ 为可缩拓扑空间,它必为单连通的,从

收稿日期:2006-12-22
修回日期:2007-01-12
作者简介:吴树宏(1963-),男,副教授,主要从事泛函分析研究工作。

而 $Y\setminus f(X)$ 为连通集. 设 $u \in Y\setminus(f(X) \cup Z)$，则 z 与 u 在 $Y\setminus f(X)$ 的同一连通集内. 另一方面，$Y\setminus \partial Z$ 为不连通集，z 与 u 分别属于 $Y\setminus \partial Z$ 的两个不同的连通分支内，从而 z 与 u 分别属于 $Y\setminus f(X)$ 的两个不同的连通分支内. 这与前述矛盾，故 $Z \subset f(X)$.

注 设 $a < b, X = [a,b], Y = R \cup \{\infty\} = [\min\{f(a),f(b)\},\max\{f(a),f(b)\}]$，则单变量连续函数情形下的介值定理为上述引理的一个特例.

2 主要结果

定理1 设 φ 是 Ω 到自身的解析映射，若复合算子 C_φ 在 Bergman 空间 $L_a^p(\Omega)$ 上是下有界的，则 $\overline{\varphi(\Omega)} = \overline{\Omega}$.

证明 若 $\exists\ z_0 \in \partial\Omega$ 及 z_0 的一个邻域 A_{z_0} 满足 $A_{z_0} \cap \varphi(\Omega) = \varnothing$. 由凸集 Ω 的性质知 $\exists\ u \in C^n, |u| = 1$ 对 $z \in \overline{\Omega}\setminus\{z_0\}$ 满足 $\mathrm{Re}\,\langle z - z_0, u\rangle > 0$. 令 $f(z) = \dfrac{1}{(a + \langle z - z_0, u\rangle)^k}\ (a > 0, kp > n)$，$A_a(z_0) = \{z: z \in \Omega, |z - z_0| \leqslant a\}$. 那么 $\exists\ \beta > 0$，当 a 充分小时有 $m[A_a(z_0)] \geqslant \beta a^n$. 故

$$\|f\|^p = \int_\Omega |f(z)|^p \mathrm{d}z =$$
$$\int_\Omega \frac{1}{|a + \langle z - z_0, u\rangle|^{kp}} \mathrm{d}z \geqslant$$
$$\int_{A_a(z_0)} \frac{\mathrm{d}z}{|a + \langle z - z_0, u\rangle|^{kp}} \geqslant (2a)^{-kp} m[A_a(z_0)] \geqslant$$
$$2^{-kp}\beta a^{n-kp}.$$

$$\|C_\varphi f\|^p = \int_\Omega |f(\varphi(z))|^p \mathrm{d}z =$$
$$\int_\Omega \frac{\mathrm{d}z}{|a + \langle \varphi(z) - z_0, u\rangle|^{kp}} \leqslant$$
$$m(\Omega) \max_{z \in \overline{\varphi(\Omega)}} \frac{1}{|a + \langle z - z_0, u\rangle|^{kp}} \leqslant m(\Omega) \max_{z \in \overline{\varphi(\Omega)}} |\langle z - z_0, u\rangle|^{-kp} < \infty.$$

因复合算子 C_φ 在 Bergman 空间 $L_a^p(\Omega)$ 上是下有界的，那么 $\exists\ \delta > 0$ 满足

$$2^{-kp}\beta\delta a^{n-kp} \leqslant \delta\|f\|^p \leqslant \|f \circ \varphi\|^p \leqslant$$
$$m(\Omega) \max_{z \in \overline{\varphi(\Omega)}} |\langle z - z_0, u\rangle|^{-kp} < \infty. \tag{1}$$

(1)式当 $a \to 0^+$ 时会出现矛盾，故 $\partial\Omega \subset \overline{\varphi(\Omega)}$. 又因 φ 为连续映射，Ω 为可缩集，$\varphi(\Omega)$ 亦为可缩集，故存在复 n 维可缩集序列 $\{K_t, t \in \mathrm{N}\}$ 满足 $\varnothing \neq K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_t \subset \cdots \subset \Omega$ 且 $\partial K_t \subset \varphi(\Omega)$，$\overline{\bigcup_{t=1}^{\infty} K_t} = \overline{\Omega}$. 在引理1中令 $X = \Omega, Y = C^n, Z = K_t, f = \varphi$ 有 $K_t \subseteq \varphi(\Omega)$. 从而 $\bigcup_{t=1}^{\infty} K_t \subseteq \varphi(\Omega)$. 故 $\overline{\Omega} = \overline{\bigcup_{t=1}^{\infty} K_t} \subseteq \overline{\varphi(\Omega)} \subseteq \overline{\Omega}$，即 $\overline{\varphi(\Omega)} = \overline{\Omega}$.

定理2 设 φ 是 Ω 到自身的解析映射，$\varphi(\Omega) = \Omega$，$\sup_{z \in \Omega} |\det J_\varphi(z)| < \infty$. 则复合算子 C_φ 在 Bergman 空间 $L_a^p(\Omega)$ 上是下有界的.

证明 设 $\sup_{z \in \Omega} |\det J_\varphi(z)| = M$. $\forall\ f \in H^p(\Omega)$，有 $\|f\|^p = \int_\Omega |f(z)|^p \mathrm{d}z = \int_{\varphi(\Omega)} |f(z)|^p \mathrm{d}z \leqslant \int_\Omega |f(\varphi(z))|^p |\det J_\varphi(z)| \mathrm{d}z \leqslant M \int_\Omega |f(\varphi(z))|^p \mathrm{d}z = M\|C_\varphi f\|^p$，即复合算子 C_φ 在 Bergman 空间 $L_a^p(\Omega)$ 上是下有界的.

参考文献：

[1] 陈怀惠. Bloch 空间上的复合算子的下有界性[J]. 中国科学：A 辑，2003，313(4)：289-296.

[2] 尤承业. 基础拓扑学讲义[M]. 北京：北京大学出版社，1997.

[3] 吴树宏. 单位 C^n 球上 Bloch 空间上复合算子的下有界性[J]. 应用泛函分析学报，2006，8(3)：233-239.

(责任编辑：尹 闯)

(上接第351页 Continue from page 351)

[3] 黄先开，向子贵. 具有时滞的 Duffing 型方程 $x''(t) + g(t, x(t-\tau)) = p(t) = p(t+T)$ 的2π 周期解[J]. 科学通报，1994，39(3)：201-203.

[4] 李建利，申建华. 具脉冲时滞的 Duffing 型方程的周期解[J]. 应用数学学报，2005，28(1)：124-133.

[5] WANG G Q. A periodic bounrs for periodic solutions of a delay Rayleigh equation [J]. Applied Mathematics Letters，1999，12：41-44.

[6] 鲁世平，葛渭高，郑祖庥. 具偏差变元的 Rayleigh 方程周期解的存在性[J]. 数学进展，2004，47(2)：299-304.

[7] 鲁世平，葛渭高. 一类具偏差变元的 Rayleigh 方程周期解问题[J]. 数学学报，2005，34(4)：425-434.

[8] 王志明，伍朝华，罗治国. 带有时滞的 Rayleigh 方程的周期解[J]. 长沙理工大学学报：自然科学版，2005，2(4)：74-79.

[9] 范良君. 一类具有偏差变元的 Duffing 型方程的周期解[J]. 湖南文理学院学报：自然科学版，2006，18(1)：10-12.

[10] GAINES R E，MAWHIN J L. Coincidence degree and nonlinear differential equations [M]. Berlin：springer-verlag，1997：568.

(责任编辑：邓大玉 尹 闯)