

# 聚集生长凝聚集团平均特征长度与粒子数关系研究\*

## Study on Characteristic Length of Aggregate Growth Aggregation vs Particle Number

庞寿全<sup>1</sup>, 陈乐<sup>1,2</sup>, 陈洁<sup>1</sup>, 周善东<sup>1</sup>

PANG Shou-quan<sup>1</sup>, CHEN Le<sup>1,2</sup>, CHEN Jie<sup>1</sup>, ZHOU Shan-dong<sup>1</sup>

(1. 玉林师范学院物理与信息科学系, 广西玉林 537000; 2. 广西师范大学物理与电子工程学院, 广西桂林 541004)

(1. Department of Physics and Information Science, Yulin Teachers' College, Yulin, Guangxi, 537000, China; 2. College of Physics and Electronic Engineering, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

**摘要:**从统计的角度出发,在二维 DLA 模型的基础上,以正方形四边中点作为随机粒子产生位置的聚集生长凝聚集团进行研究,测量在不同粒子数情况下凝聚集团的平均特征长度,寻找平均特征长度与粒子数之间的关系。结果发现,平均特征长度与粒子数的双自然对数曲线基本成直线,理论上由该直线的斜率可以导出凝聚集团的分形维数为 1.605,但是却比凝聚体的实际分维数偏小。

**关键词:**凝聚集团 特征长度 粒子数 分形维数

**中图分类号:**O540 **文献标识码:**A **文章编号:**1005-9164(2007)04-0386-03

**Abstract:** Beginning with the point of statistic and basing on the model of DLA, this paper studies the assemble-growth aggregation with foursquare four sides' midpoint as random particles generate positions. Measuring aggregation's average characteristic length for different particle numbers and searching the relation between the average characteristic length and the particle number. The results find that the double logarithm curve of average characteristic length and particle number is linear basically. Theoretically, we can deduce the fractal dimension of aggregation is 1.605 from the slope of this line, but it is smaller than real fractal dimension of aggregation.

**Key words:** aggregation, characteristic length, particle number, fractal dimension

自 20 世纪 70 年代 Mandelbrot<sup>[1]</sup>首先提出分形概念以来,分形理论就一直是非线性科学研究中最活跃的分支之一。1981 年 Witten 和 Sander<sup>[2]</sup>研究悬浮在溶液或大气中的煤灰烟尘和金属粉末等微粒随机扩散凝聚过程时,提出了著名的扩散限制凝聚模型,简称 DLA 模型。后来人们又利用该模型及其它相关模型模拟研究自然界中大量的无规则凝聚现象,对分形生长过程的物理机制以及影响分形生长的各种要素进行了深入探讨研究,取得了丰富的理论成果,并将这些理论应用到了分形物理、环境科学以及城市规

划方面<sup>[3~5]</sup>。但由于 DLA 凝聚生长处于一种非平衡态和非马尔可夫过程<sup>[6]</sup>,凝聚集团又是一种具有随机性和不确定性的无规则分形,不容易用非平衡统计的方法对其生长过程进行完全的解释,所以人们对 DLA 凝聚集团的统计性质了解得并不多。

本文从统计的角度出发,在二维 DLA 模型的基础上,以正方形四边中点作为随机粒子产生位置的聚集生长凝聚集团进行研究,测量在不同粒子数情况下凝聚集团的平均特征长度,寻找平均特征长度与粒子数之间的关系。结果发现平均特征长度与粒子数的双自然对数曲线基本成直线,理论上由该直线的斜率可以导出凝聚集团的分形维数为 1.605,但是却比凝聚体的实际分维数偏小。

收稿日期:2006-12-22

修回日期:2007-01-12

作者简介:庞寿全(1967-),男,讲师,主要从事电路理论教学和非线性理论研究工作。

\* 2006 年度广西教育厅自筹经费项目桂教科研[2006]26 号 222 [2006074X132]资助。

## 1 模型与生长规则

DLA 二维模型<sup>[2,7]</sup>的计算机模拟与生长规则基本思想如下:

