广西科学 Guangxi Sciences 2007,14(4):374～377

# 一类无约束优化问题的非单调谱共轭梯度方法*

# A Class of Nonmonotone Spectral Conjugate Gradient Methods for Unconstrained Optimization

莫利柳,洪 玲,韦增欣
MO Li-liu,HONG Ling,WEI Zeng-xin

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(College of Mathematics and Information Science,Guangxi University,Nanning,Guangxi,530004,China)

**摘要**:结合文献[5]给出的求解非线性无约束优化问题的新公式 $\beta_k^{WYL}=[g_k^T(g_k-\frac{\|g_k\|}{\|g_{k-1}\|}g_{k-1})]/g_{k-1}^Tg_{k-1}$ 提出了一种新的非单调谱共轭梯度法,证明算法具有全局收敛性,并进行数值试验.数值试验结果表明,该方法具有良好的计算效能,特别适合于求解大规模无约束优化问题.

**关键词**:无约束优化 共轭梯度法 线搜索 全局收敛性

**中图法分类号**:O224 **文献标识码**:A **文章编号**:1005-9164(2007)04-0374-04

**Abstract**: According to the new formula $\beta_k^{WYL}=[g_k^T(g_k-\frac{\|g_k\|}{\|g_{k-1}\|}g_{k-1})]/g_{k-1}^Tg_{k-1}$ given in Reference[5],a new nonmonotone spectral conjugate gradient method line search technique is proposed in this paper. The global convergence of corresponding algorithm with the proposed line search is proved. Preliminary numerical results show that this method is very efficient and is suitable for solving Large-scale unconstrained optimization.

**Key words**: unconstrained optimization, spectral conjugate gradient method, nonmonotone line search, global convergence

共轭梯度法具有迭代简单和存贮空间需求低等特点,在求解大规模非线性优化问题上起到独特的作用.非线性无约束优化问题的一般形式为

$$\min\{f(x)\mid x\in R^n\},\tag{1}$$

其中 $f:R^n\to R$ 为连续可微的非线性函数,$f(x)$ 的梯度记为 $g(x)$. $f_k$ 表示 $f(x_k)$,$g_k$ 表示 $g(x_k)$.共轭梯度法的迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k+t_kd_k,\tag{2}$$

$$d_k=\begin{cases}-g_k,k=0,\\-g_k+\beta_kd_{k-1},k\geqslant 1,\end{cases}\tag{3}$$

其中 $d_k$ 为搜索方向,$t_k$ 为步长因子,由一些线性搜索产生,常用的步长规则主要有:Amijio 规则、Amijio-Goldstein 规则、弱 Wolfe-Powell(WWP) 规则和强 Wolfe-Powell(SWP) 规则[1],$\beta_k$ 为参数.一些著名的 $\beta_k$ 公式[2～4]有:

$$\beta_k^{FR}=\frac{\|g_k\|^2}{\|g_{k-1}\|^2},\tag{4}$$

$$\beta_k^{PRP}=\frac{g_k^T(g_k-g_{k-1})}{\|g_{k-1}\|^2},\tag{5}$$

最近,韦增欣等在文献[5]中提出了一个结合 FR 方法与 PRP 方法的共轭梯度法公式:

$$\beta_k^{WYL}=\frac{g_k^T(g_k-\frac{\|g_k\|}{\|g_{k-1}\|}g_{k-1})}{g_{k-1}^Tg_{k-1}}.\tag{6}$$

该方法在强 Wolfe-Powell 线搜索条件下具有充分下降性,并具有 $\beta_k^{WYL}\geqslant 0$ 的性质,同时在精确线搜索、Grippo-Lucidi 线搜索和 Wolfe-Powell 线搜索条件下都具有全局收敛性,其数值结果甚至要优于著名的 PRP 方法.

在解决大规模的非线性问题中,由于非单调线搜索方法不要求函数值在每一步迭代中单调下降.因此,非单调算法是一种比较有效的方法.在文献[6]中,Grippo,Lampariello 和 Lucidi 介绍了一种非单调牛顿方法,并分析了它的收敛性.在文献[7]中,Lucidi 和 Roma 提出了一种非单调 FR 方法.最近在文

**收稿日期**:2007-01-26
**修回日期**:2007-05-08
**作者简介**:莫利柳(1971-),女,讲师,主要从事最优化理论与方法研究工作。
*广西自然科学基金项目(No.05420434)资助。

献[8]中,Yu G H 和 Guan L T 提出了一类有效的非单调谱共轭梯度方法.受此启发,本文在文献[8]的非单调线搜索基础上,结合文献[5]的新 $\beta_k^{WYL}$ 公式,得出了一个具有全局收敛的非单调谱共轭梯度法.

