DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.01.016
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(1): 10~13

基于蓝藻水华控制的脉冲微分方程模型*

Impulsive Differential Equation Model Based on Controlling Cyanobacteria Bloom

徐为坚[1],陈兰荪[2]
XU Wei-jian[1], CHEN Lan-sun[2]

(1.玉林师范学院数学与计算机科学系,广西玉林 537000; 2.中国科学院数学与系统科学研究院,北京 100080)
(1. Department of Mathematics and Computer Science, Yulin Normal University, Yulin, Guangxi, 537000, China; 2. Institute of Mathematics, Academy of Mathematics and System Sciences, Beijing, 100080, China)

摘要:根据藻类生长特点,以具有饱和反应增长率的非自治增长模型为基础,采用分次脉冲喷洒的方法建立蓝藻脉冲控制模型,并将模型转化为脉冲微分系统,给出确定系统最大脉冲周期的方法,并用数值例子说明如何在有限时间内,选择适当的杀藻剂和脉冲喷洒次数,将蓝藻种群的密度控制在经济阈值之下.
关键词:微分方程 边值问题 蓝藻
中图法分类号:O175 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2008)01-0010-04
Abstract According to the growth characteristics of algae and based on the non-autonomous growth model with saturated reaction increasing rate, this paper constructs the impulsive control model of cyanobacteria using the method of separately impulsive spraying, and then transforms the model into the impulsive differential system. Furthermore, this paper presents the method of determining the maximum pulse period of the system, and makes use of the numerical simulations to illustrate how to select the algaecide and the times of impulsive spraying in a finite time for controlling the density of the cyanobacteria population to be lower than the economic threshold.
Key words differential equation, boundary value problem, cyanobacteria bloom

蓝藻水华爆发是藻类生物种群达到一定数量所形成的现象[1].随着全球气候变暖以及水体富营养化加剧,蓝藻水华的爆发日趋频繁,它造成的环境和经济问题越来越引起人们的关注.我国大部分湖泊面临着蓝藻水华爆发[1,2].在严重发生蓝藻水华的湖泊,大量的溶解氧被消耗,水体中的鱼类及其他生物因缺氧而导致死亡,生物多样性被破坏,进而严重制约经济建设和社会发展.近几年来,中央和地方为治理富营养化湖泊蓝藻水华投入了大量资金,滇池耗资 40亿,太湖耗资 100亿,一些小型城市湖泊的治理也动辄上亿元[3].因此,有效地控制或消除蓝藻水华,对经济建设及生态环境的保护,都具有重要的现实意义.

很多学者研究有害藻类水华的控制问题,得到了许多成果[1,3~12].对蓝藻的控制,关键是将其密度控制在一定的水平(如经济阈值)之下,使之不能形成水华.对生物物种密度的控制问题,许多学者利用微分动力系统模型的理论进行研究,并得到许多很好的结果[13~17].本文基于生物制剂控制蓝藻水华,通过建立具有脉冲效应的微分方程动力系统,描述在规定时间内脉冲喷洒生物制剂控制蓝藻的过程,得到该动力系统边值问题的解,并利用所得结果研究在限定时间内控制害藻类水华的问题,探讨蓝藻水华治理策略.

1 模型的建立及转化

根据藻类生长的特点[11],选择具有饱和反应增长率的非自治增长模型 $\dot{S}=\dfrac{r(t)S(t)}{1+k(t)S(t)}$ 为基础来建立模型.采取分次脉冲喷洒的方法,喷洒生物除藻

收稿日期:2007-08-27
作者简介:徐为坚(1956-),女,副教授,主要从事生物数学研究工作。
* 国家自然科学基金项目(10471117),广西教育厅科研项目(200707LX143)资助。

剂控制蓝藻水华,建立具有脉冲喷洒生物除藻剂的蓝藻控制模型.在喷洒除藻剂控制蓝藻水华的同时,考虑将蓝藻密度控制在不构成危害的水平即可.

