DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.01.002
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(1): 4- 6

P_n^2 的 Mycielski图的邻强边色数和邻点可区别全色数

Adjacent Strong Edge Colorly and Aadjacent-vertex-distinguishing-total Coloring of the Mycielski Graph of P_n^2

孔令峰[1],苏文龙[2],罗海鹏[3],黎贞崇[3],何建东[3]
KONG Ling-feng[1], SU Wen-long[2], LUO Hai-peng[3], LI Zhen-chong[3], HE Jian-dong[3]

(1.广西师范学院数学与计算机科学系,广西南宁 530023; 2.梧州学院,广西梧州 543002; 3.广西科学院,广西南宁 530007)
(1. Department of Mathematics and Computer Science, Guangxi Teachers Education University, Nanning, Guangxi, 530023, China; 2. Wuzhou College, Wuzhou, Guangxi, 543002, China; 3. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China)

摘要: 定义新图 P_n^2,并在 $n\geqslant 3$时,确定 P_n^2 的 Mycielski图的邻强边色数和邻点可区别全色数,构造一个 $M(P_n^2)$ 的邻点可区别全染色法.

关键词: 图论 邻强边色数 邻点可区别全色数 Mycielski图
中图法分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)01-0004-03

Abstract A new graph of P_n^2 was defined, the adjacent strong edge chromatic number and adjacent vertex distinguishing total chromatic number, and construct the coloring method of adjacent vertex distinguishing total coloring of the graph of Mycielski of graph P_n^2 also be confirmed when $n\geqslant 3$.

Key words graph theory, adjacent strong edge chromatic number, the adjacent vertex distinguishing total chromatic number, Mycielski graph

图的染色是图论研究的主要内容之一,染色的一个基本问题就是确定相应的色数.图的强边染色产生于计算机科学,有很强的适用性.文献[1]对图的邻点可区别全染色做了研究,文献[2]和文献[3]分别对一类图的 Mycielski图的染色数做了讨论.本文在此基础上讨论一类图 P_n^2 的 Mycielski图的邻强边染色和邻点可区别全染色,分别确定其色数,并在邻强边染色的基础上构造了邻点可区别全染色法.

1 基本定义及引理

定义 1 对于有 n 个顶点的路,若两顶点的距离为 2就在这两顶点间连一条边,记这样的图为 P_n^2.

定义 2 对于图 $G(V,E)$,若映射 f: $E(G)\to\{1,2,\cdots,k\}$ 满足任意相邻边 e,e',有 $f(e)\neq f(e')$,则称 f 为 G的 k-正常边染色,记为 k-PEC.

定义 3[4] 对于图 $G(V,E)$ 的一个 k-PEC f,考虑 $G(V,E)$ 的任意顶点 u,设集合 $C(u)=\{f(uv)|uv\in E(G)\}$.如果对于 $G(V,E)$的任意两个相邻顶点 u,v,总有 $C(u)\neq C(v)$,则称 f为 G的一个邻强边染色,简称 k-ASEC,且称 $\chi'_{as}(G)=\min\{k|k\text{-ASEC of }G\}$为 G的邻强边色数.

定义 4[5] 对 $|V(G)|\geqslant 2$的连通图 $G(V,E)$,若映射 f: $\{V,E\}\to\{1,2,\cdots,k\}$满足下列条件:

(1) $\forall u,v\in V,uv\in E$且 $u\neq v$时 $f(u)\neq f(v)$;

(2) $\forall uv,uw\in E,v\neq w$,有 $f(uv)\neq f(uw)$;

(3) $\forall u,v\in V,uv\in E$ 且 $u\neq v$ 时 $f(u)\neq f(uv),f(v)\neq f(uv)$;

(4) $\forall u,v\in V,uv\in E$且 $u\neq v$时 $C(u)\neq C(v)$.

则称 f 为 G的一个 k-邻点可区别全染色,简称 k-AVDTC of G,而 $\chi_{at}(G)=\min\{k|k\text{-AVDTC of }G\}$ 称为 G的邻点可区别全色数,并且 $C(u)=\{f(u)\}\cup\{f(uv)|uv\in E(G),v\in V(G)\}$,$u\in V(G)$ 称为点 u

收稿日期: 2007-10-09
作者简介: 孔令峰(1982-),女,硕士,主要从事组合数学研究.
* 国家自然科学基金项目(60563008)和广西自然科学基金项目(桂科自 0728051)资助.

在 f 下的色集, $\overline{C}(u)$ 在色全集合 $C=\{1,2,\cdots,k\}$ 中的补集记为 $\overline{C}(u)=C\backslash C(u)$.