## 1 算法

给出一个初始点 $x_0 \in R^n$. 令 $0 < \lambda_1 < \lambda_2, 0 < \rho_{\min} < \rho_{\max} < 1, \sigma_1, \sigma_2$ 为正常数, $M$ 为正整数, $\{\varepsilon_k\}$ 是一个正序列且满足 $\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$. $k := 0$.

步骤 1:若 $\| g_k \| = 0$,则停止.

步骤 2:计算实验步长 $\alpha \in (\lambda_1, \lambda_2)$ 和搜索方向 $d_k$,并使 $d_k$ 满足

$$d_k = \begin{cases} -g_k, k = 0, \\ -\dfrac{1}{\delta_k} g_k + \beta_k^{WYL} d_{k-1}, k \geqslant 1. \end{cases} \tag{7}$$

其中 $\delta_k = \dfrac{y_{k-1}^T s_{k-1}}{s_{k-1}^T s_{k-1}}$(这里 $s_{k-1} = x_k - x_{k-1}, y_{k-1} = g(x_k) - g(x_{k-1}), \delta_0 = 1$).

步骤 3(非单调线搜索):若

$$f(x_k + \alpha d_k) \leqslant \max_{0 \leqslant j \leqslant \min(k, M-1)} \{f(x_{k-j})\} - \sigma_1 \| \alpha g_k \|^2 - \sigma_2 \| \alpha d_k \|^2 + \varepsilon_k, \tag{8}$$

则令 $t_k = \alpha, x_{k+1} = x_k + t_k d_k$.

步骤 4:选取 $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$,令 $\alpha = \rho\alpha$,然后转到步骤 3.

步骤 5:计算 $g_{k+1}, \varepsilon_{k+1}$,然后令 $k := k + 1$,转到步骤 1.

## 2 基本引理

定义 $C_0 = f(x_0), C_k = \max_{0 \leqslant j \leqslant \min(k, M-1)} \{f(x_{k-j})\}$. 令 $k - \min(k, M-1) \leqslant i(k) \leqslant k$,使得对所有的 $k \geqslant 1$, $f(x_{i(k)}) = C_k$. 水平集 $\Omega$ 定义为

$$\Omega = \{x | f(x) \leqslant f(x_0) + \eta\}, \tag{9}$$

其中 $\eta$ 是一个正常数,并满足

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \leqslant \eta. \tag{10}$$

**引理 2.1** 若 $\{x_k\}$ 由上述算法产生,则 $\{x_k\} \subset \Omega$.

**证明** 由于

$$f(x_{k+1}) \leqslant C_k - \sigma_1 \| t_k g(x_k) \|^2 - \sigma_2 \| t_k d_k \|^2 + \varepsilon_k \leqslant C_k + \varepsilon_k. \tag{11}$$

注意到

$$C_{k+1} = \max_{0 \leqslant j \leqslant \min(k+1, M-1)} \{f(x_{k+1-j})\} \leqslant \max_{0 \leqslant j \leqslant \min(k, M-1)+1} \{f(x_{k+1-j})\} = \max\{C_k, f(x_{k+1})\}. \tag{12}$$

利用(11)式,有

$$f(x_{k+2}) \leqslant \max\{C_k, f(x_{k+1})\} - \sigma_1 \| t_{k+1} g(x_{k+1}) \|^2 - \sigma_2 \| t_{k+1} d_{k+1} \|^2 + \varepsilon_{k+1} \leqslant C_k - \sigma_1 \| t_{k+1} g(x_{k+1}) \|^2 - \sigma_2 \| t_{k+1} d_{k+1} \|^2 + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_k \leqslant C_k + \varepsilon_{k+1} + \varepsilon_k.$$

因此,通过类推,对所有 $k \geqslant 0$ 和 $j \geqslant 1$,都有

$$f(x_{k+j}) \leqslant C_k - \sigma_1 \| t_{k+j-1} g(x_{k+j-1}) \|^2 - \sigma_2 \| t_{k+j-1} d_{k+j-1} \|^2 + \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon_{k+i}, \tag{13}$$

则有

$$f(x_{k+j}) \leqslant C_k + \sum_{i=0}^{j-1} \varepsilon_{k+i}. \tag{14}$$

由(10)式及在(14)式中令 $k = 0$,则结论成立.