假设在给定的时间 T 内进行 n 次(n 为正整数)脉冲喷洒除藻剂, φ 为脉冲周期,且 $0 < \varphi < 2\varphi < \cdots < n\varphi \leqslant T$,则得到具有饱和反应增长率的蓝藻脉冲控制模型为

$$\begin{cases} \dot{S} = \dfrac{r(t)S(t)}{1+\kappa(t)S(t)}, t \neq k\varphi, \\ S(t^+) = (1-\theta)S(t), t = k\varphi, \\ \quad k = 1, 2, \cdots, n, \\ S(0) = A, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $S(t)$ 是蓝藻种群的密度, θ 是生物制剂对蓝藻的杀死率,杀死的蓝藻量与蓝藻密度成正比.初始时蓝藻密度为 $x(0) = A$, B 为蓝藻密度的经济阈值, A、B、T 都为正常数, $\dfrac{r(t)}{1+\kappa(t)S(t)}$ 为饱和反应增长率. $r(t)$, $\kappa(t)$ 是正的连续函数, $0 < \theta < 1$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 < \varphi < 2\varphi < \cdots < n\varphi \leqslant T$.因为 $r(t)$, $\kappa(t)$ 是正的连续函数,所以在 $[0, T]$ 上,存在最大值和最小值.

设 $\bar{r} = \sup\limits_{[0,T]} r(t)$, $\underline{\kappa} = \inf\limits_{[0,T]} \kappa(t)$.对给定的时间 T,寻找一个最大脉冲周期 φ,使 $S(T) \leqslant B$ 或 $S(t) \leqslant B$, $t \in [0, T]$.

显然

$$\dot{S} = \frac{r(t)S(t)}{1+\kappa(t)S(t)} \leqslant \frac{\bar{r}S(t)}{1+\underline{\kappa}S(t)} < \frac{\bar{r}}{\underline{\kappa}}$$

且当 $t \to \infty$ 时,有

$$F(S) = \frac{\bar{r}S(t)}{1+\underline{\kappa}S(t)} \to \frac{\bar{r}}{\underline{\kappa}}.$$

$y = F(s)$ 过 $(0, 0)$ 处的切线为 $y = \bar{r}S(t)$,且 $y = \bar{r}S(t)$ 与 $y = \dfrac{\bar{r}}{\underline{\kappa}}$ 的交点为 $(\dfrac{1}{\underline{\kappa}}, \dfrac{\bar{r}}{\underline{\kappa}})$.

令 $S_1 = \dfrac{1}{\underline{\kappa}}$, $a = \dfrac{\bar{r}}{\underline{\kappa}}$,则有

$$\dot{S} = \frac{r(t)S(t)}{1+\kappa(t)S(t)} \leqslant \frac{\bar{r}S(t)}{1+\underline{\kappa}S(t)} \leqslant \begin{cases} \bar{r}S, S \leqslant S_1, \\ a, S > S_1. \end{cases}$$

因此(1)式可以转化为下列脉冲微分系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{cases} \bar{r}x(t), x \leqslant S_1 \\ a, x > S_1 \end{cases}, t \neq k\varphi, \\ x(t^+) = (1-\theta)x(t), t = k\varphi, k = 1, 2, \cdots, n, \\ x(0) = A. \end{cases} \tag{2}$$

2 主要结果

引理 1 (1)当 $n\varphi = T$ 时,系统(2)在 $((k-1)\varphi, k\varphi]$ 上有解

$x(t) =$

$$\begin{cases} A(1-\theta)^{k-1}e^{\bar{r}t}, x \leqslant S_1, \\ A(1-\theta)^{k-1} + \dfrac{a\varphi(1-\theta)}{\theta}[1-(1-\theta)^{k-1}] + \\ \quad a[t-(k-1)\varphi], x > S_1, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \cdots, n$.

$x((k\varphi)^+) = (1-\theta)x(k\varphi) =$

$$\begin{cases} A(1-\theta)^k e^{\bar{r}k\varphi}, x \leqslant S_1, \\ A(1-\theta)^k + \dfrac{a\varphi(1-\theta)}{\theta}[1-(1-\theta)^k], x > S_1 \end{cases}$$

$k = 1, 2, \cdots, n$.