由定义4,显然有 $\chi_{at}(G)\geqslant\Delta(G)+1$,其中 $\Delta(G)$ 表示 G 的最大度.

定义5[3] 设 $G=(V,E)$ 是一个简单的图,点集 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,对 V 中的每个点 v_i,增加一个新点 v_i',而且 v_i' 与 v_i 在 G 中的所有邻点相连接,再添加一个新点 w,并将 w 与所有 v_i' 相连,得到的新图称为 G 的 Mycielski图,用 $M(G)$ 来表示,其顶点集,边集分别为 $V(M(G))=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}\cup\{v_1',v_2',\cdots,v_n'\}\cup\{w\}$, $E(M(G))=E(G)\cup\{v_i'v_j: v_iv_j\in E(G),1\leqslant i,j\leqslant n\}\cup\{wv_i': 1\leqslant i\leqslant n\}$.

引理1[4] 对 $|V(G)|\geqslant 3$ 的连通图 G,若有两个最大度顶点相邻,则 $\chi'_{as}\geqslant\Delta(G)+1$.

引理2[1] 对 $|V(G)|\geqslant 2$ 的连通图 G,若存在 $uv\in E(G)$,且 $d(u)=d(v)=\Delta(G)$,则有 $\chi_{at}(G)\geqslant\Delta+2$.

猜想[4] 对 $|V(G)|\geqslant 3$ 的简单连通图 G,若 $G\neq G_5$(5-圈),则 $\Delta(G)\leqslant\chi'_{as}\leqslant\Delta(G)+2$.

引理3[6] 对 $n\geqslant 3$ 的路 P_n,有

$$\chi'_{as}(P_n^2)=\begin{cases}3,若\ n=3,\\4,若\ n=4,5,\\5,若\ n\geqslant 6.\end{cases}$$

2 主要结论

定理1 对 $n\geqslant 3$ 的路 P_n,有

$$\chi'_{as}(M(P_n^2))=\begin{cases}8,若\ n=5,\\n,若\ n\geqslant 9,\\\Delta+1,若\ 6\leqslant n\leqslant 8或\\\qquad n=3,4.\end{cases}$$

证明 当 $n\geqslant 9$ 时,$\Delta(M(P_n^2))=d(w)=n$,没有两个最大度顶点相邻,由猜想 $\Delta\leqslant\chi'_{as}(M(P_n^2))\leqslant\Delta+2$ 得 $\chi'_{as}(M(P_n^2))\geqslant n$,所以只要给出 $M(P_n^2)$ 的一个 n-ASEC即可. 设 $V(M(P_n^2))=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}\cup\{v_1',v_2',\cdots,v_n'\}\cup\{w\}$, $E(M(P_n^2))=E(P_n^2)\cup\{v_i'v_j: v_iv_j\in E(P_n^2),1\leqslant i,j\leqslant n\}\cup\{wv_i': 1\leqslant i\leqslant n\}$,由引理2知,当 $n\geqslant 9$ 时 $\chi'_{as}(P_n^2)=5$,所以先对图 P_n^2 用5种颜色着色,方法如下:

对边 $v_1v_2,v_2v_3,\cdots,v_{n-1}v_n$ 依次用1,2,3,4,5循环着色;对边 v_1v_3,v_2v_4 分别染4,5,然后对边 $v_iv_{i+2}(i=3,4,\cdots,n-2)$ 依次用1,2,3,4,5循环着色,在此基础上再对 $M(P_n^2)$ 的剩余边着色,令

$f(v_1v_2')=f(v_2v_3')=f(v_3v_4')=\cdots=f(v_{n-1}v_n')=n-3$,

$f(v_1v_3')=f(v_2v_4')=f(v_3v_5')=\cdots=f(v_{n-2}v_n')=n-2$,

$f(v_2v_1')=f(v_3v_2')=f(v_4v_3')=\cdots=f(v_nv_{n-1}')=n-1$,

$f(v_3v_1')=f(v_4v_2')=f(v_5v_3')=\cdots=f(v_nv_{n-2}')=n$,

$f(wv_i')=i-2,3\leqslant i\leqslant n-2,f(wv_1')=n-3$, $f(wv_2')=n-2$,

$f(wv_{n-1}')=n,f(wv_n')=n-1$.

证明 $C(v_{i-2})\neq C(v_{i-1})\neq C(v_i)\neq C(v_{i+2}),i=5,6,\cdots,n-4$. 因为对 P_n^2 着色时已经满足相邻顶点的色集不同,再对每个顶点加上4种同样颜色的边,所以相邻顶点的色集仍不同. 因此,当 $n\geqslant 9$ 时 $\chi'_{as}(M(P_n^2))=n$.

