DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.01.001
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(1): 1~ 3

极大子群的 S-θ-完备与有限群可解性

S-θ-Completion of the Maximal Subgroups and the Solvability of Finite Groups

单俊辉,钟祥贵

SHAN Jun-hui, ZHONG Xiang-gui

(广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004)

(Department of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China)

摘要: 利用极大子群的 S-θ-完备性质研究有限群的可解性,改进相关文献中的相关定理,得到有限群可解性的 2 个新判据.

关键词: 有限群 超可解 极大子群 S-θ-完备

中图法分类号: O152.1 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)01-0001-03

Abstract Using S-θ-completions for a maximal subgroup of a finite group, the solvability of finite groups are studied, and some relational theorems in the relevant reference are improved, and two new criteria of the solvable groups are obtained.

Key words finite groups, super solvable, maximal subgroups, S-θ-completion

有限群的极大子群在群论研究中扮演着重要的角色.赋予极大子群若干条件来研究其对有限群本身结构的影响,这是长期以来令人感兴趣的课题. Deskins[1]引入了有限群极大子群完备的概念,并在文献[2]中研究了极大完备的群论性质对有限群结构的影响.这一开创性的方法为研究有限群的性质提供了一个很好的工具.李世荣[3]证明: 群 G超可解当且仅当对于 G的每个有合数指数的极大子群 M, $I(M)$包含一个极大元 C使得 $|C/K(C)|$ 无平方因子且 $G = CM$.钟祥贵[4]改进了这个定理,证明: 如果对于 G的每个有合数指数的极大子群 M, $I(M)$包含一个极大元 C使得 $|C/K(C)|$ 超可解, $|C/K(C)|_2 \leqslant 2$,并且 $G = CM$,那么 G可解. T. K. Dutta[5]证明: 群 G c-可解当且仅当对于 G的每个极大子群 M, $I(M)$都存在一个正规完备 C使得 $C/K(C)$ c-可解.

本文利用 S-θ-完备对上面的定理进行改进,得到关于有限群可解性的 2个新判据.文中涉及的群 G皆为有限群. $M <\cdot G$表示 M是 G的极大子群, $Core_G(M)$表示 M在 G中的核,其他未予特别说明的符号都是标准的.

1 定义及引理

定义 1[6] 给定群 G的极大子群 M,称 G的子群 C为关于 M的 θ-完备,如果 $C \nsubseteq M$; $Core_G(M) \subseteq C$;且 $C/Core_G(M)$不真含 $G/Core_G(M)$的异于 1的正规子群.

M在 G中的所有 θ-完备作成一个集合,记为 $\theta I(M)$.易知 $\theta I(M)$非空.事实上,设 $C \leqslant G$并且满足 $Core_G(M) < C \leqslant G$. 若 $C/Core_G(M)$不真包含 $G/Core_G(M)$的异于 1的正规子群,则 $C \in \theta I(M)$.否则,取包含于 $C/Core_G(M)$的极小正规子群 $D/Core_G(M)$,则 $D \in \theta I(M)$.容易看到 $\theta I(M)$至少包含一正规 θ-完备.由定义 1知正规 θ-完备一定是极大 θ-完备.

定义 2[7] 设 C是关于 M的 θ-完备,称 C为关于 M的 S-θ-完备,如果 $C = G$或者存在 G的子群 B,使得 C是 B的极大子群但 B不是关于 M的 θ-完备.

由定义 2知 G的极大子群 M的正规 θ-完备一定是 S-θ-完备,即 G的任一极大子群一定存在一正规 S-θ-完备.

引理 1[8] 设 $H_c(G)$为 G中所有具有合数指数的极大子群的交,那么 $H_c(G)$超可解.

收稿日期: 2007-09-21
作者简介: 单俊辉(1983-),男,硕士研究生,主要从事有限群论研究。
* 广西科学基金项目(0575050),广西研究生教育创新计划项目(2007106020701M51)资助。

引理 2[9] 令 p 是群 G 的阶的最大素因子，$P\in Syl_p(G)$，那么 $P\trianglelefteq G$ 或者包含 $N_G(P)$ 的极大子群有合数指数.

