

拖后率随时间变化且资金折现的变质性产品库存模型*

An Inventory Model for Deteriorating Items with Time-dependent Backlogging Rate and Time Value of Money

莫降涛,温宗良,徐春明,孟立华

MO Jiang-tao, WEN Zong-liang, XU Chun-ming, MENG Li-hua

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)

(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要: 为了确定变质性产品库存最优补货次数和补货量,在假设缺货量拖后率是等待时间的减函数条件下,利用折现现金流法建立一种新的变质性产品库存模型,给出寻找该模型最优订购策略的算法,并用数值例子来验证新模型的有效性。

关键词: 库存模型 变质产品 订购 资金折现

中图分类号: O227 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)01-0023-04

Abstract To determine the optimal times and quantity of replenishment for deteriorating items, a new inventory model is developed by using the Discounted Cash Flow approach and the assumption that the backlogging rate is a decreasing function of the waiting time. An algorithm to find the optimal replenishment policy is presented. Numerical examples are presented to illustrate the efficiency of the model and the algorithm.

Key words inventory model, deteriorating item, backlog, time value of money

20世纪70年代以前,由于通货膨胀和货币时间价值没有对库存策略产生明显的影响,所以人们在建立库存模型时未考虑这些因素.近年来,世界经济普遍出现大幅度的通货膨胀,货币时间价值对库存策略的影响引起了广大研究者的注意.文献[1]得到无限运行水平上使库存成本最小的策略,其中各项费用由折现现金流法(DCF)来计算.文献[2]研究有限运行水平上的EOQ模型,其各项费用的计算也借助DCF法,但是上述两种模型都未考虑变质因素的影响.文献[3]首次建立一个带有时间折扣的变质产品库存模型.在通货膨胀的情形下,文献[4]研究有限运行水平上变质产品的库存模型.文献[5]采用“补货开始,缺货结束”的策略推广了文献[4]的模型.

大部分已报道的文献都是在假设库存系统允许缺货,缺货量完全拖后或完全丢单的前提下进行研

究,而未考虑在现实中顾客在缺货期间等待意愿与等待时间是负相关这一因素.文献[6,7]研究短缺量拖后率依赖于等待时间的单一产品库存问题,但是在建模过程中没有考虑缺货损失费用(包括缺货费用和丢单费用).实际上,缺货使顾客流失而转投竞争者,不但会导致收入损失而且还会造成商家信誉降低,所以寻找最优库存策略,必须考虑这些因素.文献[8,9]的库存模型计算了缺货费用和丢单费用,从而弥补了文献[6,7]的缺陷.

本文推广文献[5]的模型,在假设短缺量拖后率是等待时间的减函数的情况下,利用DCF法建立以总费用现值最小为目标的变质产品库存模型,给出寻找最优订购策略的算法,并用数值例子说明模型的有效性.

1 记号与假设

(i) 将总长为 H 的计划期分为 n 个相同的补货周期,其时间长度为 $T = H/n$,每个周期订购 1 次;

(ii) 补货率无限,备运期为零;

(iii) 允许缺货,短缺量一部分丢单(即失去销售机会),一部分拖后,拖后率^[6]为 $U(f) = \lambda_0 e^{-\lambda f}$,其中 f

收稿日期: 2006-12-22

修回日期: 2007-01-12

作者简介: 莫降涛(1963-),男,博士,教授,主要从事最优化方法、供应链模型及其应用研究.

* 国家自然科学基金项目(10761001),广西自然科学基金项目(0542043)和广西大学科研基金项目(X071131)资助.

表示顾客等待的时间, $0 \leq \lambda_0 \leq 1$ 且 $0 \leq \lambda \leq T$, T 为货币时间价值的净折扣率;

(iv) 每个周期不允许缺货的时间比例为常数 k ($0 \leq k \leq 1$), t_1 表示第 1 个补货周期库存为零的时刻, 即 $t_1 = kT$;

(v) d 表示产品的常数需求率, θ 表示产品的常数变质率;

(vi) A 表示每次订购时固定的订购费, c 表示单位产品的购买成本, h 和 s 分别表示单位产品单位时间的库存费和缺货费, $p + c$ 表示单位产品的丢单费, 其中 p 表示单位产品的售价, c 表示丢失单位产品的信誉损失.