由(11)式和(12)式可得

$$C_{k+1} = f(x_{i(k+1)}) \leqslant C_k + \varepsilon_k. \tag{15}$$

**引理 2.2** 假设 $f(x)$ 在水平集 $\Omega$ 上有下界且序列 $\{x_k\}$ 由上述算法产生.则序列 $\{f(x_{i(k)})\}$ 收敛,而且

$$\lim_{k \to \infty} \| t_{i(k)-1} d_{i(k)-1} \| = 0, \tag{16}$$

$$\lim_{k \to \infty} \| t_{i(k)-1} g_{i(k)-1} \| = 0. \tag{17}$$

**证明** 由(15)式和 $\lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$,我们能构造一个非增序列 $\{C_{k_i}\}$,当 $i \to \infty$ 时,该序列极限存在.对 $\forall k > 0$,若存在指标 $k_i$ 和 $k_{i+1}$ 使得 $k_i < k < k_{i+1}$. 则由(15)式有

$$C_{k_{i+1}} - \sum_{j=k}^{k_{i+1}} \varepsilon_j \leqslant C_k \leqslant C_{k_i} + \sum_{j=k_i}^{k} \varepsilon_j,$$

因此,利用(10)式及取极限,可得序列 $\{f(x_{i(k)})\}$ 收敛.

再利用(11)式,其中 $k$ 替换成 $i(k) - 1$,可得

$$\sigma_1 \| t_{i(k)-1} g_{i(k)-1} \|^2 + \sigma_2 \| t_{i(k)-1} d_{i(k)-1} \|^2 \leqslant f(x_{i(i(k)-1)}) - f(x_{i(k)}) + \varepsilon_{i(k)-1}. \tag{18}$$

当 $k \to \infty$ 时取极限,则(16)式和(17)式成立.

**引理 2.3** 假设 $f(x)$ 是一致连续且在水平集 $\Omega$ 上有下界,序列 $\{x_k\}$ 由上述算法产生.则序列 $\{f(x_k)\}$ 收敛,而且有

$$\lim_{k \to \infty} \| x_{k+1} - x_k \| = 0, \tag{19}$$

$$\lim_{k \to \infty} \| t_k g_k \| = 0. \tag{20}$$

**证明** 设 $\tilde{i}(k) = i(k + M + 1)$,用归纳法可以证明,对 $\forall j \geqslant 1$ 有

$$\lim_{k \to \infty} \| x_{\tilde{i}(k)-j+1} - x_{\tilde{i}(k)-j} \| = 0, \tag{21}$$

$$\lim_{k \to \infty} f(x_{\tilde{i}(k)-j}) = \lim_{k \to \infty} f(x_{i(k)}). \tag{22}$$

由(18)式有 $\lim_{k \to \infty} \| x_{i(k)} - x_{i(k)-1} \| = 0$ 成立.事实上 $\{\tilde{i}(k)\} \subset \{i(k)\}$,因此(21)式对 $j = 1$ 成立.而且,由于 $f$ 在 $\Omega$ 上一致连续和 $\lim_{k \to \infty} f(x_{\tilde{i}(k)}) = \lim_{k \to \infty} f(x_{i(k)})$,则当 $j = 1$ 时(22)式也成立.

假设(21)式和(22)式对一个给定的 $j$ 成立.

利用(11)式,其中 $k$ 由 $\tilde{i}(k)-j-1$ 代替,得

$$\sigma_2\|t_{\tilde{i}(k)-j-1}d_{\tilde{i}(k)-j-1}\|^2 \leqslant f(x_{i(\tilde{i}(k)-j-1)})-f(x_{\tilde{i}(k)-j})+\varepsilon_{\tilde{i}(k)-j-1}. \tag{23}$$

由假设(22)式和当 $k\to\infty$ 时对(23)式两边取极限,得 $\lim\limits_{k\to\infty}\|x_{\tilde{i}(k)-j}-x_{\tilde{i}(k)-j-1}\|=\lim\limits_{k\to\infty}\|t_{\tilde{i}(k)-j-1}d_{\tilde{i}(k)-j-1}\|=0$,由 $f$ 在 $\Omega$ 上的一致连续性,得 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{\tilde{i}(k)-j-1})=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{\tilde{i}(k)-j})=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{i(k)})$. 因此,对 $\forall\ j\geqslant 1$,(21)式和(22)式成立. 另一方面,对 $\forall\ k$,有

$$x_{\tilde{i}(k)}=x_{k+1}+(x_{k+2}-x_{k+1})+\cdots+(x_{\tilde{i}(k)}-x_{\tilde{i}(k)-1})=x_{k+1}+\sum_{j=0}^{\tilde{i}(k)-k-1}(x_{\tilde{i}(k)-j+1}-x_{\tilde{i}(k)-j}). \tag{24}$$

