# $\tilde{\rho}$混合序列的不变原理

# An Invariance Principle for $\tilde{\rho}$-Mixing Random Seguences

谭成良,吴群英,胡光辉
TAN Cheng-liang,WU Qun-ying,HU Guang-hui

(桂林工学院数理系,广西桂林 541004)
(Department of Mathematics and Physics,Guilin Institute of Technology,Guilin,Guangxi,541004,China)

**摘要**:给出一类较广泛的$\tilde{\rho}$混合序列,证明在一定矩条件下,$\tilde{\rho}$混合序列的不变原理成立.所得的结果改进了已经报道的相关结果.

**关键词**:$\tilde{\rho}$混合序列 不变原理 矩条件

**中图法分类号**:O211.4 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2007)04-0360-02

**Abstract**:In this paper,$\tilde{\rho}$-mixing random sequences are considered,an invariance principle for $\tilde{\rho}$—mixing random sequencesis established. The results have improved the related reports in the literatures.

**Key words**:$\tilde{\rho}$-mixing sequence,invariance principle,moment condition

$\tilde{\rho}$混合序列是Bradley[1]提出来的.$\tilde{\rho}$混合序列的矩不等式,完全收敛性,不变原理和强大数定律在文献[2～4]中有所讨论.本文讨论$\tilde{\rho}$混合序列在一定矩条件下的不变原理,所得结果改进并推广了文献[2]中的相关结果.

## 1 相关定义与引理

设N为自然数集,$\{X_n;n\geqslant 1\}$是概率空间$(\Omega,\Psi,P)$上的随机变量序列,$\mathbb{F}_s=\sigma(X_i;i\in S\subset \mathrm{N})$,$\mathbb{F}_1^k\triangleq\sigma(X_i;i\leqslant k)$,$\mathbb{F}_{k+n}^\infty\triangleq\sigma(X_i;i\geqslant k+n)$为$\sigma$-域,记$L_p(\Psi)$为所有的$\Psi$可测且$p$阶矩有限的随机变量全体,在$\Psi$中给定$\sigma$域$\mathbb{F},\mathscr{U}$.令

$\rho(\mathbb{F},\mathscr{U})=\sup\{|\mathrm{corr}(X,Y)|;X\in L_2(\mathbb{F}),Y\in L_2(\mathscr{U})\}$.

其中$\mathrm{corr}(X,Y)=\dfrac{EXY-EXEY}{\sqrt{\mathrm{Var}X\mathrm{Var}Y}}$为相关系数,对$k\geqslant 0$,令$\rho(n)=\sup\limits_{k\in\mathrm{N}}\rho(\mathbb{F}_1^k,\mathbb{F}_{k+n}^\infty)$.

定义$\tilde{\rho}(n)=\sup\{\rho(\mathbb{F}_s,\mathscr{U}_T)$;有限子集$S,T\subset\mathrm{N}$,且$\mathrm{dist}(S,T)\geqslant n\}$.其中$\mathrm{dist}(S,T)$表示集合$S,T$的距离.显然$0\leqslant\tilde{\rho}(n+1)\leqslant\tilde{\rho}(n)\leqslant 1,\tilde{\rho}(0)=1$.

**定义1**[5] 对随机序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$,如果存在$n_0\geqslant 1$,使得$\tilde{\rho}(n_0)<1$,则称$\{X_n,n\geqslant 1\}$是$\tilde{\rho}$混合序列.