2 模型建立

2.1 模型

根据假设, 模型库存水平的变化如图 1 所示.

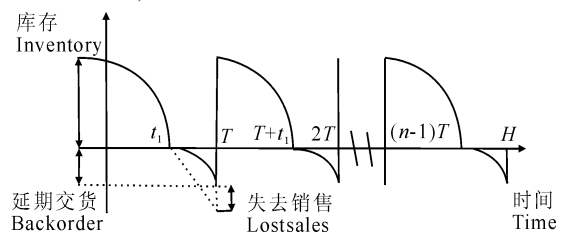


图 1 库存模型

Fig. 1 Graphic representation of the inventory system

在模型的第 1 个补货周期中, 周期之初有 Q_0 批量的产品进入系统. 当 $t \in [0, t_1]$ 时, 受需求和变质的影响库存水平 $I_1(t)$ 逐渐下降, 至 t_1 时降为零; 当 $t \in [t_1, T]$ 时, 模型处于缺货期, 库存水平 $I_2(t)$ 依赖于需求, 此时有 $\lambda_0 e^{-\lambda(T-t)}$ 比例的短缺量拖后到下一次补货, 因此, $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$ 分别适合下列方程:

$$\frac{dI_1(t)}{dt} + \theta I_1(t) = -d, 0 \leq t \leq t_1,$$

$$\frac{dI_2(t)}{dt} = -d\lambda_0 e^{-\lambda(T-t)}, t_1 \leq t \leq T.$$

利用边界条件 $I_1(t_1) = 0$ 和 $I_2(t_1) = 0$ 可得

$$I_1(t) = \frac{d}{\theta} [e^{\theta(t_1-t)} - 1], 0 \leq t \leq t_1, \quad (1)$$

$$I_2(t) = \frac{d\lambda_0}{\lambda} e^{\lambda(t_1-t)} [1 - e^{-\lambda(t-t_1)}], t_1 \leq t \leq T. \quad (2)$$

由 (1) 式和 (2) 式, 可以得到

$$Q_0 = I_1(0) = \frac{d}{\theta} [e^{\theta t_1} - 1], Q_b = -I_2(T) = \frac{d\lambda_0}{\lambda} [1 - e^{-\lambda(t_1-T)}]. \quad (3)$$

2.2 库存模型的各项费用

2.2.1 订购费 C_R

由假设, 在计划期内共有 n 个补货周期, 但在时刻 H 还应有一次补货以满足最后一次拖后需求. 因

而, 在整个计划期内模型共有 $n+1$ 次补货. 所以, 模型在整个计划期内总的订购费为

$$C_R = A \sum_{j=1}^{n+1} e^{-T(j-1)\tau} = \frac{A(e^{T\tau} - e^{-T\tau})}{e^{T\tau} - 1}.$$

2.2.2 购买费 C_c

第一次进入模型的批量为 Q_0 , 第 2, 3, ..., n 次进入模型的批量都为 $Q_0 + Q_b$, 而第 $n+1$ 次进入系统的批量为 Q_b . 所以, 模型在整个计划期内总购买费为

$$C_c = cQ_0 \sum_{j=1}^n e^{-T(j-1)\tau} + cQ_b \sum_{j=1}^n e^{-Tj\tau} =$$

$$\frac{dc}{\lambda\theta} \{ \lambda (e^{\theta t_1} - 1) + \lambda\theta e^{-T\tau} [1 - e^{-\lambda(t_1-T)}] \} \frac{1 - e^{-T\tau}}{1 - e^{-T\tau}}.$$

2.2.3 库存保管费 C_H

第 1 个补货周期的库存保管费为 $H_1 = \int_0^{t_1} I_1(t) e^{-Tt} dt$. 所以, 模型在整个计划期内总的库存保管费为

$$C_H = H \sum_{j=1}^n e^{-T(j-1)\tau} = \frac{dh}{\theta(T+\theta)} [T e^{\theta t_1} + \theta e^{-Tt_1} - (T+\theta)] \frac{1 - e^{-T\tau}}{1 - e^{-T\tau}}.$$

