广西科学 Guangxi Sciences 2007,14(4):362～364

Linex 损失下 Rayleigh 分布参数倒数的 Bayes 估计*

The Bayes Estimation of Rayleigh Distribution Parameter Reciprocal Under Linex Loss

陈志强,韦程东,韦莹莹

CHEN Zhi-qiang,WEI Cheng-dong,WEI Ying-ying

(广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁 530001)

(Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning,Guangxi,530001,China)

摘要:在 Linex 损失函数 $L(\theta,\delta)=e^{c(\delta-\theta)}-c(\delta-\theta)-1,c>0$ 下,给出 Rayleigh 分布的尺度参数倒数的唯一 Bayes 估计 $\delta_B(X)=-\frac{1}{c}\ln E(\mathrm{e}^{-c\theta}|X)=\frac{n+\alpha}{c}\ln(1+\frac{c}{\lambda+T})$,多层 Byaes 估计 $\hat{\delta}_B(X)=-\frac{1}{c}\ln(\frac{\int_0^c\int_0^1\frac{K\lambda^\alpha}{(\lambda+c+T)^{n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\lambda}{\int_0^c\int_0^1\frac{K\lambda^\alpha}{(\lambda+T)^{n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda})$,和容许性估计的一般形式 $S\ln(1+\frac{c}{d+T})$.

关键词:Linex 损失函数 Rayleigh 分布 Byaes 估计 容许性

中图法分类号:O212.1 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2007)04-0362-03

Abstract:Under Linex loss function $L(\theta,\delta)=e^{c(\delta-\theta)}-c(\delta-\theta)-1,c>0$, It is proved that the unique Bayes estimator $\delta_B(x)$, the multilayer Bayes estimator $\hat{\delta}_B(X)$ and the general form of the admissible estimator are $\delta_B(X)=-\frac{1}{c}\ln E(\mathrm{e}^{-c\theta}|X)=\frac{n+\alpha}{c}\ln(1+\frac{c}{\lambda+T})$, $\hat{\delta}_B(X)=-\frac{1}{c}\ln(\frac{\int_0^c\int_0^1\frac{K\lambda^\alpha}{(\lambda+c+T)^{n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\lambda}{\int_0^c\int_0^1\frac{K\lambda^\alpha}{(\lambda+T)^{n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda})$ and $S\ln(1+\frac{c}{d+T})$ respectively for the scale parameter reciprocal of the Rayleigh distribution.

Key words:Linex loss function,Rayleigh distribution,Baysian estimator,admissible

Rayleigh 分布 $R(\mu,\sigma)$[1] 是很重要的寿命分布,它是威布尔分布 $W(\mu,\alpha,\beta)$[2] 的重要成员,其密度函数为

$$f(x,\mu,\sigma)=\frac{2(x-\mu)}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma}},x>\mu. \quad (1)$$

其中,$-\infty<\mu<+\infty$ 为位置参数,$\sigma>0$ 为尺度参数.在可靠性分析中,$f(x,\mu,\sigma)$ 实际上是危险率函数 $h(x)=\frac{2(x-\mu)}{\sigma}$ 所对应的寿命的密度函数.

设随机变量 X 服从 Rayleigh 分布,$X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本,则其联合概率密度为

$$f(x|\mu,\sigma)=2^n(\frac{1}{\sigma})^n\prod_{i=1}^n(x_i-\mu)\mathrm{e}^{-(\frac{1}{\sigma})^n\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2},$$
$x>\mu$.

若记 $\theta=\frac{1}{\sigma}$,则有

$$f(x|\mu,\theta)=2^n\theta^n\prod_{i=1}^n(x_i-\mu)\mathrm{e}^{-\theta^n\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2},x>\mu. \quad (2)$$

取损失函数为 Linex 损失函数

$$L(\theta,\delta)=\mathrm{e}^{c(\delta-\theta)}-c(\delta-\theta)-1,c\neq 0. \quad (3)$$

显然,$L(\theta,\delta)$ 是 θ 的严格凸函数.在 $c>0$ 时,若 $(\delta-\theta)>0$,则函数呈指数级增长,若 $(\delta-\theta)<0$ 则呈线性增长,而 $c<0$ 时恰好相反.

