广西科学 Guangxi Sciences 2007,14(4):367～370

4种模糊标度的一致性容量研究*

Analyzing for the Quantity of the Consistency Judgment Matrixes with Four Fuzzy Scales

覃菊莹
QIN Ju-ying

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁　530004)
(College of Mathematics and Information Science,Guangxi University,Nanning,Guangxi,530004,China)

摘要:以4种模糊标度(0～1标度,0.1～0.9五标度,0.1～0.9标度*,0.1～0.9标度)建立的互补判断矩阵为研究对象,在分析其模糊一致性特征的基础上,给出差异一致性判断矩阵的一种等价分类方法和相应的等价类个数,提出一种合理使用这些标度的方法,并以实例说明该方法是合理的。

关键词:判断矩阵　模糊一致性　标度　层次分析法

中图法分类号:O223;O931　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1005-9164(2007)04-0367-04

Abstract:In this paper,the research object is the fuzzy complementary judgment matrixes by the four fuzzy scales:0～1 scale,0.1～0.9 five-scale,0.1～0.9 scale *,0.1～0.9 scale. After investigating the character of the fuzzy consistency,it gives an equivalent classifying method of the differ-consistency judgment matrix and the numbers of the equivalent classes. Furthermore,it puts forward a way to use the scales advisable,and explained by an example in the end.

Key words:judgment matrix,fuzzy consistency,scale,AHP

层次分析法[1,2]是一种实用性好的决策方法,近年来在我国得到了广泛应用.根据实际情况发展出多种不同的标度,其中主要有互反型和互补型两种[3~5].在实际应用中我们应该如何选择标度,即所谓的标度评价问题[6~8],是一项非常重要而且很有意义的工作.评价一种标度好坏的标准在一定程度上可反映为,当评判者的判断完全符合思维一致性时,由该标度得到的判断矩阵是否具有一致性.文献[9]已对互反型标度的一致性容量做了相应研究,但是关于模糊标度这方面的具体文章还未见报道.而模糊标度是现今常用的标度之一,所以本文对常用的4种标度(0.1～1标度,0.1～0.9五标度,0.1～0.9九标度*,0.1～0.9标度)的一致性容量进行研究,给出这4种标度下差异模糊一致性矩阵的个数和一种具体使用这4种标度的方法.为进一步评价这4种标度及研究它们的排序方法和一致性调整方法提供理论依据.

收稿日期:2007-05-11
修回日期:2007-06-29
作者简介:覃菊莹(1975-),女,讲师,主要从事应用数学,预测与决策方法研究。
*广西大学科研基金项目(X032016)资助。

1　有关概念与定理

定义 1[3]　设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,若有 $0\leqslant a_{ij}\leqslant 1$,则称矩阵 A 是模糊矩阵.

定义 2[3]　设有模糊矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,若有 $a_{ij}+a_{ji}=1$,则称矩阵 A 是模糊互补矩阵.

定义 3[3]　设有模糊互补矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,若对任意的 i,j,k 有 $a_{ij}=a_{ik}-a_{jk}+0.5$,则称矩阵 A 是模糊一致矩阵.

定义 4[10]　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为模糊一致互补判断矩阵,若 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$ 满足

(1)$a_{ij}=\alpha(w_i-w_j)+0.5$,其中 $\alpha\geqslant\dfrac{n-1}{2}$;

(2)$w_i\geqslant 0$,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}w_i=1$.

则称 w 为 A 的排序向量,且 $w_i=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{2\alpha}+\dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}}{n\alpha}$.

性质 1[11]　模糊互补矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为模糊一致矩阵的充要条件是:对任意的 i,j,k 有 $a_{ik}-a_{jk}=a_{ij}-0.5$.

由性质 1 显然可得出如下定义 5 和性质 2.

定义 5　若 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为模糊一致矩阵,则称

$a_{ij}-0.5$ 为第 i 行与第 j 行的行差. 同理,模糊一致性判断矩阵任意两列的按行对应元素之差相等,并称该差为这两列的列差.

性质 2 模糊一致性判断矩阵可由其某一行(某一列)元素唯一确定.

定义 6 若存在初等矩阵 I_{ij} 使得 $B=I_{ij}AI_{ij}$,则称 A 与 B 互为等价矩阵,或称 B 为 A 的等价矩阵,记为 $A\sim B$. 其中,I_{ij} 为单位矩阵第 i 行和第 j 行元素互换所得到的初等矩阵.