(i)将二维正方形分割成许多相同小方格,形成点阵,在点阵的正中心放置一个种粒子。

(ii)在以种粒子为圆心,半径足够大的圆周上随机释放一个粒子,并在点阵内作无规行走,步距为一个小方格的边长。如果粒子抵达种粒子(或凝聚集团其它粒子)的最近邻格点,则停止运动并固定成为集团的一个组成部分。

(iii)如果粒子行走与种粒子距离过远时,取消该粒子。重复(ii)过程。

(iv)不断重复(ii)、(iii)过程,则可形成逐渐长大的 DLA 凝聚集团。

文献[8]把 DLA 模型中产生粒子的圆周改为矩形四边中点,对所形成的凝聚集团进行了研究,发现凝聚集团与 DLA 模型结果相类似。我们曾经研究过当晶格区域大小为 1000 个格点时,粒子随机运动区域大小的变化对凝聚集团的影响几乎可以忽略,同时也研究了当产生粒子位置离种粒子距离为 1000 个格点时,粒子源距离对凝聚集团的影响也可以消失。在获得这些理论的基础上,我们考虑让粒子来源于对称空间和每个粒子离种粒子的距离相等,且在消除晶格区域和粒子源距离影响的条件下,选择晶格区域大小为 1000 个格点,产生粒子位置离种粒子的距离为 400 个格点,并将粒子产生位置限定于正方形 4 边的 4 个中点上,模型如图 1 所示。由该模型所得到的一个粒子数凝聚物如图 2 所示。

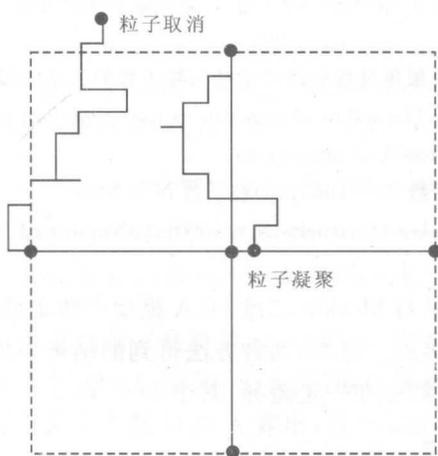


图 1 模型

Fig. 1 Model

## 2 平均特征长度定义和统计量说明

对于文献[2,7]的情况,由于凝聚集团具有较高

的对称性且总体轮廓呈圆形,所以可用其它粒子与种粒子相距最远的距离  $r$  表示其特征长度,凝聚集团的生长范围就在以种粒子为圆心, $r$  为半径的欧氏圆内。在图 1 模型中,由于粒子来源于以种粒子为正中心的正方形 4 边中点,凝聚集团虽然也具有对称性,但其外部轮廓不一定呈圆形。为了使描述特征长度的方法更为适用,我们将其推广为以下的描述:以凝聚集团的种粒子为原点,过正方形两边中点的连线作  $x$  轴和  $y$  轴建立直角坐标系(图 2)。将凝聚集团各粒子分别向两坐标轴投影,其中朝各个方向的投影最大者可表征凝聚集团朝该方向的特征长度,在图 2 中分别用  $r_1, r_2, r_3, r_4$  表示,然后用上述 4 个值的平均值  $r = \sum_{i=1}^4 r_i$  来表征凝聚集团的特征长度。由于聚集生长具有随机性,凝聚集团的特征长度就具有不确定性,不能表征生长的统计规律,为此我们进一步引入平均特征长度的概念,将粒子数相同的多个凝聚集团的特征长度  $r$  进行统计平均,求出它们的平均值,并将其称为凝聚集团的平均特征长度(用字母  $R$  表示)。为了获得足够的精确度,我们对 50 个凝聚集团的特征长度进行统计平均。