**引理1**[6] 设$\{X_i;i\geqslant 1\}$为$\tilde{\rho}$混合序列,$EX_i=0,E|X_i|^q<\infty,q\geqslant 2$.则存在一个仅与$\tilde{\rho}$和$p$有关的正常数$C$有:

$$E\max_{1\leqslant k\leqslant n}|\sum_{i=1}^k X_i|^q\leqslant C\{\sum_{i=1}^n E|X_i|^q+(\sum_{i=1}^n EX_i^2)^{\frac{q}{2}}\}. \tag{1.1}$$

## 2 主要结果和证明

**定理1** 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是强平稳的$\tilde{\rho}$混合序列,满足$EW_n^2(t)\to t,EX_n=b_n,\exists\,\delta>0$,使$\sup\limits_{n\geqslant 1}E|X_n|^{2+\delta}=\sigma<\infty,a^2=\mathrm{var}X_1+2\sum\limits_{j=2}^\infty\mathrm{cov}(X_1,X_j)>0$,且$\sum\limits_{i=1}^n EX_i^2\leqslant Cn$,其中$C$是常数,记$S_n\triangleq\sum_{i=1}^n X_i$,$W_n(t)\triangleq$

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^m(X_j-b_j)+(nt-m)(X_{m+1}-b_j)}{an^{1/2}},m\leqslant nt<$$

收稿日期:2007-04-23
修回日期:2007-06-28
作者简介:谭成良(1982-),男,硕士研究生,主要从事概率极限理论研究。
*国家自然科学基金项目(10661006)资助。

$m+1, 0 \leqslant t \leqslant T$,

则 $W_n(t) \Rightarrow W, n \to \infty$,其中 $W(t)$ 为标准的 Wiener 过程.

**证明** 不失一般性,可设 $EX_n = b_n = 0$,由文献[7]中的定理 20.1 知,要证明定理 1,只需证明 $\forall \varepsilon > 0$,存在 $\lambda > 2$ 及 $N_0$,使得当 $n \geqslant N_0$ 时,有

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \lambda a n^{1/2}) \leqslant \varepsilon/\lambda^2. \quad (2.1)$$

另外由于是强平稳的 $\tilde{\rho}$ 混合序列,由文献[7]中定理 20.1 的证明可知 $EW_n^2(t) \to t$. 令 $Y_j(n) \triangleq X_j I(|X_j| \leqslant n^{1/2}), T_k \triangleq \sum_{j=1}^{k} Y_j(n), k = 1,2,\cdots,n$.

因为

$$\{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \lambda a n^{1/2}\} = \{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \lambda a n^{1/2}\} \cap \{(\bigcup_{j=1}^{n}(|X_j| > n^{1/2})) \cup (\bigcap_{j=1}^{n}(|X_j| \leqslant n^{1/2}))\} \subset ((\bigcup_{j=1}^{n}(|X_j| > n^{1/2})) \cup \{\max_{1\leqslant k\leqslant n} |T_k| \geqslant \lambda a n^{1/2}\},$$

所以

$$P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \lambda a n^{1/2}) \leqslant P(\bigcup_{j=1}^{n}(|X_j| > n^{1/2})) + P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |T_k| \geqslant \lambda a n^{1/2}) \leqslant \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| > n^{1/2}) + P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |T_k - ET_k| \geqslant \lambda a n^{1/2}/2) + P(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |ET_k| \geqslant \lambda a n^{1/2}/2) \triangleq I_1 + I_2 + I_3. \quad (2.2)$$

由 $\sup_{n\geqslant 1} E|X_n|^{2+\delta} = \sigma < \infty$,得 $\sup_{n\geqslant 1} EX_n^2 < \infty$. 由此得

$$I_1 = \sum_{j=1}^{n} P(|X_j| > n^{1/2}) \leqslant \sup_{j\geqslant 1} nP(|X_j| > n^{1/2}) \leqslant \sup_{j\geqslant 1} EX_j^2 I(|X_j| > n^{1/2}) \to 0, (n \to \infty).$$

所以对任意给定的 $\varepsilon > 0$,当 $n$ 充分大时,有

$$I_1 \leqslant \varepsilon/(2\lambda^2). \quad (2.3)$$

由 Markov 不等式和引理 1 得

$$I_2 \leqslant 8\lambda^{-3} a^{-3} n^{-3/2} E(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |T_k - ET_k|)^3 \ll 8\lambda^{-3} a^{-3} n^{-3/2} \{\sum_{i=1}^{n} E|Y_i - EY_i|^3 + (\sum_{i=1}^{n} E(Y_i - EY)^2)^{3/2}\}, \quad (2.4)$$