引理 1 模糊一致矩阵的等价矩阵仍是模糊一致矩阵.

证明 先对模糊一致矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 作 p,q 两行互换,得矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$,再作 p,q 两列互换,得矩阵 $C=(c_{ij})_{n\times n}$,则对任意的 j,有 $a_{pj}=b_{qj},a_{qj}=b_{pj}$;对 $\forall\ i\neq p,q$,有 $b_{ij}=a_{ij}$. 对任意的 i,有 $c_{ip}=b_{iq},c_{iq}=b_{ip}$;对 $\forall\ j\neq p,q$,有 $c_{ij}=b_{ij}$. 于是,

(1)$\forall\ i,j\neq p,q$,有 $c_{ij}=b_{ij}=a_{ij}$;

(2)$c_{pp}=b_{pq}=a_{qq}=0.5,c_{qq}=b_{qp}=a_{qq}=0.5$,$c_{pq}=b_{pp}=a_{qp},c_{qp}=b_{qq}=a_{pq}$,故 $c_{pq}=a_{qp}=1-a_{pq}=1-c_{qp}$;

(3)$\forall\ i\neq p,q$,有 $c_{ip}=b_{iq}=a_{iq},c_{pi}=b_{pi}=a_{qi}=1-a_{iq}=1-c_{ip}$,同理可证,$c_{iq}=a_{ip}=1-c_{qi}$.

所以,模糊一致矩阵的等价矩阵仍是模糊一致矩阵.

将 A 的所有等价矩阵构成的集合,即 A 的等价类记为 $[A]=\{B|A\sim B\}$. 当模糊一致矩阵 A,B 属同一等价类时,仅通过交换方案在矩阵中的位置,就可由判断矩阵 B 得到判断矩阵 A.

定义 7 设矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,若存在 $i,j\in\{1,2,\cdots,n\}$,对任意的 $1\leqslant k\leqslant n$ 有 $a_{ik}=a_{jk}$ 则称方案 i 与方案 j 无差异,或称矩阵中第 i 行与第 j 行无差异;否则称为有差异. 若矩阵中任意两行都有差异,则称该矩阵为差异矩阵,或称该矩阵具有差异性.

若在决策过程中,对方案两两进行比较得到的判断矩阵为差异矩阵时,所有方案之间都存在优劣差别;若有两方案在某一属性下无差别,此时只需用其中一个方案来比较即可,它的比较结果即为两个方案共同的比较结果,于是对判断矩阵有如下处理:

若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中第 i 行与第 j 行无差别,则将矩阵中的第 j 行和第 j 列划掉,得到一个 $n-1$ 阶矩阵;依此做法,最终会得到一个差异矩阵,并称此差异矩阵为矩阵 A 的核.

性质 3 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 具有一致性的充分必要条件是其核具有一致性.

由性质 3 可知一般模糊互补判断矩阵与其核的一致性相同,所以只要对差异判断矩阵的一致性进行讨论即可.

2 4 种模糊标度下一致性矩阵容量

表 1 的 4 种常用模糊标度中,0.1 ～ 0.9 标度 * 是由 0.1 ～ 0.9 五标度取中值得来,有些文献仍称其为五标度,因为其判断值有 9 个点可以选择,故本文将其列入九标度中,且在其后加个"*"号以便与后一种九标度法区别开来.

表1 4种模糊标度

Table 1 Four fuzzy scales

0～1 标度 0～1 Scale	0.1～0.9 五标度 0.1～0.9 Five-scale	0.1～0.9 标度 * 0.1～0.9 Scale *	0.1～0.9 标度 0.1～0.9 Scale	含义 Signification
0	0.1	0.1	0.1	表示乙元素极端重要于甲元素 Expresses B extreme importantly in A
		0.2	0.138	表示乙元素强烈重要于甲元素 Expresses B intense importantly in A.
	0.3	0.3	0.325	表示乙元素明显重要于甲元素 Expresses B obvious importantly in A
		0.4	0.439	表示乙元素稍微重要于甲元素 Expresses B lightly importantly in A
0.5	0.5	0.5	0.5	表示乙元素与甲元素同样重要 Expresses B similarly importantly in A
		0.6	0.561	表示甲元素稍微重要于乙元素 Expresses A lightly importantly in B.
	0.7	0.7	0.675	表示甲元素明显重要于乙元素 Expresses A obvious importantly in B.
		0.8	0.862	表示甲元素强烈重要于乙元素 Expresses A intense importantly in A
1	0.9	0.9	0.9	表示甲元素极端重要于乙元素 Expresses A extreme importantly in B.