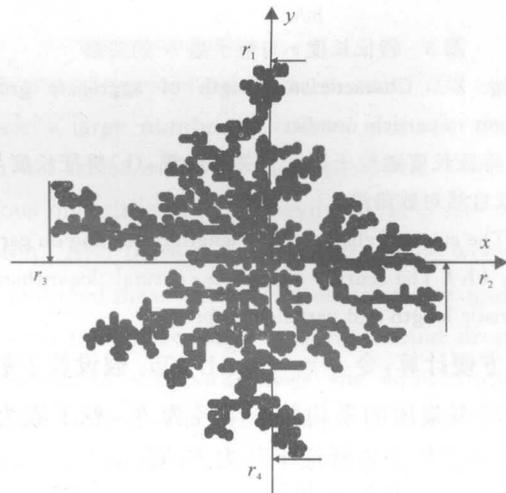


图 2 凝聚集团及特征长度

Fig. 2 Aggregation and characteristic length

## 3 模型的模拟结果与分析

### 3.1 模型的模拟结果

用上述的模型和选定的参数,分别对粒子数  $N$  取 100~4000 的凝聚集团进行模拟,并对 50 次模拟结果进行统计平均求出在相同粒子数情况下凝聚集团的平均特征长度,然后绘出平均特征长度与粒子数之间的关系曲线见图 3。从图 3(a)可以看出,凝聚集团的平均特征长度随着粒子数的增加呈单调增大变化,但随着粒子数的增加,增大的速度逐渐减小。从图

3(b)可以看出,平均特征长度与粒子数的双自然对数曲线基本呈直线关系,且该直线的斜率  $k \approx 0.623$ 。

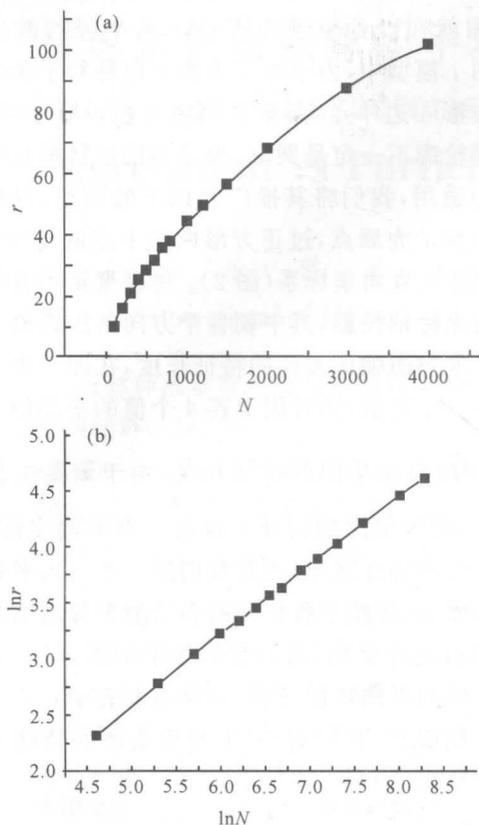


图3 特征长度  $r$  与粒子数  $N$  的关系

Fig. 3 Characteristic length of aggregate growth vs particle number

(a)特征长度随粒子数变化关系曲线;(b)特征长度与粒子数的双自然对数曲线。

(a)The curve of characteristic length depending on particle number; (b) The curve of double natural logarithm of characteristic length and particle number.

为方便计算,令  $D = \frac{1}{k} \approx 1.605$ 。假设粒子数为  $N_0$  时,凝聚集团的平均特征半径为  $R_0$ ,粒子数为  $N$  时,凝聚集团的平均特征半径为  $R$ ,则

$$D = \frac{1}{k} = \frac{\ln N - \ln N_0}{\ln R - \ln R_0} \quad (1)$$

由(1)式可得

$$N = \left(\frac{N_0}{R_0^D}\right)R^D \quad (2)$$

如果  $N_0$  取某一定值,则  $\frac{N_0}{R_0^D}$  为一常量, $N$  正比于  $R^D$ ;  $N \sim R^D$ 。 (3)