引理 3[7] 设 M 是群 G 的极大子群，C 是 M 的 S-θ-完备，如果 $C\ntrianglelefteq G$ 并且 $C/Core_G(M)$ 有唯一极小正规子群 $K/Core_G(M)$，那么 C 是 CK 的极大子群.

引理 4[9] 设 M 是群 G 的一个可解极大子群，K 是 G 的非可解正规子群使得 $G=MK$，那么

$M\cap K>1$.

引理 5[4] 令 D 是 G 的一个子群，$|D|_2\leqslant 2$ 且 D 在 G 中的指数为素数，则 G 可解.

引理 6[4] 设群 $G=CD$，子群 C 与 D 的 Sylow 2-子群的阶不超过 2，那么 G 是可解的.

2 主要结果

定理 1 如果对群 G 的每个有合数指数的极大子群 M 都存在 M 的 $S\theta$-完备 C，使得 $G=CM$，$C/Core_G(M)$ 超可解，且 $|C/Core_G(M)|_2\leqslant 2$，那么 G 可解.

证明 假设 G 是满足条件的极小阶反例. 若 $C=G$，设 $\mathcal{H}_c(G)$ 为 G 的所有具有合数指数极大子群的交. 由引理 1 知 $\mathcal{H}_c(G)$ 超可解，且 $G/\mathcal{H}_c(G)$ 同构于 $G/Core_G(M_1)\times G/Core_G(M_2)\times\cdots\times G/Core_G(M_n)$ 的子群，$|G:M_i|$ 为合数，$i=1,2,\cdots,n$. 由假设 $G/Core_G(M_i)$ 可解，$i=1,2,\cdots,n$，从而 $G/\mathcal{H}_c(G)$ 可解. 矛盾. 所以 $C\neq G$. 现选取 G 的正规子群 N，并且 N 有尽可能大的阶使得 G/N 非可解，那么 G/N 有唯一极小正规子群 U/N，并且 U/N 非可解. 由以下 4 步来证明极小阶反例不存在.

(1) G 中存在有合数指数的极大子群 H，使

$N\leqslant H$.

记 $\bar G=G/N$，$\bar U=U/N$. 令 q 为 $|\bar U|$ 的最大素因子，$\bar Q\in Syl_q(\bar U)$. 那么 $\bar Q$ 在 $\bar U$ 中非正规，否则 $\bar Q$ char $\bar U\trianglelefteq\bar G$，$\bar Q\trianglelefteq\bar G$，这与 $\bar U$ 的极小性矛盾，从而存在 G 的极大子群 H，使得 $N_{\bar G}(\bar Q)\leqslant\bar H$. 由 Frattini 论断知 $\bar G=N_{\bar G}(\bar Q)\cdot\bar U$，从而 $\bar U\not\leq\bar H$，所以 $G=UH$，$|\bar G:\bar H|=|\bar U:\bar H\cap\bar U|$. 因为 $N_{\bar G}(\bar Q)\leqslant\bar H$，所以 $N_{\bar U}(\bar Q)\leqslant\bar H\cap\bar U$. 取 $\bar U$ 的极大子群 $\bar D$，使 $\bar D$∶$\bar H\cap\bar U$，由引理 2 得 $|\bar U:\bar D|$ 为合数，又 $N\leqslant H$，$|\bar U:\bar H\cap\bar U|=|\bar U:\bar D||\bar D:\bar H\cap\bar U|$，所以 $|\bar U:\bar H\cap\bar U|$ 为合数，从而 $|\bar G:\bar H|$ 为合数.

(2) $N=Core_G(H)$ 且存在 H 的 $S\theta$-完备 C，使 $C<\cdot CU$.

由(1)的证明知 $N\leqslant Core_G(H)$，若 $N<Core_G(H)$，由于 U/N 是 G/N 的唯一极小正规子群，从而 $U/N\leqslant Core_G(H)/N$，此与 $\bar U\ntrianglelefteq\bar H$ 矛盾，所以 $N=Core_G(H)$. 断言 $C\ntrianglelefteq G$，若否，$(G/N)/(C/N)\cong G/C$，由假设及 N 的取法可知 $C/Core_G(H)$，G/C 可解，所以 G/N 可解. 矛盾. 又由引理 3 得 $C<\cdot CU$.

(3) $C<\cdot G$.