2.2.4 缺货费 C_s

当 $t \in [t_1, T]$ 时, $I_2(t) < 0$, 因此, 第 1 个补货周期的缺货费为 $S_1 = - \int_{t_1}^T I_2(t) e^{-Tt} dt$. 所以, 模型在整个计划期内总的缺货费为

$$C_s = S_1 \sum_{j=1}^n e^{-T(j-1)\tau} = \frac{d\lambda_0 e^{-T\tau}}{\lambda(\lambda - T)} [T + (\lambda - T) e^{\lambda(t_1-T)} - \lambda e^{(\lambda - T)(t_1-T)}] \frac{1 - e^{-T\tau}}{1 - e^{-T\tau}}.$$

2.2.5 丢单费 C_L

由假设, 模型在缺货期间时刻 t 丧失销售机会的比例为 $1 - \lambda_0 e^{-\lambda(T-t)}$, 因此, 第 1 个补货周期的丢单费为 $L_1 = (p + c) \int_{t_1}^T d [1 - \lambda_0 e^{-\lambda(T-t)}] e^{-Tt} dt$. 所以, 模型在整个计划期内总的丢单费为

$$C_L = L \sum_{j=1}^n e^{-T(j-1)\tau} = \frac{d(p+c)e^{-T\tau}}{T(\lambda - T)} \{ (\lambda - T) [e^{-Tt_1} - 1] - T\lambda_0 [1 - e^{(\lambda - T)(t_1-T)}] \} \frac{1 - e^{-T\tau}}{1 - e^{-T\tau}}.$$

于是, 在计划期 $[0, H]$ 内模型支付的总费用为

$$TC(n, k) = C_R + C_c + C_H + C_s + C_L = Dd \left\{ \frac{c}{\lambda\theta} [\lambda (e^{\theta kT} - 1) + \lambda\theta e^{-T\tau} [1 - e^{-\lambda(k-1)T}]] + \frac{h}{\theta(T+\theta)} [T e^{\theta kT} + \theta e^{-T\tau} - (T+\theta)] + \frac{\lambda_0 e^{-T\tau}}{\lambda(\lambda - T)} [T + (\lambda - T) e^{\lambda(k-1)T} - \lambda e^{(\lambda - T)(k-1)T}] + \frac{(p+c)e^{-T\tau}}{T(\lambda - T)} \{ (\lambda - T) [e^{-T(k-1)T} - 1] - T\lambda_0 [1 - e^{(\lambda - T)(k-1)T}] \} \right\} + AE, \quad (4)$$

其中, $D = \frac{1 - e^{-T/H}}{1 - e^{-T/Hn}}$, $E = \frac{e^{T/Hn} - e^{-T/H}}{e^{T/Hn} - 1}$, $T = H/n$.
 因此, 库存模型为 $\min TC(n, k) s. t. 0 \leq k \leq 1, n$ 为正整数.

3 模型性质

令 $f(k) = (\frac{h}{T_+} + c) e^{\theta k T} - (\frac{h}{T_+} + p + c) e^{-k T} + (\frac{s}{T} - c) \lambda_0 e^{-(\lambda + T) T} e^{\lambda k T} + (p + c - \frac{s}{T}) \lambda_0 e^{-\lambda T} e^{\lambda - T} k T$, 其中 $k \in [0, 1]$, 则有

$$\frac{\partial TC(n, k)}{\partial k} = \frac{D d H}{n} f(k). \quad (5)$$

引理 1 (a) $f(k)$ 为严格单调递增函数, $k \in [0, 1]$; (b) 若 $f(0) < 0$ 且 $f(1) > 0$, 则方程 $f(k) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有且仅有 1 个根.

证明 (a) 由 $0 \leq \lambda_0 \leq 1, 0 \leq \lambda < T$, 当 $k \in [0, 1]$ 时

$$\frac{df(k)}{dk} = T \{ (\frac{h}{T_+} + c) \theta e^{\theta k T} + (\frac{h}{T_+} + p + c) T e^{-k T} + \frac{s}{T} \lambda_0 e^{-(\lambda + T) T} e^{\lambda k T} + (p + c) T e^{-k T} [1 - \lambda_0 e^{\lambda(k-1) T}] + s \lambda_0 e^{-\lambda T} e^{\lambda - T} k T (1 - \frac{\lambda}{T}) + (p + c - c) \lambda_0 e^{\lambda(k-1) T} (e^{-k T} - e^{-T}) \} > 0, \quad (6)$$

于是 $f(k)$ 为严格单调递增函数.