显然,根据计算 DLA 模型凝聚集团分形维数的常用方法:标度窗口法<sup>[9]</sup>,则  $D$  为凝聚集团的分形维数。

### 3.2 模型比较分析

为了比较上述方法得到的分形维数,采用回转半径法<sup>[2,7,10]</sup>计算该模型凝聚集团的分形维数。凝聚集团的回转半径为

$$R_g = \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

其中  $r_i$  为第  $i$  个粒子距凝聚集团质心的距离;粒子数  $N$  与回转半径  $R_g$  的关系为

$$N = k_g \left|\frac{R_g}{R_0}\right|^{D_f} \quad (5)$$

其中  $D_f$  为凝聚集团的分形维数, $R_0$  为粒子半径(本文取  $R_0 = 1$ ), $k_g$  为结构常数。由(5)式,再以  $\ln R_g$  为纵坐标, $\ln N$  为横坐标。分别对粒子数  $N = 1000$ 、 $N = 2000$  的凝聚集团分形维数进行计算,得到  $\ln R_g$  与  $\ln N$  的曲线见图 4;分别随机取 50 个集团进行平均,得到凝聚集团的分形维数均为  $D_f \approx 1.67$ 。

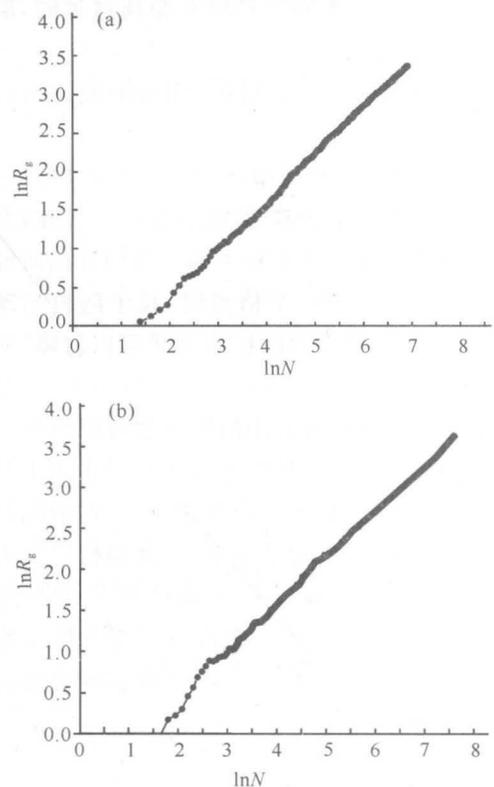


图4 聚集过程中回转半径与粒子数的关系曲线

Fig. 4 The radius of gyration vs the number of particles during the growth of aggregation

(a)粒子数  $N = 1000$ ;(b)粒子数  $N = 2000$ 。

(a)Number of particles  $N = 1000$ ;(b)Number of particles  $N = 2000$ 。

该结果与 Meakin 二维 DLA 模型<sup>[7]</sup>和文献<sup>[8]</sup>的结果比较接近。显然,两种方法得到的结果虽然比较接近,但仍然存在一定差异,其中  $D < D_f$ 。

### 4 结束语

分形维数是描述分形基本特征的重要参量。分形维数的细微差别,都可能意味着分形特征的重大差

(下转第 392 页 Continue on page 392)