当 $n=5$ 时,最大度顶点只有一个,且 $\Delta=8$,所以只要给出 $M(P_5^2)$ 的一个8-ASEC即可. 由引理2知 $\chi'_{as}(P_5^2)=4$. 先对 P_5^2 染色: $f(v_1v_2)=f(v_3v_4)=1$, $f(v_1v_3)=f(v_4v_5)=3$, $f(v_2v_3)=2$, $f(v_3v_5)=f(v_2v_4)=4$; 对 v_iv_j' 染色: $f(v_iv_{i+1}')=5,1\leqslant i\leqslant 4$, $f(v_iv_{i+2}')=6,1\leqslant i\leqslant 3$, $f(v_iv_{i-1}')=7,2\leqslant i\leqslant 5$, $f(v_iv_{i-2}')=8,3\leqslant i\leqslant 5$, $f(wv_i')=i,1\leqslant i\leqslant 4$, $f(wv_5')=7$. 所以 $\chi'_{as}(M(P_5^2))=8$.

当 $6\leqslant n\leqslant 8$ 时,$\Delta=8$,且有最大度顶点相邻,则由引理1知 $\chi'_{as}(M(P_n^2))\geqslant 9$,同理 $n\geqslant 9$ 的情形可以得到 $\chi'_{as}(M(P_n^2))=\Delta+1$. 当 $n=3,4$ 时,易知 $\chi'_{as}(M(P_n^2))=\Delta+1$. 所以定理1成立.

定理2 对 $n\geqslant 3$ 的路 P_n,有

$$\chi_{as}(M(P_n^2))=\begin{cases}9,若\ n=5,\\n+1,若\ n\geqslant 9,\\\Delta+2,若\ 6\leqslant n\leqslant 8或\\\qquad n=3,4.\end{cases}$$

证明 当 $n\geqslant 9$ 时,$\Delta(M(P_n^2))=d(w)=n$,没有两个最大度顶点相邻,由定义4知 $\chi_{as}(G)\geqslant\Delta(G)+1=n+1$,所以只需要给出 $M(P_n^2)$ 的一个 $n+1$-AVDTC即可.

保持边染色 f 不变,令 φ 为 $V(M(P_n^2))\to\{1,2,\cdots,n+1\}$ 的映射按照顶点的度从大到小染色:

$\varphi(w)=n+1$;

$\varphi(v_3)\in C\backslash\{f(v_3v_1),f(v_3v_2),f(v_3v_4),f(v_3v_5),f(v_3v_1'),f(v_3v_2'),f(v_3v_4'),f(v_3v_5')\}$;

$\varphi(v_4)\in C\backslash\{f(v_4v_2),f(v_4v_3),f(v_4v_5),f(v_4v_6),f(v_4v_2'),f(v_4v_3'),f(v_4v_5'),f(v_4v_6'),\varphi(v_3)\}$;

$$\varphi(v_i)\in C\backslash\left\{\begin{array}{l}f(v_iv_{i-2}),f(v_iv_{i-1}),f(v_iv_{i+1}),f(v_iv_{i+2}),\\\quad f(v_iv_{i-2}'),\\f(v_iv_{i-1}'),f(v_iv_{i+1}'),f(v_iv_{i+2}'),\varphi(v_{i-2}),\varphi(v_{i-1})\end{array}\right\},$$

其中 $i = 5,6,\cdots,n-2$;

$e(v_2) \in C\backslash\{f(v_1v_2), f(v_2v_3), f(v_2v_4), f(v_2v_1'), f(v_2v_3'), f(v_2v_4'), e(v_3), e(v_4)\}$;

$e(v_1) \in C\backslash\{f(v_1v_2), f(v_1v_3), f(v_1v_2'), f(v_1v_3'), e(v_2), e(v_3)\}$;

$$e(v_{n-1}) \in C\backslash \left\{ \begin{array}{l} f(v_{n-1}v_{n-2}), f(v_{n-1}v_{n-3}), f(v_{n-1}v_n), f(v_{n-1}v_{n-2}'), \\ f(v_{n-1}v_{n-3}'), f(v_{n-1}v_n'), e(v_{n-2}), e(n-3) \end{array} \right\};$$