(2)当 $n\varphi < T$ 时,系统(2)有解

$x(t) =$

$$\begin{cases} \begin{cases} A(1-\theta)^{k-1}e^{\bar{r}t}, x \leqslant S_1, \\ A(1-\theta)^{k-1} + \dfrac{a\varphi(1-\theta)}{\theta}[1-(1- \\ \quad \theta)^{k-1}] + a[t-(k-1)\varphi], x > S_1, \end{cases} \\ \quad t \in ((k-1)\varphi, k\varphi]. \\ \begin{cases} A(1-\theta)^n e^{\bar{r}t}, x \leqslant S_1, \\ A(1-\theta)^n + \dfrac{a\varphi(1-\theta)}{\theta}[1-(1- \\ \quad \theta)^n] + a(t-n\varphi), x > S_1. \end{cases} , t \in (n\varphi, T] \end{cases}$$

$x((k\varphi)^+) = (1-\theta)x(k\varphi) =$

$$\begin{cases} A(1-\theta)^k e^{\bar{r}k\varphi}, x \leqslant S_1 \\ A(1-\theta)^k + \dfrac{a\varphi(1-\theta)}{\theta}[1-(1-\theta)^k], x > S_1 \end{cases}$$

$k = 1, 2, \cdots, n$.

定理 1 对系统(2),以及给定的时间 T,若 $B > \dfrac{aT}{\theta}$, $B > A > \min\{\dfrac{aT(1-\theta)}{\theta}, B(1-\theta)\}$,则存在

$\leqslant$

$$\begin{cases} \dfrac{T\ln(1-\theta)}{\ln B(1-\theta) - \ln A - \bar{r}T}, x \leqslant S_1, \\ \dfrac{T\ln(1-\theta)}{\ln(B\theta - aT)(1-\theta) - \ln A\theta - aT(1-\theta)}, \\ \quad x > S_1, \end{cases}$$

使得 $x(T) \leqslant B$.

证明 (1)当 $n\varphi = T$ 时,有 $x(T) = x(n\varphi) =$

$$\begin{cases} A(1-\theta)^{n-1}e^{\bar{r}T}, x \leqslant S_1, \\ A(1-\theta)^{n-1} + \dfrac{a\varphi}{\theta}[1-(1-\theta)^n], x > S_1, \end{cases}$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{A(1-\theta)^{\frac{T}{\varphi}}}{1-\theta} e^{\bar{r}T}, x \leqslant S_1, \\ \dfrac{A\theta - aT(1-\theta)}{\theta(1-\theta)}(1-\theta)^{\frac{T}{\varphi}} + \dfrac{aT}{\theta} x > S_1. \end{cases}$$

(2)当 $n\varphi < T$ 时,有 $x(T) =$

$$\begin{cases} A(1-\delta)^n e^{\bar{r}T}, x \leqslant S_1, \\ A(1-\delta)^n + \dfrac{a\tau(1-\delta)}{\delta}[1-(1-\delta)^n] + \\ \quad a(T-n\tau), x > S_1, \end{cases}$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{A(1-\delta)^{\frac{T}{\tau}}}{1-\delta} e^{\bar{r}T}, x \leqslant S_1, \\ \dfrac{A\delta - aT(1-\delta)}{\delta(1-\delta)}(1-\delta)^{\frac{T}{\tau}} + \dfrac{aT}{\delta}, x > S_1. \end{cases}$$

令 $\dfrac{A(1-\delta)^{\frac{T}{\tau}}}{1-\delta} e^{\bar{r}T} \leqslant B$,有

$$\leqslant \frac{T\ln(1-\delta)}{\ln\dfrac{B(1-\delta)}{A} - \bar{r}T} =$$

$$\frac{T\ln(1-\delta)}{\ln B(1-\delta) - \ln A - \bar{r}T}.$$

令 $\dfrac{A\delta - aT(1-\delta)}{\delta(1-\delta)}(1-\delta)^{\frac{T}{\tau}} + \dfrac{aT}{\delta} \leqslant B$,则 $[A\delta - aT(1-\delta)](1-\delta)^{\frac{T}{\tau}} \leqslant (B\delta - aT)(1-\delta)$,当 $B > \dfrac{aT}{\delta}, B > A > \min\{\dfrac{aT(1-\delta)}{\delta}, B(1-\delta)\}$时,有

$$\leqslant \frac{T\ln(1-\delta)}{\ln\dfrac{(B\delta - aT)(1-\delta)}{A\delta - aT(1-\delta)}} =$$

$$\frac{T\ln(1-\delta)}{\ln(B\delta - aT)(1-\delta) - \ln A\delta - aT(1-\delta)}.$$

于是 $\leqslant$

$$\begin{cases} \dfrac{T\ln(1-\delta)}{\ln B(1-\delta) - \ln A - \bar{r}T}, x \leqslant S_1, \\ \dfrac{T\ln(1-\delta)}{\ln(B\delta - aT)(1-\delta) - \ln A\delta - aT(1-\delta)}, x > S_1. \end{cases}$$

定理 2 对于系统(2),若 $B > A$ 且 $(1-\delta)e^{\bar{r}\tau} \leqslant 1$,则任意给定的时刻 T,存在

$$\leqslant \begin{cases} \min\{\dfrac{1}{r}\ln\dfrac{B}{A}, -\dfrac{1}{r}\ln(1-\delta)\}, x \leqslant S_1, \\ \dfrac{\delta(B-A)}{a}, x > S_1, \end{cases}$$

使 $x(t) \leqslant B, t \in [0, T]$.