(b) 由 (5) 式知 $f(k)$ 为 k 的连续函数. 又 $f(0) < 0$ 且 $f(1) > 0$, 所以方程 $f(k) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内至少存在 1 个根. 又由 (a), 得方程 $f(k) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内仅有 1 个根.

定理 1 对于固定的 n ,

- (a) 当 $f(0) \geq 0$ 时, $TC(n, k)$ 的最小值点为 $k^*(n) = 0$;
- (b) 当 $f(1) \leq 0$ 时, $TC(n, k)$ 的最小值点为 $k^*(n) = 1$;
- (c) 当 $f(0) < 0$ 且 $f(1) > 0$ 时, $TC(n, k)$ 的最小值点为方程 $f(k) = 0$ 的根.

证明 (a) 由引理 1(a), 可得 $f(k) > f(0) \geq 0$. 从而, 由 (5) 式知 $\frac{\partial TC(n, k)}{\partial k} > 0, k \in (0, 1)$. 所以, $TC(n, k)$ 为关于 k 的严格单调递增函数. 因此, $TC(n, k)$ 的最小值点为 $k^*(n) = 0$.

(b) 由引理 1(a), 可得 $f(k) < f(1) \leq 0$. 由 (5) 式知 $\frac{\partial TC(n, k)}{\partial k} < 0, k \in (0, 1)$. 所以, $TC(n, k)$ 为关于 k 的严格单调递减函数. 因此, $TC(n, k)$ 的最小值点为 $k^*(n) = 1$.

(c) 由引理 1(b) 知, 若 $f(0) < 0$ 且 $f(1) > 0$, 方程 $f(k) = 0$ 在 $(0, 1)$ 内有且仅有 1 个根. 由 (5) 式知, 对于给定的 n , $TC(n, k)$ 有唯一驻点 $k^*(n)$. 又由 (6)

式知, 对于给定的 n , $TC(n, k)$ 为关于 k 的严格凸函数. 故由极值的充分条件得 $k^*(n)$ 为 $TC(n, k)$ 的最小值点.

4 模型求解及算例分析

4.1 算法

解新模型求得最优的 n^* 和 k^* , 再由 $t_1 = k^* T, T = H/n$ 和 (3) 式即可求得 Q_0^* 和 Q_b^* .

首先, 令 n 分别取 $1, 2, \dots$, 利用一维搜索的方法, 确定最优的 $k^*(n)$. 然后, 计算并比较费用函数 $TC(n, k^*(n))$. 若某个 n^* 使得对于 $j = 1, 2, \dots, 10$ 时 $TC(n^*, k(n^*)) \leq TC(n^* + j, k(n^* + j))$ 都成立, 则 n^* 及与之对应的 k^* 即为 n 与 k 的近似最优值. 再将 $T^* = H/n^*$ 和 $t_1 = k^* T$ 代入 (3) 式即得各周期的近似最优补货量. 算法的具体步骤如下.

步骤 1 设定 $n_1 = 1, n_2 = 2$ 和 $j = 0$, 并输入模型参数;

步骤 2 若 $j < 10$, 转步骤 3; 否则, 转步骤 6;

步骤 3 对于 n_1 和 n_2 , 利用定理 1 分别求出 $TC(n_1, k(n_1))$ 和 $TC(n_2, k(n_2))$ 的最小值点;

步骤 4 分别计算 $TC(n_1, k(n_1))$ 和 $TC(n_2, k(n_2))$;

步骤 5 若 $TC(n_1, k(n_1)) \leq TC(n_2, k(n_2))$, 令 $n_2 = n_2 + 1, j = j + 1$, 然后转步骤 2;

否则, 令 $n_1 = n_2, n_2 = n_2 + 1$ 和 $j = 0$, 然后转步骤 2;

步骤 6 令 $n^* = n_1, k^* = k(n_1), TC^*(n^*, k^*) = TC(n_1, k(n_1))$, 再利用 (3) 式计算 Q_0^* 和 Q_b^* .