本文仅在 $c>0$ 的情形下,并假设 μ 已知时,探讨 θ 的估计问题和 $d>0$,且令 $S^*=\frac{n}{c}$ 时估计量 $S\ln(1$

收稿日期:2007-07-04

作者简介:陈志强(1983-),男,硕士研究生,从事概率论与数理统计研究。

* 广西自然科学基金项目(0575051),广西教育厅科研项目资助。

$+\frac{c}{d+T})$ 的容许性.

1 θ 的 Bayes 估计

定理1.1 在损失函数(3)下,对于 θ 的任意先验分布 $\pi(\theta)$,θ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(X)=-\frac{1}{c}\ln E(\mathrm{e}^{-c\theta}|X). \tag{4}$$

且是 θ 的唯一的 Bayes 估计.

证明 令 $\delta(X)$ 是 θ 的任一 Bayes 估计,则在损失函数(3)下,θ 的 Bayes 风险为

$$R_\pi(\delta)=EL(\theta,\delta(X))=E(\mathrm{e}^{c(\delta(X)-\theta)}-c(\delta(X)-\theta)-1)=E\{E(\mathrm{e}^{c(\delta(X)-\theta)}-c(\delta(X)-\theta)-1)|X\}=E\{\mathrm{e}^{c\delta(X)}E(\mathrm{e}^{-c\theta}|X)-c\delta(X)+c\,E(\theta|X)-1\}.$$

要使 $R_\pi(\delta)$ 最小,则只需 $\mathrm{e}^{c\delta(X)}E(\mathrm{e}^{-c\theta}|X)-c\delta(X)+cE(\theta|X)-1$ 最小. 为此,令 $h(t)=\mathrm{e}^{ct}E(\mathrm{e}^{-c\theta}|X)-ct+cE(\theta|X)-1$, 再令 $h'(t)=0$, 则当 $t=-\frac{1}{c}\ln E(\mathrm{e}^{-c\theta}|X)$ 时 $R_\pi(\delta)$ 有极小值,所以 θ 的 Bayes 估计为 $\delta_B(X)=-\frac{1}{c}\ln E(\mathrm{e}^{-c\theta}|X)$.

又由于 $h(t)$ 是关于 t 的严格凸函数,所以 $\delta_B(X)$ 是 θ 唯一的极小值点,进而,$\delta_B(X)$ 是其唯一的 Bayes 估计.

取 $Ga(\alpha,\lambda)$ 为参数 θ 的共轭先验分布. $Ga(\alpha,\lambda)$ 的密度函数为

$$\pi(\theta)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda\theta},\alpha>0,\lambda>0,\theta>0. \tag{5}$$

定理1.2 对于 Rayleigh 分布,密度函数由(1)式给出,当 θ 的先验分布取 $Ga(\alpha,\lambda)$ 时,在损失函数(3)下,参数 θ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(X)=-\frac{1}{c}\ln E(\mathrm{e}^{-c\theta}|X)=\frac{n+\alpha}{c}\ln(1+\frac{c}{\lambda+T}). \tag{6}$$

其中 $T=\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2$.

证明 θ 后验密度为

$$h(\theta|x)=\frac{f(x|\mu,\theta)\pi(\theta)}{\int_0^{+\infty}f(x|\mu,\theta)\pi(\theta)\,\mathrm{d}\theta}=\frac{(\lambda+T)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\lambda+T)\theta},$$

其中记 $T=\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2$. 可见 θ 的后验分布服从参数分别为 $n+\alpha$ 和 $\lambda+T$ 的 Gamma 分布 $Ga(n+a,\lambda+T)$. 此时,

$$E(\mathrm{e}^{-c\theta}|X)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-c\theta}h(\theta|x)\,\mathrm{d}\theta=\frac{(\lambda+T)^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)}\int_0^{+\infty}\theta^{n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\lambda+c+T)\theta}\mathrm{d}\theta=(\frac{\lambda+T}{\lambda+c+T})^{n+\alpha}.$$