记 $E=UC$，$T=U\cap C$，那么 C/N 是 E/N 的一个可解极大子群，U/N 是 E/N 的非可解正规子群，且 $E/N=C/N\cdot U/N$，由引理 4 知 $T/N>1$，又由于 C/N 超可解，从而 T/N 作为 C/N 的子群也超可解. 设 p 是 $|T/N|$ 的最大素因子，$P\in Syl_p(T)$，那么 PN/N 是 T/N 的非单位正规 Sylow p-子群. 由 PN/N char $T/N<C/N$ 可得 PN/N 是 U/N 的真子群，并且 $F(U/N)=1$ 不可解. 若 $Core_{G/N}(PN/N)\neq 1$，那么由 U/N 的极小性，$U/N\leqslant Core_{G/N}(N_G(PN)/N)\leqslant N_G(PN)/N$，即 $U\leqslant N_G(PN)$，这蕴含 $PN/N\trianglelefteq U/N$，进一步可得 $PN/N\leqslant F(U/N)=1$，矛盾. 因此 $Core_{G/N}(N_G(PN)/N)=1$ 且 $U\ntrianglelefteq N_G(PN)$，现在由 $C\ntrianglelefteq H$，我们有 $C\leqslant N_G(PN)\ntrianglelefteq H$. C 为 H 的 $S\theta$-完备，$N_G(PN)/N\trianglelefteq G/N$，故 $C=N_G(PN)$. 考虑 U 到 U/N 的自然同态，$L/N\trianglelefteq U/N$ 等价于 $L\trianglelefteq U$，于是 $N_{U/N}(PN/N)=N_U(PN)/N=T/N$. 现在断言：$PN/N\in Syl_p(U/N)$. 若否，在 U/N 中选取 p-子群 P_1/N，使 $|P_1/N:PN/N|=p$，则 $P\trianglelefteq P_1$，$P_1/N\leqslant N_{U/N}(PN/N)=T/N$，矛盾于 $PN/N\in Syl_p(T/N)$，所以 PN/N 是 U/N 的 Sylow p-子群，由 Frattini 论断 $G/N=N_{G/N}(PN/N)U/N$，从而 $G=N_G(PN)U=UC$，即 C 为 G 的极大子群.

(4) 最后的矛盾.

由假设 $|C/Core_G(H)|_2\leqslant 2$ 及引理 5 知 C/N 在 G/N 中有合数指数，从而存在 C 在 G 中的 $S\theta$-完备 D，使得 $G=CD$ 且 $|D/Core_G(C)|\leqslant 2$. 类似(2)可证 $N=Core_G(C)$，又由 $G/N=C/N\cdot D/N$ 及引理 6 可推出 G/N 可解，矛盾. 极小阶反例不存在. 命题得证.

定理 2 群 G ^{c}-可解当且仅当对于 G 的每个有合数指数的极大子群 M，存在 M 的一个正规 $S\theta$-完备 C，使得 $C/Core_G(M)$ ^{c}-可解.

证明 必要性容易证明. 下面证明充分性. 设 G 为满足条件的极小阶反例. 如果 1 是 G 的唯一极大子群，那么 G 为循环群，G 可解，当然 ^{c}-可解，矛盾. 设 $M(M\neq 1)$ 为 G 的极大子群，如果 G 为单群，那么对于 G 的每个极大子群 M，G 是唯一的一个 $S\theta$-完备 C，此时 $Core_G(M)=1$，由假设 $G=G/Core_G(M)$ ^{c}-可解，矛盾. 所以 G 非单群. 设 N 是 G 的极小正规子

群,以下分两步证明 G/N, N 均 c-可解,从而极小阶反例不存在.命题得证.

(1) G/N c-可解.

若 M/N 是 G/N 的唯一极大子群,则 G/N 循环, G/N c-可解.考虑 G/N 至少含有两个极大子群情形,不妨仍设 M/N 为 G/N 的有合数指数的极大子群,则 M 为 G 的有合数指数的极大子群.由假设存在 M 的一个正规 S-θ-完备 C 使 $C/Core_G(M)$ c-可解,故 C/N 是 M/N 的正规 S-θ-完备, $Core_{G/N}(M/N) = Core_G(M)/N$, $(C/N)/(Core_G(M)/N) \cong C/Core_G(M)$,从而 $(C/N)/(Core_G(M)/N)$ c-可解,即 G/N 满足条件,由 G 是极小阶反例,得出 G/N c-可解.