注意到 $\tilde{i}(k)-k-1\leqslant(k+M+1)-(k+1)\leqslant M$,结合(24)式和(21)式,得

$$\lim_{k\to\infty}\|x_{\tilde{i}(k)}-x_{k+1}\|=0. \tag{25}$$

因为序列 $\{f(x_{i(k)})\}$ 有极限,由 $f$ 的一致连续性及(25)式和(22)式有 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{i(k)})$ 成立,这就证明了序列 $\{f(x_k)\}$ 收敛. 因此,利用(11)式和取极限,(19)式和(20)式成立.

**假设 2.1** (i) 假设 $f(x)$ 有下界且水平集 $\Omega=\{x\,|\,f(x)\leqslant f(x_0)+\eta\}$ 有界;(ii) 在 $\Omega$ 的某邻域 $N$ 内,梯度 $g(x)$ 是 Lipschitz 连续,即存在常数 $L>0$,使得对 $\forall\ x,y\in\Omega$,

$$\|g(x)-g(y)\|\leqslant L\|x-y\|,\forall\ x,y\in\Omega. \tag{26}$$

在假设 2.1 的条件下,则存在一个正常数 $M_1$ 使得

$$\|g(x)\|\leqslant M_1,\forall\ x\in\Omega. \tag{27}$$

**引理 2.4** 若假设 2.1 成立,序列 $\{x_k\}$ 由上述算法产生,它保持序列 $\{\delta_k\}$ 一致有界,使得 $0<\lambda_{\min}\leqslant\delta_k\leqslant\lambda_{\max}$ 对所有 $k$ 成立,如果存在一个常数 $\varepsilon>0$ 使得对 $\forall\ k$,有

$$\|g_k\|\geqslant\varepsilon, \tag{28}$$

则存在一个常数 $M_2>0$,使得对 $\forall\ k$,有

$$\|d_k\|\leqslant M_2. \tag{29}$$

**证明** 利用(6)式,(27)式,(19)式和(28)式,当 $k\to\infty$,得

$$|\beta_k^{\mathrm{WYL}}|=\frac{\left|g_k^T\left(g_k-\frac{\|g_k\|}{\|g_{k-1}\|}g_{k-1}\right)\right|}{\|g_{k-1}\|^2}\leqslant\frac{2L\|g_k\|\cdot\|x_k-x_{k-1}\|}{\|g_{k-1}\|^2}\to 0,$$

所以,对一个固定值 $\varepsilon_0>0$(比如 $\varepsilon_0=0.5$),就存在一个整数 $k_0>0$,使得对 $\forall\ k\geqslant k_0$,$|\beta_k^{\mathrm{WYL}}|<\varepsilon_0$ 成立. 利用 $\|d_k\|\leqslant\frac{\|g_k\|}{\lambda_{\min}}+|\beta_k^{\mathrm{WYL}}|\,\|d_{k-1}\|$ 且设 $M_2=\max\{\|d_1\|,\|d_2\|,\cdots,\|d_{k_0}\|,\ \frac{M_1}{(1-\varepsilon_0)\lambda_{\min}}+\|d_{k_0}\|\}$,则能推出(29)式对 $\forall\ k$ 成立,因此 $\{\|d_k\|\}$ 是一致有界的.

## 3 算法的全局收敛性

**定理 3.1** 若假设 2.1 成立,序列 $\{x_k\}$ 由上述算法产生,它保持序列 $\{\delta_k\}$ 一致有界,使得 $0<\lambda_{\min}\leqslant\delta_k\leqslant\lambda_{\max}$ 对所有 $k$ 成立. 则有

$$\liminf_{k\to\infty}\|g_k\|=0. \tag{30}$$

**证明** 假设结论不成立. 则存在一个常数 $\varepsilon>0$ 使得对 $\forall\ k$,有(28)式成立. 而且,由引理 2.3,有

$$\lim_{k\to\infty}t_k=0. \tag{31}$$

由(31)式,则存在 $k_0>0$,使得对 $\forall\ k\geqslant k_0$,线搜索条件不成立. 则有

$$f(x_k+(t_k/\rho)d_k)>\max_{0\leqslant j\leqslant\min(k,M-1)}f(x_{k-j})-\sigma_1\|(t_k/\rho)g_k\|^2-\sigma_2\|(t_k/\rho)d_k\|^2+\varepsilon_k\geqslant f(x_k)-\sigma_1\|(t_k/\rho)g_k\|^2-\sigma_2\|(t_k/\rho)d_k\|^2, \tag{32}$$