4.2 算例

例 1 修改文献 [5] 的例子, 其中 $T = 0.20, \theta = 0.20, c = 5, s = 3, h = 1.75, d = 600, A = 250, H = 10$. 对于参数 λ_0, λ, p 和 c , 分别取 $\lambda_0 = 1, \lambda = 0.10, p = 8$ 和 $c = 2$ 的结果如表 1 第 2 行所示. 与文献 [5] 的结果相比, 本模型最优解的订货次数少, 每次的定购量多, 总的相关费用高. 这是由于本模型假设短缺量拖后率是等待时间的减函数, 并计算了缺货费用和丢单费用.

例 2 数据如下: $T = 0.06, \theta = 0.12, \lambda_0 = 1, \lambda = 0.03, c = 4, p = 8, s = 2, c = 1.5, h = 1, d = 600, A = 250$ 和 $H = 10$. 优化结果如表 第 3 行所示.

4.3 灵敏度分析

对例 1 进行灵敏度分析, 改变参数 $T, \theta, c, p, \lambda_0, \lambda, c, s, h, A$ 和 d 的值. 每次只改变 1 个参数的值, 使其增加 (减少) 2% 和 40% 的计算结果如表 2 所示.

表1 例 1和例 2的优化结果

Table 1 The optimal solutions of example 1 and example 2

例 Example	n^*	k^*	Q_0^*	Q_B^*	TC^*
1	4	0.300	485.694	963.120	30223.131
2	5	0.456	1222.889	1264.289	58038.538

表2 例 1的参数变化对于最优策略的影响

Table 2 Effects of parameters on the optimal policy for Example 1

参数 Param- eters	变化 量 Value of change (%)	n^*	k^*	Q_0^*	Q_B^*	TC^*	TC^* 的 变化 Change of TC^* (%)
T	+ 40	5	0.253	319.421	832.710	25884.388	- 14.356
	+ 20	5	0.285	361.810	799.821	27923.733	- 7.608
	- 20	4	0.336	548.753	917.763	32958.472	+ 9.050
θ	- 40	4	0.374	617.035	869.103	36475.001	+ 20.686
	+ 40	5	0.292	381.032	791.928	26862.023	- 11.121
	+ 20	5	0.305	393.841	778.863	28335.063	- 6.247
c	- 20	4	0.315	503.381	944.467	32896.057	+ 8.844
	- 40	4	0.331	522.154	923.944	37564.319	+ 24.290
	+ 40	4	0.211	334.406	1073.639	40636.466	+ 34.455
p	+ 20	4	0.254	406.845	1020.414	35397.071	+ 17.119
	- 20	5	0.369	476.961	711.511	25053.034	- 17.106
	- 40	5	0.423	552.687	654.231	19738.501	- 34.691
λ	+ 40	4	0.330	538.885	924.835	30285.327	+ 0.206
	+ 20	4	0.316	512.926	943.483	30256.095	+ 0.109
	- 20	4	0.284	457.091	983.828	30185.739	- 0.124
λ_0	- 40	4	0.266	426.944	1005.747	30143.840	- 0.262
	- 20	5	0.355	458.188	580.645	32138.155	+ 6.336
	- 40	5	0.095	513.569	410.246	33580.421	+ 11.108
s	+ 40	4	0.307	498.349	922.617	30456.876	+ 0.773
	+ 20	4	0.304	492.642	942.453	30341.944	+ 0.393
	- 20	4	0.296	478.681	984.643	30099.700	- 0.408
h	- 40	4	0.292	471.575	1007.089	29971.557	- 0.832
	+ 40	4	0.308	499.470	953.176	30240.178	+ 0.056
	+ 20	4	0.304	492.642	958.102	30231.563	+ 0.028
A	- 20	4	0.296	478.681	968.190	30214.173	- 0.030
	- 40	4	0.292	471.575	973.331	30204.983	- 0.060
	+ 40	5	0.404	525.922	674.406	30493.473	+ 0.894
d	+ 20	4	0.344	562.262	908.099	30390.533	+ 0.554
	- 20	4	0.250	400.249	1025.237	29984.877	- 0.788
	- 40	4	0.193	304.321	1095.914	29648.748	- 1.900
A	+ 40	4	0.266	427.232	1005.538	31200.214	+ 3.233
	+ 20	4	0.282	454.586	985.646	30739.639	+ 1.709
	- 20	4	0.321	521.432	937.365	29639.205	- 1.932
A	- 40	4	0.344	562.914	907.633	28973.672	- 4.134
	+ 40	4	0.300	485.694	963.120	30456.418	+ 0.772
	+ 20	4	0.300	485.694	963.120	30339.775	+ 0.386
A	- 20	4	0.300	485.694	963.120	30106.487	- 0.386
	- 40	4	0.300	485.694	963.120	29989.843	- 0.772
	+ 40	4	0.300	679.972	1348.367	42079.096	+ 39.228
A	+ 20	4	0.300	582.833	1155.743	36151.113	+ 19.614
	- 20	4	0.300	388.555	770.496	24295.149	- 19.614
	- 40	4	0.300	291.417	577.872	18367.166	- 39.228