- 计算[J]. 云南大学学报:自然科学版,2007,29(2):152-155.
- [2] 超神冈日,美国国际合作组. 中微子有质量和振荡[C]. 中国科学院高能物理参考资料,1998:1-9.
- [3] 叶子飘,戴长江,丁林凯. 中微子振荡能解决太阳中微子问题吗[J]. 大自然探索,1999,18(3):24-28.
- [4] 焦善庆,蓝其开. 亚夸克理论[M]. 重庆:重庆出版社,1996.
- [5] JIAO SHANQING. Some difficulties in establishing stardoeed model [J]. U S Popular worky by centuries world colebrities,1998(2):58-62.
- [6] JIAO SHANQING, YANG BENLI, WANG SHUJUAN. The deformation of Quark-Lepton and spinor space[J]. TAPPC,1997,1(1):113-116.
- [7] 焦善庆,江光佐. 中微子获得质量的物理根源[J]. 黄淮学刊,1999(2):1-5.
- [8] CERN COURIER. 光子结构[C]. 中国科学院高能物理研究所情报资料,1997:14-24.
- [9] 焦善庆,许弟余,周勋秀,等. 光子静质量和光子结构[J]. 云南大学学报:自然科学版,2005,27(6):461-403.
- [10] 沈经. 场与粒子理论的实验问题[C]. 世界学术文库. 北京:世界学术文库出版社,2000:563-584.
- [11] 焦善庆,杨本立,江光佐,等. 多成分宇宙中稳定粒子的质量和半径估算[J]. 云南大学学报:自然科学版,2001,23(2):119-121.
- [12] 焦善庆. 轻子结构模型和夸克-轻子对称[J]. 西南师范学院学报:自然科学版,1984(4):30-40.
- [13] JIAO SHANQING. The phenomenological calculation of mass for a Quark-Lepton[J]. IL Nuovo Cimento Letts, 1986,81:40-44.
- [14] 许弟余,焦善庆. 轻子形变的有效相对线度改变计算[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2002,27(5):722-725.

(责任编辑:邓大玉)

(上接第 388 页 Continue from page 388)

异。可见,用凝聚集团平均特征长度与粒子数关系所得到的分形维数并不理想。这可能与无规生长的复杂性有关。因为在聚集过程中,粒子的运动和聚集总是不可避免地同时受到外在的和内在的各种随机性的影响,这就使形成的凝聚集团不可能具有严格的自相似性结构,而是一种具有随机性和不确定性的无规则分形<sup>[11]</sup>。但从凝聚体平均特征长度与粒子数的双自然对数曲线呈现的线性关系,显然可以看出与凝聚集团自相性结构有关,因此我们认为利用其线性关系判断凝聚集团是否具有分形结构特征有一定的价值。

#### 参考文献:

- [1] MANDELBROT BB. Fractals, form, chance and dimension[M]. San Francisco, WH Freeman;1977.
- [2] WITTEN T A, SANDER L M. Diffusion-limited aggregation, a kinetic critical phenomenon[J]. Phys Rev Lett, 1981,47(19):1400-1403.
- [3] GO' MEZ A, LUQUE J J CO'RDOBA A. Fractal structures for a catalysed reaction on homogeneous and fractal surfaces [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 24:151-156.
- [4] MIYAGAWAA Y, HONJOB H, KATSURAGIB H. Contraction rate of diffusion-limited aggregation [J]. Journal of Crystal Growth, 2002, 240:287-291.
- [5] 况颐,陈彦光. DLA 和 DBM 模型与城市生长的分形模拟[J]. 信阳师范学院学报:自然科学版,2007,14(3):303-308.
- [6] 唐国宁. 具有表面张力的漂移 DLA 模型[J]. 华中师范大学学报,1996,30(2):158-163.
- [7] MEAKIN P. Diffusion-controlled cluster formation in 2-6 dimensional space[J]. Phys Rev A, 1983, 27(3):2616-2623.
- [8] 李军民,张义宽. 一个分形生长的计算机模拟及其维数[J]. 西安科技学院学报,2000,20(2):169-172.
- [9] 吴建章,徐昌业. DLA 模型与分形生和研究综述[J]. 山东工业大学学报,1996,26:403-409.
- [10] 谢云霞,罗文峰,李后强. 大气颗粒物的分形特征[J]. 世界科技研究与发展,2004,26(6):24-29.
- [11] 刘秉正,彭建华. 非线性动力学[M]. 北京:高等教育出版社,2004:301-353.

(责任编辑:尹 闯 邓大玉)