$e(v_n) \in C\backslash\{f(v_nv_{n-1}), f(v_nv_{n-2}), f(v_nv_{n-1}'), f(v_nv_{n-2}'), e(v_{n-2}), e(v_{n-1})\}$;

$$e(v_i') \in C\backslash \left\{ \begin{array}{l} e(v_{i-2}), e(v_{i-1}), e(v_{i+1}), e(v_{i+2}), e(w), f(wv_i'), \\ f(v_i'v_{i-2}), f(v_i'v_{i-1}), f(v_i'v_{i+1}), f(v_i'v_{i+2}) \end{array} \right\},$$

其中 $i = 3,4,\cdots,n-2$;

$e(v_2') \in C\backslash\{e(v_3), e(v_4), e(w), f(wv_2'), f(v_2', v_3), f(v_2', v_4)\}$;

$e(v_{n-1}') \in C\backslash\{e(v_{n-2}), e(v_{n-3}), e(v_n), e(v_w), f(v_{n-1}'w), f(v_{n-1}'v_{n-3}), f(v_{n-1}'v_{n-2}), f(v_{n-1}'v_n)\}$;

$e(v_n') \in C\backslash\{e(v_{n-1}), e(v_{n-2}), e(w), f(v_n'w), f(v_n'v_{n-1}), f(v_n'v_{n-2})\}$.

在每个顶点可着色的集合中,先选颜色数最小者,并且满足相邻顶点的色集不同,若最小者不满足则选次小者,这样依次遍历可着色集合中的其他颜色数,由此构造出 $M(P_n^2)$ 的邻点可以区别全染色.

当 $n = 5$时,$\Delta(M(P_5^2)) = 8$,且只有一个最大度顶点,所以 $\mathrm{i}_{at}(M(P_5^2)) \geqslant 9$.由同样的构造方法易得出 $M(P_5^2)$ 的一个 9-AVDTC.

当 $6 \leqslant n \leqslant 8$或 $n = 3,4$时,均有最大度顶点相邻,所以由引理 2,知 $\mathrm{i}_{at}(M(P_n^2)) \geqslant \Delta + 2$.同理易得出 $M(P_n^2)$ 的一个 $\Delta + 2$-AVDTC,所以定理 2成立.

参考文献:

[1] Zhang Z F, Chen X E, Li J W, et al. On adjacentvertex-distinguishing total coloring of graphs [J]. Science in China Series A-mathematics, 2005, 48(3): 289-299.

[2] Fan Genghua. Circular chromatic number and mycielski graphs[J]. Combinatorica, 2004, 24(1): 127-135.

[3] 刘红美,聂晓冬.关于完全图的 Mycielski图的循环色数的若干结果 [J].数学研究, 2004, 37(4): 407-416.

[4] Zhang Z F, Liu L Z, Wang J F. Adjancent strong edge coloring of graphs [J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(5): 623-626.

[5] 张忠辅,陈祥恩.关于图的邻点可区别全染色 [J].中国科学: A辑, 2004, 32(5): 574-583.

[6] 田双亮,李敬文,张忠辅.和的均匀邻强边色数 [J].数学的实践与认识, 2006, 36(3): 244-248.

(责任编辑: 尹 闯 邓大玉)

代谢工程造就大肠杆菌产生新型生物燃料

全球能源短缺和环保的需要,推动了生物燃料的研究。作为第一代生物燃料的乙醇并不理想,主要存在能量低、吸水性大、运输贮存困难,在燃料掺入比例低等问题 加州大学洛杉矶分校联合美国能源部(UCLA-DOE)基因组和蛋白组研究所科学家 James C. Liao领导的小组通过改造微生物的代谢途径,使大肠杆菌工程菌产生了高产量的新型生物燃料(包括支链高级醇和丙醇、正 醇等),为下一代生物燃料生产开辟了新途径 研究小组利用代谢工程技术,将α酮酸脱羧酶和乙醇脱氢酶导入大肠杆菌,从氨基酸生物合成的中间产物产生醇类。在此之前,其他研究小组对多种微生物进行了遗传改造,期望能获得高级醇和自然界菌种不能产生的新型生物燃料,但是产量一直不尽人意 例如,对传统使用厌氧发酵生产 醇的梭菌属细菌改造中就遇到梭菌属菌种遗传改造难度大、梭菌对 醇耐受性低和 醇产量相对较低等难题

和目前使用的燃料乙醇相比,新型高级醇辛烷值高、能量高、对汽车零部件腐蚀性小、在混合汽油中掺入比高、与现有燃料供应和分配系统配伍性好,可以管道运输、无须对汽车进行改造,其成果市场价值不可估量。

(据 Nature 2008年 3月报道)