由表 2结果可以看出: 参数 c, λ, d 和 A 增加或减少相同的比例对最优费用变化比例的影响是几乎相同的; 最优费用对于参数 T, θ, h, p 和 s 减少要比这些参数增加的灵敏度高; 最优费用对于参数 c, d 的灵敏度较高, 对于参数 T, θ 的灵敏度比较适中, 对于参数 λ_0 的灵敏度较低, 而对于参数 p, λ, c, s, h 和 A 几乎不灵敏。

总之, 对于参数 T, θ, h, p 和 s 高估带来的费用惩

罚要低于低估这些参数带来的费用惩罚, 管理者应该准确确定参数 c, d , 而对于参数 p, λ, c, s, h 和 A 只要合理地估计就可以了. 表 2的结果还表明该模型与现实相吻合. 对例 1进行同样的灵敏度分析, 可以得到类似的结论.

5 结束语

考虑货币时间价值的库存模型大都基于短缺量完全拖后或完全丢单的假设. 而在现实中, 如果出现缺货的情况, 一些顾客愿意等待供货, 另一些则不愿意等待而转投他处购买, 从而形成短缺量部分拖后供给的现象. 基于上述原因, 本文考虑货币时间价值, 建立有限计划期内带有时变短缺量拖后率的变质性产品库存模型, 分析模型的性质后给出寻找最优订购策略的算法. 这对于库存管理者做出合理的决策有重要参考价值.

参考文献:

- [1] Trippi R R, Lewin D E. A present value formulation of the classical EOQ problem [J]. Decision Science, 1974, 5: 30-35.
- [2] Moon I, Yun W. An economic order quantity model with a random planning horizon [J]. The Engineering Economist, 1993, 39: 77-86.
- [3] Bose S, Goswami A, Chaudhuri A, et al. An EOQ model for deteriorating items with linear time dependent demand rate and shortages under inflation and time discounting [J]. Journal of the Operational Research Society, 1992, 46: 771-782.
- [4] Chung K J, Liu J, Tsai S F. Inventory systems for deteriorating items taking account of time value [J]. Engineering Optimization, 1997, 27: 303-320.
- [5] Chung K J, Lin C N. Optimal inventory replenishment models for deteriorating items taking account of time discounting [J]. Computers and Operations Research, 2001, 28: 67-83.
- [6] Abad P L. Optimal pricing and lot sizing under conditions of perishability and partial backordering [J]. Management Science, 1996, 42: 1093-1104.
- [7] Abad P L. Optimal price and order size for a reseller under partial backordering [J]. Computers and Operations Research, 2001, 28: 53-65.
- [8] Dye C Y. Joint pricing and ordering policy for a deteriorating inventory with partial backlogging [J]. International Journal of Management Science, 2007, 35: 184-189.
- [9] Teng J T, Ouyang L Y, Chen L H. A comparison between two pricing and lot-sizing models with partial backlogging and deteriorated items [J]. International Journal of Production Economics, 2007, 105: 190-203.

(责任编辑: 尹 闯 邓大玉)