即

$$f(x_k+(t_k/\rho)d_k)-f(x_k)\geqslant-\sigma_1\|(t_k/\rho)g_k\|^2-\sigma_2\|(t_k/\rho)d_k\|^2. \tag{33}$$

(33)式左边应用拉格朗日中值定理,则存在 $\theta_k\in[0,1]$,使得

$$(t_k/\rho)g(x_k+\theta_k(t_k/\rho)d_k)^T\left(-\frac{1}{\delta_k}g_k+\beta_k^{\mathrm{WYL}}d_{k-1}\right)=(t_k/\rho)g(x_k+\theta_k(t_k/\rho)d_k)^Td_k>-\sigma_1\|(t_k/\rho)g_k\|^2-\sigma_2\|(t_k/\rho)d_k\|^2,$$

即

$$g(x_k+\theta_k(t_k/\rho)d_k)^T\left(-\frac{1}{\delta_k}g_k+\beta_k^{\mathrm{WYL}}d_{k-1}\right)=g(x_k+\theta_k(t_k/\rho)d_k)^Td_k>-(t_k/\rho)(\sigma_1\|g_k\|^2-\sigma_2\|d_k\|^2). \tag{34}$$

(34)式取极限,由(31)式,$\{\|d_k\|\}$ 的有界性和 $\lim\limits_{k\to\infty}|\beta_k|=0$,得

$$\lim_{k\to\infty}-\|g_k\|^2=0. \tag{35}$$

这样,有 $\lim\limits_{k\to\infty}\|g_k\|=0$. 这与(28)式矛盾,因此(30)式成立.

## 4 数值试验

对 3 个共轭梯度法进行数值试验的结果如表 1 所示,表 1 中的相关符号表示如下.

$\mathrm{PRP}^+$ SWP:试验参数为 $\beta_k=\max\{0,\beta_k^{\mathrm{PRP}}\}$ + SWP,$\delta=0.01,\sigma=0.1,\varepsilon=10^{-5}$;

VPRPSWP:试验参数为公式 $\beta_k^{\mathrm{WYL}}$ 公式(6) + SWP,$\delta=0.01,\sigma=0.1,\varepsilon=10^{-5}$;

NSCG：试验参数为 $\beta_k^{WYL}$ 公式(6)＋(7)＋(8)，$\delta=0.01, \sigma_1=\sigma_2=10^{-4}, \varepsilon=10^{-5}, M=5, \rho_{\min}=0.1, \rho_{\max}=0.5$；

Problem 是测试问题的名称；Dim 是目标函数的维数；— 是方法对这个数值例子失效；

NI/NF/NG：迭代次数 / 目标函数计算次数 / 目标梯度函数计算次数.