引理 2 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为模糊一致性判断矩阵,则该矩阵必定有一行的所有元素均小于或等于 0.5,并称该行为最小行.

证明 设 $a_{pq}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}$,则对任意的 i,j 有 $a_{pq}-a_{ij}\geqslant 0$. 因为 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为模糊一致性判断矩阵,所以对任意的 i,j,k 有 $a_{ij}=a_{ik}-a_{jk}+0.5$. 即对任意的 $1\leqslant j\leqslant n$,有 $a_{pq}=a_{pj}-a_{qj}+0.5$,于是 $a_{qj}=a_{pj}-a_{pq}+0.5=0.5-(a_{pq}-a_{pj})\leqslant 0.5$.

推论 1 对模糊一致矩阵 A,B,若 $A\sim B$,则两矩阵的最小行元素构成的集合相同.

2.1 0 ～ 1 标度下一致性矩阵的容量

定理 1 当 $n=2$ 时,由 0 ～ 1 标度得到的差异模糊一致性判断矩阵的等价类有 1 个,所有差异模糊一致性判断矩阵为 2 个;当 $n>3$ 时,由该标度得到的一致性判断矩阵已不具有差异性.

如表 1,该标度值集合为{0,0.5,1},由引理 1 可知,其所有差异一致性判断矩阵的最小行元素只能在{0,0.5}中选取,又对角线元素为 0.5,所以,最小行其它元素只能选 0. 再由矩阵的差异性可知差异矩阵最高只能有 2 阶.

2.2 0.1～0.9 五标度下一致性矩阵的容量

在 0.1～0.9 五标度下,差异一致性判断矩阵的最小行元素除对角线元素固定取 0.5 外,其它元素只能从{0.1,0.3}中得到. 所以有如下定理 2.

定理 2 (1)当 $n=2$ 时,由 0.1～0.9 五标度构造的差异模糊一致性判断矩阵有 $C_2^1=2$ 个等价类,所有差异模糊一致性判断矩阵为 $2P_2^2=4$ 个;

(2)当 $n=3$ 时,由该标度可构造的差异模糊一致性判断矩阵有 $C_2^2=1$ 个等价类,所有差异模糊一致性判断矩阵为个 $P_3^3=6$;

(3)当 $n\geqslant 4$ 时,由该标度得到的一致性判断矩阵已不具有差异性.

2.3 0.1～0.9 标度 * 下一致性矩阵的容量

在 0.1～0.9 标度 * 下,差异一致性判断矩阵的最小行元素除对角线元素固定取 0.5 外,其它元素只能从{0.1,0.2,0.3,0.4}中得到. 所以有如下定理 3 成立.

定理 3 (1)当 $n=2$ 时,由 0.1～0.9 标度 * 得到的差异模糊一致性判断矩阵有 $C_4^1=4$ 个等价类,所有差异模糊一致性判断矩阵为 $4P_2^2=8$ 个;

(2)当 $n=3$ 时,由该标度得到的差异模糊一致性判断矩阵有 $C_4^2=6$ 个等价类,所有差异模糊一致性判断矩阵为 $6P_3^3=36$ 个;

(3)当 $n=4$ 时,由该标度得到的差异模糊一致性判断矩阵有 $C_4^3=4$ 个等价类,所有差异模糊一致性判断矩阵为 $4P_4^4=96$ 个;

(4)当 $n=5$ 时,由该标度得到的差异模糊一致性判断矩阵有 $C_4^4=1$ 个等价类,所有差异模糊一致性判断矩阵为 $P_5^5=120$ 个;

(5)当 $n\geqslant 6$ 时,由该标度得到的一致性判断矩阵已不具有差异性.