又由 $c_r$ 不等式及定理条件 $\sup_{n\geqslant 1} E|X_n|^{2+\delta} = \sigma < \infty$,得

$$\sum_{i=1}^{n} E|Y_i - EY_i|^3 \leqslant n \sup_{1\leqslant i\leqslant n} E|Y_i - EY_i|^{2+\delta} |Y_i - EY_i|^{1-\delta} \leqslant n^{(3-\delta)/2} 2^{2+\delta} \sup_{1\leqslant i\leqslant n} E|X_i|^{2+\delta} \leqslant n^{(3-\delta)/2} 2^{2+\delta} \sigma, \quad (2.5)$$

由条件 $\sum_{i=1}^{n} EX_i^2 \leqslant Cn$,得

$$(\sum_{i=1}^{n} E(Y_i - EY)^2)^{3/2} \leqslant (\sum_{i=1}^{n} EX_i^2)^{3/2} \leqslant C^{3/2} n^{3/2}, \quad (2.6)$$

把(2.5)式,(2.6)式代入(2.4)式得

$$I_2 \leqslant 8\lambda^{-3} a^{-3} C (2^{2+\delta} \sigma n^{-\delta/2} + C^{3/2}),$$

所以当 $n$ 和 $\lambda$ 充分大时有

$$I_2 \leqslant \varepsilon/(2\lambda^2). \quad (2.7)$$

最后由 $EX_i = 0$,得 $EX_i I(|X_i| \leqslant n^{1/2}) = -EX_i I(|X_i| > n^{1/2})$,且注意到 $\sup_{i\geqslant 1} EX_i^2 < \infty$,有

$$n^{-1/2} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |ET_k| = n^{-1/2} \max_{1\leqslant k\leqslant n} |E\sum_{i=1}^{k} Y_i| \leqslant n^{1/2} \sup_{i\geqslant 1} |EY_i(n)| = n^{1/2} \sup_{i\geqslant 1} |EX_i I(|X_i| \leqslant n^{1/2})| = n^{1/2} \sup_{i\geqslant 1} |EX_i I(|X_i| > n^{1/2})| \leqslant n^{1/2} \sup_{i\geqslant 1} E|X_i| I(|X_i| > n^{1/2}) \leqslant \sup_{i\geqslant 1} EX_i^2 I(|X_i| > n^{1/2}) \to o(n \to \infty).$$

由此得当 $n$ 充分大时 $\max_{1\leqslant k\leqslant n} |ET_k| < \lambda a n^{1/2}/2$,即当 $n$ 充分大时 $(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |ET_k| < \lambda a n^{1/2}/2 = \varnothing$,其中 $\varnothing$ 表示空集. 故当 $n$ 充分大时,有 $I_3 = 0$.

因此定理1得证.

**参考文献:**


[1] BRADLEY R C. Eqnivalent mixing conditions for random fields [M]. Chapel Hill: Technical Roport No 336, Center for Stochastic Processes, Univ of North Carolina, 1990.

[2] 吴群英. $\tilde{\rho}$ 混合序列的不变原理[J]. 纯粹数学和应用数学, 2003, 19(1): 12-15.

[3] 吴群英. $\tilde{\rho}$ 混合序列的若干收敛性质[J]. 工程数学学报, 2001, 18(3): 58-64, 50.

[4] 杨善朝. 一类随机变量部分和的矩不等式及其应用[J]. 科学通报, 1998, 43(17): 1824-1827.

[5] 吴群英. 混合序列的概率极限理论[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[6] UTEV S, PELIGRAD M. Maximal inequalities and an invariance principle for a class of weakly dependent random variables[J]. J Theoet Probab, 2003(16): 101-115.

[7] BILLINGSLEY E. Convergence of probability measures [M]. New York: Wiley, 1968.


(责任编辑:韦廷宗)