证明 当 $(1-\delta)e^{\bar{r}\tau} \leqslant 1$,即 $\leqslant -\dfrac{1}{r}\ln(1-\delta)$时,系统(2)在$((k-1)\tau, k\tau]$上的解

$x(t) =$

$$\begin{cases} A(1-\delta)^{k-1}e^{\bar{r}t}, x \leqslant S_1, \\ A(1-\delta)^{k-1} + \dfrac{a\tau(1-\delta)}{\delta}[1-(1- \\ \quad \delta)^{k-1}] + a(t-(k-1)\tau], x > S_1, \end{cases}$$

$$\leqslant \begin{cases} A(1-\delta)^{k-1}e^{\bar{r}k\tau}, x \leqslant S_1, \\ A + \dfrac{a\tau(1-\delta)}{\delta} + a\tau, x > S_1, \end{cases}$$

$$\leqslant \begin{cases} Ae^{\bar{r}\tau}, x \leqslant S_1 \\ A + \dfrac{a\tau}{\delta}, x > S_1 \end{cases}, k = 1, 2, \cdots, n.$$

令 $Ae^{\bar{r}\tau} \leqslant B$,得 $\leqslant \dfrac{1}{r}\ln\dfrac{B}{A}$;令 $A + \dfrac{a\tau}{\delta} \leqslant B$,当 $B > A$ 得 $0 < \leqslant \dfrac{\delta(B-A)}{a}$. 于是有

$$\leqslant \begin{cases} \min\{\dfrac{1}{r}\ln\dfrac{B}{A}, -\dfrac{1}{r}\ln(1-\delta)\}, x \leqslant S_1, \\ \dfrac{\delta(B-A)}{a}, x > S_1. \end{cases}$$

定理 3 对于系统(1),若 $B > \dfrac{aT}{\delta}, B > A > \max\{\dfrac{aT(1-\delta)}{\delta}, B(1-\delta)\}$,则对给定的时间 T,存在 $\leqslant \min\{\dfrac{T\ln(1-\delta)}{\ln B(1-\delta) - \ln A - \bar{r}T}, \dfrac{T\ln(1-\delta)}{\ln(B\delta - aT)(1-\delta) - \ln A\delta - aT(1-\delta)}\}$,使得 $S(T) \leqslant B$.

定理 4 对于系统(1),若 $B > A$,则任意给定的时刻 T,存在 $\leqslant \min\{\dfrac{1}{r}\ln\dfrac{B}{A}, -\dfrac{1}{r}\ln(1-\delta), \dfrac{\delta(B-A)}{\delta}\}$时,有 $S(t) \leqslant B, t \in [0, T]$.

3 数值例子

在蓝藻控制的实际工作中,对给定的时刻 T 及杀藻剂(即 δ确定),选择适当(最大)的脉冲周期 τ,经过 $n = [\dfrac{T}{\tau}]$次喷洒杀藻剂,能在时刻 T(时间 $[0, T]$)将蓝藻种群密度控制在经济阈值之下.

例 1 若 $A = 10, B = 30, \delta = 0.8, T = 4, \bar{r} = 1.2, \underline{k} = 1$时,可以选择脉冲周期 $\tau = 1.21$,脉冲喷洒杀藻剂 3次,就能使在时刻 4,将蓝藻种群密度控制在经济阈值 30之下.

例 2 若 $A = 10, B = 30, \delta = 0.8, T = 4, \bar{r} = 1.2, \underline{k} = 1$时,可以选择脉冲周期 $\tau = 0.92$,脉冲喷洒杀藻剂 4次,就能使在时间 $[0, 4]$内,蓝藻种群密度都控制在经济阈值 30之下.