2.4 0.1～0.9 标度下一致性矩阵的容量

在 0.1～0.9 标度下,差异一致性判断矩阵的最小行元素除对角线元素固定取 0.5 外,其它元素只能从{0.1,0.138,0.325,0.439}中得到;当 $n\geqslant 3$ 时,不妨设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是模糊一致矩阵,其第一行为最小行,即 $a_{1k}\in\{0.1,0.138,0.325,0.439,0.5\}$,则对任意的 i,j,k 有 $a_{ij}=a_{ik}-a_{jk}+0.5$,且 $a_{jk}=a_{1k}-a_{1j}+0.5$,但经计算可知,对任意的 $a_{1j},a_{1k}\in\{0.1,0.138,0.325,0.439,0.5\}$,且 $a_{1j}\neq a_{1k}$,都有 $a_{1k}-a_{1j}+0.5\notin\{0.1,0.138,0.325,0.439,0.5,0.561,0.675,0.862\}$,所以有如下定理 4.

定理 4 (1)当 $n=2$ 时,由 0.1～0.9 标度得到的差异模糊一致性判断矩阵有 $C_4^1=4$ 个等价类,所有差异模糊一致性判断矩阵为 $4P_2^2=8$ 个;

(2)当 $n\geqslant 3$ 时,由该标度得到的差异模糊判断矩阵不具有一致性.

以上4种标度的差异一致性矩阵讨论结果如表2所示.

表2 4种标度的差异模糊一致性矩阵的个数

Table 2 The number of differ-consistency matrix with four fuzzy scales

差异模糊一致性矩阵的阶数 The order of differ-consistency matrix	类别 Sort	差异模糊一致性矩阵的个数 The number of differ-consistency matrix			
		0～1标度 0～1 Scale	0.1～0.9五标度 0.1～0.9 Five-scale	0.1～0.9标度 * 0.1～0.9 Scale *	0.1～0.9标度 0.1～0.9 Scale
$n=2$	a	1	2	4	4
	b	2	4	8	8
$n=3$	a	以下无 None below	1	6	以下无 None below
	b		6	36	
$n=4$	a		以下无 None below	4	
	b			96	
$n=5$	a			1	
	b			120	
$n\geqslant 6$	a			以下无 None below	
	b				

a. 等价类;b. 所有矩阵。

a. Equivalence class; b. All matrix.

由表2可知,这4种标度构造一致性矩阵能力最好的是0.1～0.9九标度 *,但即便是使用0.1～0.9九标度 *,当备择方案个数超过5个且要体现方案两两之间的差异时,即使专家的判断具有差异性且满足思维一致的,由这些标度也没法构造出5阶以上的差异一致性矩阵来,此时部分判断元素值已不能真实反映专家的判断,若通过判断矩阵直接计算出各候选方案的排序权重,或依据此排序权重对不一致的判断矩阵进行一致性调整显然都是不恰当的[12～15]. 如文献[12]给出的调整方法,虽然能够较好的保留专家信息和保持较好的一致性,但是也不能修正这种由标度本身局限造成的部分判断元素失真,也就无法保证最终调整后的矩阵是专家正确的客观表述结果. 而目前由模糊互补判断矩阵求排序权重值的方法还有另外两种途径:(1)对模糊互补判断矩阵实施变换,使之变成模糊一致矩阵再用方根法、按行求和归一化法等求得排序权重;(2)通过让 $\alpha(w_i-w_j)$ 去逼近判断矩阵中的元素 a_{ij},使用最小二乘法求得排序权值. 途径(1)的关

键是在构造模糊一致判断矩阵,这一过程相当于使用了新的标度;而由途径(2)求出的排序值得到的一致矩阵也无法修正这种由标度本身局限造成的部分判断元素失真.因而,在上述情况下,利用这些方法求出的排序权值能不能反映专家的真实判断仍有待商榷.

3 根据标度容量合理使用标度的一种方法

由以上研究可知,当备选方案的个数超过所选标度自身的差异一致性矩阵的最高阶数时,所得的判断矩阵按正常的检验方法得到的结论一定是不一致的,显然此类问题在任何一种标度中都会存在,但这并不表示专家所作出的判断是不一致的.

例如,有一组方案选用的是0.1～0.9标度 *,所得判断矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.7 & 0.8 & 0.9 \\ 0.3 & 0.5 & 0.6 & 0.7 \\ 0.2 & 0.4 & 0.5 & 0.6 \\ 0.1 & 0.3 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

显然该矩阵具有一致性,专家的判断满足一致性.

但若选用0～1标度表示该同样的判断,则得判断矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

显然按正常的判别方法(性质1),可知其已不具有一致性.于是,同一个判断因为选取的标度不同出现了关于一致性的矛盾结果.