**表 1　3 个共轭梯度法的数值结果**

**Table 1　Numerical results for three conjugate gradient methods**

| Proplem | Dim | NI/NF/NG | | |
|---|---|---|---|---|
| | | PRP+SWP | VPRPSWP | NSCG |
| Rose | 2 | 22/394/60 | 42/464/102 | 24/334/31 |
| Froth | 2 | 10/28/20 | 17/87/28 | 14/35/30 |
| Gauss | 3 | 4/57/6 | 4/9/5 | 2/4/3 |
| Meyer | 3 | — | 2712/7289/4131 | 1232/2327/4323 |
| Gulf | 3 | 1/2/2 | 1/2/2 | 2/27/3 |
| Sing | 4 | 49/155/79 | 44/191/74 | 58/198/120 |
| Badscp | 2 | 46/474/114 | 41/509/100 | 33/328/56 |
| Badscb | 2 | 11/123/22 | 33/704/59 | 34/141/48 |
| Beale | 2 | 9/173/20 | 17/136/29 | 10/455/146 |
| Jensam | 2 | — | 11/31/21 | 2/27/3 |
| Helix | 3 | 32/265/55 | 74/396/123 | 43/431/28 |
| Bard | 3 | 27/152/43 | 43/136/66 | 23/131/27 |
| Wood | 4 | 101/549/195 | 145/649/252 | 117/390/167 |
| Kowosb | 4 | 51/249/79 | 52/343/84 | 26/316/112 |
| Bd | 4 | — | 50/199/119 | 24/112/89 |
| Osb1 | 5 | 1/51/2 | 1/51/2 | 2/27/3 |
| Biggs | 6 | — | 166/768/263 | 116/241/134 |
| Osb2 | 11 | 250/1011/412 | 211/752/352 | 213/731/226 |
| Watson | 20 | 2143/5780/3396 | 2026/5739/3207 | 2224/1253/3310 |
| Rosex | 50 | 24/492/60 | 37/333/82 | 14/234/31 |
| Singx | 4 | 49/155/79 | 44/191/74 | 58/198/120 |
| Pen1 | 2 | 6/20/14 | 5/18/12 | 4/11/8 |
| Pen2 | 4 | 12/136/27 | 10/128/25 | 4/35/31 |
| | 50 | 136/898/282 | 222/1126/383 | 115/874/134 |
| Vardim | 2 | 3/9/7 | 3/9/7 | 7/18/14 |
| | 50 | 10/52/36 | 10/52/36 | 12/27/3 |
| Trig | 50 | 41/230/72 | 38/219/66 | 21/93/68 |
| | 100 | 46/341/85 | 47/434/86 | 17/179/60 |
| Bv | 3 | 12/25/16 | 12/25/16 | 19/55/37 |
| | 10 | 75/241/117 | 52/151/85 | 16/46/31 |
| Ie | 3 | 6/14/8 | 5/12/7 | 7/42/36 |
| | 100 | 6/13/8 | 6/13/8 | 7/42/36 |
| | 200 | 6/13/8 | 5/59/7 | 7/42/36 |
| | 500 | 6/13/8 | 6/13/8 | 7/42/36 |
| Trid | 100 | 30/67/36 | 30/67/36 | 26/79/54 |
| | 200 | 30/66/36 | 30/66/37 | 30/91/62 |
| Band | 3 | 10/23/17 | 7/64/12 | 10/58/45 |
| | 50 | 16/331/25 | 19/670/26 | 15/239/34 |
| | 100 | 16/373/26 | 18/712/27 | 15/239/33 |
| | 200 | 17/340/27 | 18/677/26 | 15/239/33 |
| Lin | 2 | 1/3/3 | 1/3/3 | 2/4/3 |
| | 50 | 1/3/3 | 1/3/3 | 2/4/3 |
| | 500 | 1/3/3 | 1/3/3 | 2/4/3 |
| | 1000 | 1/3/3 | 1/3/3 | 2/4/3 |
| Lin1 | 2 | 1/51/2 | 1/51/2 | 2/4/3 |
| | 10 | 1/3/3 | 1/3/3 | 2/4/3 |
| Lin0 | 4 | 1/3/3 | 1/3/3 | 2/4/3 |

从表 1 的数值结果可以看出，我们提出新的非单调谱共轭梯度法具有良好的计算效能，特别适合于求解大规模无约束优化问题.

**参考文献：**


[1] 戴彧虹，袁亚湘. 非线性共轭梯度法[M]. 上海：上海科技技术出版社，2001.

[2] FLETCHER R, REEVES C. Function minimization by conjugate gradients[J]. Comput J, 1964, 7: 149-154.

[3] POLAK B T. The conjugate gradient method in extreme problems [J]. USSR Comput Math and Math Phys, 1969, 9: 94-112.

[4] POLAK E, RIBIRE G. Note sur la xonvergence de directions conjugees [J]. Rev Francaise Informat Recherche Operatinelle 3e Annee, 1969, 16: 35-43.

[5] WEI Z X, YAO S W, LIU L Y. The convergence properties of some new conjugate gradient methods[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006 (183): 1341-1350.

[6] GRIPPO L, LAMPARIELLO F, LUCIDI S. A nonmonotone line search technique for Newton's method [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1986, 12(3): 707-716.

[7] LUCIDI S, ROMA M. Nonmonotone conjugate gradient methods for optimization [M]//System modeling and optimization A: lecture notes on control and information sciences C. Berlin: Springer Verlag, 1995.

[8] YU GAOHANG, GUAN LUTAI. A new nonmonotone line search scheme and its application for solving large-scale nonlinear systems of equations [J]. Applied mathematics and computation, 2007, 187: 636-643.


（责任编辑：尹　闯　邓大玉）