通过(4)式,

$$\delta_B(X)=-\frac{1}{c}\ln(\frac{\lambda+T}{\lambda+c+T})^{n+\alpha}=\frac{n+\alpha}{c}\ln(1+\frac{c}{\lambda+T}).$$

在这种情况下,$\delta_B(X)$ 中仍然含有超参数 a,λ,若无历史经验,a,λ 仍是未知的. 此时,若将 a,λ 看成随机变量,选择合适的先验分布,则可求出 θ 的多层 Bayes 估计.

通过对 Rayleigh 分布的分析,选取减函数法构造超参数 a,λ 的先验分布[3]. 对先验分布 $Ga(a,\lambda)$ 密度函数关于 θ 求导数并令其小于0,可得,当 $0<a<1,\lambda>0$ 时,$\pi(\theta|a,\lambda)$ 为减函数. 故可取 a,λ 的先验分布分别为均匀分布

$$\pi^*(a)=U(0,1),\pi^*(\lambda)=U(0,c), \tag{7}$$

其中 c 为常数. 对这样的两层先验分布,θ 的两层 Bayes 估计由以下定理1.3给出.

定理1.3 对于 Rayleigh 分布,密度函数由(1)式给出,当给定(5)式,(7)式为 θ 的先验分布,在损失函数(3)下,θ 的两层 Bayes 估计为

$$\delta_B(X)=-\frac{1}{c}\ln(\frac{\int_0^c\int_0^1\frac{K\lambda^\alpha}{(\lambda+c+T)^{n+\alpha}}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\lambda}{\int_0^c\int_0^1\frac{K\lambda^\alpha}{(\lambda+T)^{n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda}), \tag{8}$$

其中 $K=\prod_{k=1}^n(n+\alpha-k),T=\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2$.

证明 由(5)式,(7)式可知,θ 的先验分布

$$\pi(\theta)=\int_0^c\int_0^1\pi^*(\alpha)\pi^*(\lambda)\pi(\theta|\alpha,\lambda)\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda=\int_0^c\int_0^1\frac{1}{c}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda\theta}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\lambda.$$

从而,θ 的后验密度为

$$h(\theta|x)=\frac{\pi(\theta)f(x|\mu,\theta)}{\int_0^{+\infty}\pi(\theta)f(x|\mu,\theta)\,\mathrm{d}\theta}=\frac{\int_0^c\int_0^1\frac{(\lambda)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\lambda+T)\theta}\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\lambda}{\int_0^{+\infty}\int_0^c\int_0^1\frac{(\lambda)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\lambda+T)\theta}\,\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta}.$$

其中 $T=\sum_{i=1}^n(X_i-\mu)^2$. 则此时

$$E(\mathrm{e}^{-c\theta}|X)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-c\theta}h(\theta|x)\mathrm{d}\theta=\frac{\int_0^{+\infty}\int_0^c\int_0^1\frac{(\lambda)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\lambda+c+T)\theta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta}{\int_0^{+\infty}\int_0^c\int_0^1\frac{(\lambda)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(\lambda+T)\theta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}\theta}=$$

$$\frac{\int_0^c\int_0^1 \frac{\lambda^\alpha\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(\lambda+c+T)^{n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\lambda}{\int_0^c\int_0^1 \frac{\lambda^\alpha\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(\lambda+T)^{n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\lambda}=$$

$$\frac{\int_0^c\int_0^1 \frac{K\lambda^\alpha}{(\lambda+c+T)^{n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda}{\int_0^c\int_0^1 \frac{K\lambda^\alpha}{(\lambda+T)^{n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda}.$$

其中记 $K=\prod_{k=1}^{n}(n+\alpha-k)$，则由定理1.1，$\theta$ 的两层 Bayes 估计

$$\hat{\delta}_B(X)=$$

$$-\frac{1}{c}\ln\left(\frac{\int_0^c\int_0^1 \frac{K\lambda^\alpha}{(\lambda+c+T)^{n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\lambda}{\int_0^c\int_0^1 \frac{K\lambda^\alpha}{(\lambda+T)^{n+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\lambda}\right).$$

通过数值积分可得到 θ 的两层 Bayes 估计 $\hat{\delta}_B(X)$.