数值例子说明,我们可以在有限时间内,选择适当的杀藻剂和脉冲喷洒次数,将蓝藻种群的密度控制在经济阈值之下.

本文通过求微分方程动力系统的边值问题的解,解决了有限时间内将蓝藻种群的密度控制在经济阈值之下的问题,并给出确定最大脉冲周期的方法.

参考文献:

[1] 金相灿,李兆春,郑朔方,等.铜绿微囊藻生长特性研究[J].环境科学研究, 2004, 17: 52-61.

[2] 金相灿,刘树坤,章宗涉,等.中国湖泊环境[M].北京:海洋出版社, 1995.

[3] 孔繁翔,高光.大型浅水富营养化湖泊中蓝藻水华形成

机理的思考 [J].生态学报, 2005, 25(3): 89-595.

[4] 刘新尧,石苗,廖永红,等.食藻原生动物及其在治理蓝藻水华中的应用前景 [J].水生生物学报, 2005, 29(4): 456-461.

[5] 张勇,席宇,吴刚.溶藻细菌杀藻物质的研究进展 [J].生物学通报, 2004, 31(1): 27-131.

[6] 赵以军,刘永定.有害藻类及其微生物防治的基础: 藻菌关系的研究动态 [J].生物学报, 1996, 20(2): 173-181.

[7] 李雪梅,杨中艺,简曙光,等.有效微生物群控制富营养化湖泊蓝藻的效应 [J].中山大学学报: 自然科学版, 2000, 39(1): 81-85.

[8] 周霖,黄文氢.用杀藻剂抑制湖泊蓝藻水华的尝试 [J].环境工程, 1999, 7(4): 75-77.

[9] 过龙根.除藻与控藻技术 [J].中国水利, 2006, 17: 34-36.

[10] 韩继刚,孟颂东,叶寅,等.藻类污染生物防治新策略 [J].微生物学报, 2001, 41(3): 381-385.

[11] 刘元波,陈伟民.湖泊藻类动态模拟 [J]. 湖泊科学, 2000, 12(2): 171-177.

[12] 丁玲,逄勇,李凌,等.水动力条件下藻类动态模拟 [J].生态学报, 2005, 25(8): 1863-1868.

[13] 陈兰荪,陈键.非线性生物动力系统 [M].北京: 科学出版社, 1993: 163-170.

[14] 陈兰荪,宋新宇,陆征一.数学生态学模型与研究方法 [M].成都: 四川科学技术出版社, 2003.

[15] Angelova J, Dishliev A. Optimization problems in population dynamics [J]. Appl Anal, 1998, 69: 3-4, 207-221.

[16] Zhang Hong, Xu Weijian, Chen Lansun. A impulsive infective transmission SI model for pest control [J]. Math Meth Appl Sci, 2007, 30: 1169-1184.

[17] Lakshmikantham V, Bainov D, Simeonov P. Theory of impulsive differential equations [M]. Singapore: World Scientific, 1989.

(责任编辑: 尹　闯)

(上接第 9页 Continue from page 9)

这说明$\sum_{s=s_1}^{+\infty}\int_{\in N_s}\sum_{i=1}^{n} q_i(t)x(t-\tau_i)\,dt<+\infty$,由已知条件得$\liminf_{t\to+\infty} x(t)=0$.假设 $l^*=-\infty$,由(5)式可得$\limsup_{t\to+\infty} x(t)=+\infty$.

参考文献:

[1] Yu J S. Asymptotic stability for nonautonomous scalar neutral differential equations [J]. J Math Anal Appl, 1996, 203: 850-860.

[2] Yu J S, Chen M P, Zhang H. Oscillation and nonoscillation in neutral equations with integrable coefficients [J]. Comput Math Appl, 1998, 35(6): 65-71.

[3] Chen M P, Yu J S, Huang L H. Oscillation of first order neutral differential equations with variable coefficients [J]. J Math Anal Appl, 1994, 185: 288-301.

[4] 李万同,全宏顺.一阶变系数中立型方程正解的存在性和渐近性 [J].应用数学, 1996, 9(2): 249-251.

[5] 王其如.一阶中立型泛函微分方程解的渐近性与振动性 [J].数学研究与评论, 1995, 15(4): 611-616.

[6] Tanaka S. Existence of positive solutions for a class of first order neutral differential equations [J]. J Math Anal Appl, 1999, 229: 501-518.

(责任编辑: 尹　闯　邓大玉)