(2) N c-可解.

首先断言: N 是 G 的唯一极小正规子群.若否,设 N_1 是 G 的另一极小正规子群,同理(1)可证 G/N_1 c-可解.由 $G = G/N \cap N_1$ 同构于 $G/N \times G/N_1$ 的某个子群得 G c-可解.矛盾.故断言成立.设 $H_c(G)$ 为 G 的所有具有合数指数极大子群的交,根据引理 1, $H_c(G)$ 超可解.由于 N 是 G 的唯一极小正规子群,所以 $N \leqslant H_c(G)$, N 可解,当然 c-可解.若 $N \not\leqslant H_c(G)$,则存在 G 的具有合数指数的极大子群 M_0,使得 $N \not\leqslant M_0$, $Core_G(M_0) = 1$ 且 $G = M_0N$,由假设存在 M_0 的一个正规的 S-θ-完备 C,使得 $C/Core_G(M_0) = C$ c-可解,又由 N 是 G 的唯一极小正规子群,从而 $N \leqslant C$ c-可解.最后,结合考虑(1)得 G c-可解.矛盾.

推论 1[5] 群 G c-可解当且仅当对于 G 的每个极大子群 M,存在 M 的一个正规完备 C,使得 $C/K(C)$ c-可解.

参考文献:

[1] Deskins W E. On maximal subgroups[J]. Proc Sympos in Pure Math, Amer Math Soc, 1959, 1: 100-104.

[2] Deskins W E. A note on the index complex of a maximal subgroup[J]. Arch Math(Basel), 1990, 54: 236-240.

[3] Li S R. The deskins index complex and supersolvability of finite groups[J]. J Pure Appl Algebra, 1999, 144: 297-302.

[4] 钟祥贵.关于有限群极大子群的极大完备[J].广西科学, 2002, 9(3): 161-163.

[5] Dutta T K. Some characterisations of c-solvable groups using index-complex[J]. Indian J Pure Appl Algebra, 2002, 33(4): 554-564.

[6] Li S R, Zhao Y Q. The deskins index complex and the solvability of finite groups[J]. Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 1998, 22: 291-299.

[7] Du N, Li S R. On the F-abnormal maximal subgroups of finite groups[J]. J Pure Appl Algebra, 2006, 208(1): 345-349.

[8] Bhattacharya P, Mukherjee N P. On the intersection of a class of a maximal subgroups of finite groups II[J]. J Pure Appl Algebra, 1986, 42: 117-124.

[9] 徐明曜.有限群导引:下册[M].北京:科学出版社, 1999.

(责任编辑:尹 闯 邓大玉)

科学家确定一种新的与 DNA 复制相关的酶

美国和瑞典的科学家从酵母菌体内确定出一种新的酶,它有望在人类等高等生物的 DNA 复制过程中起到重要的作用。

进行该项研究的是美国 NIH 国立环境卫生科学研究所(NIEHS)的 Zachary Pursell、Thomas A. Kunkel 以及瑞典 Ume 大学的 Erik Johansson 等。他们用一种新的方法证实有一种名为 DNA 聚合酶 ε(DNA polymerase epsilon)的酶在酵母菌的 DNA 先导链(leading strand)复制中起主要作用,它是影响基因组稳定性的决定因素,同时负责细胞对环境压力导致的 DNA 损伤的响应。

DNA 双螺旋是由一条先导链和一条后随链(lagging strand)组成的。第一类影响 DNA 复制过程的 DNA 聚合酶要么负责复制先导链,要么负责复制后随链。某些低等动物甚至只需要一种 DNA 聚合酶就能完成所有复制工作,不过,在人类等高等动物中, DNA 复制过程要复杂得多。人类基因组能够编码 15 种 DNA 聚合酶,其中一些聚合酶主要负责基因组层面上的 DNA 复制,另一些在特定情况下才会起作用,比如修复由环境因素造成的 DNA 损伤。

新的 DNA 聚合酶 ε 的发现揭开了半个多世纪的一个谜团,找到了高等生物中负责最先复制先导链的酶,进一步揭示了基因组不稳定性的起源,并加深了人们对一些环境疾病的深层机制的理解。