2 估计量 $S\ln(1+\frac{c}{d+T})$ 的容许性

由上面的讨论可知，在适当的 Γ-先验分布下，此类估计都是 θ 的 Bayes 估计，都具有形式 $S\ln(1+\frac{c}{d+T})$. $S\ln(1+\frac{c}{d+T})$ 的可容许性与 S、c 和 d 有关. 令 $S^*=\frac{n}{c}, c>0, d>0$.

引理2.1[4] 在给定的 Bayes 决策问题中，假如对给定的先验分布 $\pi(\theta)$ 的 Bayes 估计 $\delta_B(X)$ 是唯一的，则它是容许的.

定理2.1 当 $S>S^*$ 时，估计量 $S\ln(1+\frac{c}{d+T})$ 是可容许的.

证明 在损失函数(3)下，我们证明了 θ 有唯一的 Bayes 解

$$\delta_B(X)=-\frac{1}{c}\ln E(\mathrm{e}^{-c\theta}|X)=\frac{n+\alpha}{c}\ln(1+\frac{c}{\lambda+T}),$$

其中 $T=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$. 此时，先验分布密度

$$\pi(\theta)\propto\theta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda\theta},\theta>0,\alpha>0,\lambda>0.$$

当 $S>S^*, d>0$ 时，则令

$$\alpha=Sc-n,\lambda=d.$$

则由定理1.2，θ 的 Bayes 估计为 $S\ln(1+\frac{c}{d+T})$，且又是唯一的 Bayes 解，再由引理2.1可知 $\delta_B(X)$ 是可容许的.

参考文献：

[1] LIN JINGUAN. Parameter estimations of Rayleigh distribution[J]. Mathematical Quarterly, 2000, 15(4): 49-54.

[2] 方开泰，许建伦. 统计分布[M]. 北京：科学出版社，1987.

[3] 韩明. 多层先验分布的构造及其应用[J]. 运筹学与管理，1997, 6(3): 31-40.

[4] 茆诗松，王静龙，濮晓龙. 高等数理统计[M]. 北京：高等教育出版社，2006.

（责任编辑：尹　闯）

金纳米颗粒微观结构首次得到揭示

实验室中经常用金纳米颗粒作为示踪剂，比如探测样本中是否存在某种DNA或者蛋白质。为了防止不同金纳米颗粒的原子之间形成化学键，科学家经常在金纳米颗粒表面覆盖一层保护性分子层，最常用的是含硫的分子团。如果改造这些含硫分子团，使其具有特殊的绑定位点或者荧光标记，观察和区分金纳米颗粒将更加容易。尽管如此，科学家对金纳米颗粒的结构却没有清晰的认识，有认为金纳米颗粒是胶质的，形状杂乱，大小不一，有的认为它们是具有同一尺寸和结构的离散分子。

在最新的研究中，美国斯坦福大学 Roger Kornberg 领导的小组成功制备出有单层硫醇保护的金纳米颗粒晶体，并利用X射线结晶学技术，首次对它们的精确结构进行了成像。值得注意的是，制备晶体和确定结构一样，都是突破性的进展。他们研究的金纳米颗粒由102个金原子和44个硫醇分子组成，其中，金原子排列成球状。金纳米颗粒中心周围却环绕着两个"盖子"，每个都是由15个轻微扭曲的金原子组成，硫醇分子团会与最外层的金原子结成一体，它再与最中心金原子发生微弱的相互作用。金纳米颗粒是手性的。这项新的研究有望最终打消人们对纳米颗粒及其毒性的疑虑。

（据科学网）