因此,为避免出现这种情况,就应该尽可能选取一致性容量大的标度,并在选定标度情况下(不论是互补型还是互反型的),可采取以下做法:

(1)将备选方案进行分组,使得同组方案两两之间的差异程度能通过该标度表示出来,即方案的个数小于或等于所选标度自身的差异一致性矩阵的最高阶数,并且每两组方案中至少有一共同方案.

(2)对每一组方案计算其排序权重的差值,合成分组比较结果.

在上例中,若选择 0.1 ～ 0.9 标度 *,由判断矩阵(1),及定义 4 有 $w_i = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{\sum_{j=1}^{4} a_{ij}}{4\alpha}$,取 $\alpha = 2$,算出排序权重为 $w = (0.3625, 0.2625, 0.2125, 0.1625)$.

但若选择 0 ～ 1 标度,则因该标度的差异一致性矩阵的最高阶数为 2,故可将方案分为 AB, BC, CD 3 组,得到比较矩阵均为 $\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$. 由定义 4 有 $w_1 - w_2 = \frac{a_{12} - 0.5}{\alpha} = \frac{0.5}{\alpha} = w_2 - w_3 = w_3 - w_4$, $\sum_{i=1}^{4} w_i = 1$,解得合成排序向量为

$$w = (0.25 + \frac{3}{4\alpha}, 0.25 + \frac{1}{4\alpha}, 0.25 - \frac{1}{4\alpha}, 0.25 - \frac{3}{4\alpha}). \qquad (3)$$

当取 $\alpha = 4$,得 $w = (0.4375, 0.3125, 0.1875, 0.0625)$.

当取 $\alpha = \frac{20}{3}$,得 $w = (0.3625, 0.2875, 0.2125, 0.1375)$,与选择 0.1 ～ 0.9 标度 * 的结果近似.

由(3)式可知,α 的取值越大,方案之间的权值差异越小,且不会改变方案之间原有的偏序关系.因此,采用以上方法合成排序向量具有以下优点:(1)不改变方案的偏序结果;(2)可根据需要取不同的 α 值,放大或缩小方案排序权值的差距.

若由于客观条件无法实现以上做法,即专家已把所有方案的比较结果都反映在一个矩阵中,此时还可以采取其它办法来识别这一类仅由于标度自身容量的原因才具有不一致性的判断矩阵.限于篇幅,该类矩阵的识别及排序方法作者将另文具体讨论.

参考文献:

[1] SAATY T L. The analytic hierechy process[M]. New York:MoCraw-Hill,1980.

[2] 王莲芬,许树柏.层次分析法引论[M].北京:中国人民出版社,1990:9-18.

[3] 林钧昌,徐泽水.模糊 AHP 中一种新标度法[J].运筹与管理,1998,7(2):37-40.

[4] 徐泽水.AHP 中两类标度法的关系研究[J].系统工程理论与实践,1999,19(7):97-101.

[5] 张吉军.模糊层次分析法(FAHP)[J].模糊系统与数学,2000,14(2):80-88.

[6] 汪浩,马达.层次分析标度评价与标度方法[J].系统工程理论与实践,1993,13(15):24-26.

[7] 吕跃进.层次分析法标度系统评价研究:科学决策理论与方法[M].北京:海洋出版社,2001.

[8] 徐泽水.关于层次分析中几种标度的模拟评估[J].系统工程理论与实践,2000,20(7):58-62.

[9] 吕跃进.标度系统一致性矩阵容量的计算方法[J].数学的实践与认识,2003,33(9):102-107.

[10] 吕跃进.基于模糊一致矩阵的模糊层次分析法的排序[J].模糊系统与数学,2002,16(2):79-85.

[11] 姚敏,张森.模糊一致矩阵及其在软科学中的应用[J].系统工程,1997,15(2):54-56.

[12] 姜艳萍,樊治平.模糊互补判断矩阵一致性的调整方法[J].数学的实践与认识,2003,33(2):82-87.

[13] 徐泽水.模糊互补判断矩阵排序的一种算法[J].系统工程学报,2001,16(4),311-314.

[14] 张吉军.模糊互补判断矩阵排序的一种新方法[J].运筹与管理,2005,14(2):59-63.

[15] 侯福均,吴祈宗.I 型不确定数互补判断矩阵的一致性和排序研究[J].系统工程理论与实践,2005,25(10):60-66.

(责任编辑:尹　闯　韦廷宗)