DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.01.025
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(1): 30～ 34

一类带有稀疏过程的双险种风险模型

A Doubletype-insurance Risk Model with Thinning Process

方世祖,赵培臣,王志攀
FANG Shi-zu, ZHAO Pei-chen, WANG Zhi-pan

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(College of Mathematics and Information Science, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:研究一类带有稀疏过程的连续时间双险种风险模型,其中两个险种在保费收取方式和索赔方式上均有所不同,一险种的保费收取为时间 t 的线性函数而索赔过程是复合 Poisson过程,另一险种的保费收取是复合 Poisson过程而索赔计数过程为其稀疏过程.给出此模型最终生存概率的积分表达式及其在特殊情况下的具体表达式,并用鞅方法得到最终破产概率所满足的 Lundberg不等式和一般表达式.

关键词:风险模型 稀疏过程 破产概率 Lundberg不等式
中图法分类号: O211 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)01-0030-05

Abstract In this paper we consider a continuous time doubletype-insurance risk model with thinning process, where the premium income process and the arrival of the claims are different, one of the premium income process is a linear function of time t, another follows a Poisson process; one of the arrival of the claims is compound Poisson process, another is a thinning process. The integral representations of the ultimate survival probability are gotten and the explicit formula of the ultimate survival probability is also obtained in a special case. The Lundberg inequality and the general formula of the ultimate ruin probability are gotten in terms of some techniques from martingale theory.

Key words risk mode, thinning process, ruin probability, Lundberg inequality

经典风险模型及其拓广模型[1,2]描述的是单一险种经营过程,随着保险公司经营规模不断扩大,新险种不断开发,经营单一险种对保险公司来说不符合实际,只有经营多险种才能在竞争激烈的保险行业中立于不败之地,于是人们研究了多险种风险模型[3].在风险模型的研究中一般假设保费的收取过程是时间 t 的线性函数,保费率 c 是一恒定不变的常数而且索赔过程与保费收取过程是相互独立的.由于风险事业是在随机环境中进行,虽然公司整体趋于稳定状态,但是容易受外界生活环境影响,所以应采用不同的方式对不同的险种收取保费;另外在同一险种中,有时索赔过程与保费的收取过程在某种程度上有一定的相依关系.为此,本文对文献[3～5]进行推广,考虑一类带有稀疏过程的连续时间双险种风险模型,其中双险种在保费收取方式和索赔方式上均有所不同,一种险种的保费收取为时间 t 的线性函数索赔过程是复合 Poisson过程;另一种险种的保费收取是复合 Poisson过程而索赔计数过程为其稀疏过程.给出此模型最终生存概率的积分表达式以及特殊情况下的具体表达式,并得到最终破产概率所满足的 Lundberg不等式和一般表达式.

1 模型描述

给定一完备概率空间 (Ω, F, P),所有涉及的随机过程和随机变量都定义于此概率空间上.考虑风险模型

收稿日期: 2007-08-27
作者简介:方世祖(1964-),男,副教授,主要从事随机过程及其在风险理论中的应用研究.

$$U(t)=u+ct+\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i-\sum_{i=1}^{N_1^p(t)}Z_i,$$

其中

(i) $\{N_1(t),t\geqslant 0\}$是参数为λ_1的齐次 Poisson过程，$\{N_2(t),t\geqslant 0\}$是参数为λ_2的齐次 Poisson过程，$\{N_1^p(t),t\geqslant 0\}$是 $\{N_1(t),t\geqslant 0\}$以概率 $p=1-q$的稀疏过程;由文献 [6]知 Poisson过程在随机选择下仍为 Poisson过程，故 $\{N_1^p(t),t\geqslant 0\}$是参数为$\lambda_1 p$的齐次 Poisson过程.

(ii) $\{X_i,i=1,2,\cdots\}$,$\{Y_i,i=1,2,\cdots\}$,$\{Z_i,i=1,2,\cdots\}$是取值于 $[0,+\infty)$上的相互独立同分布的随机变量序列，且假设 $\{N_1(t),t\geqslant 0\}$,$\{N_2(t),t\geqslant 0\}$,$\{X_i,i=1,2,\cdots\}$,$\{Y_i,i=1,2,\cdots\}$,$\{Z_i,i=1,2,\cdots\}$相互独立.为了简便，令 $X(t)=\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i$,$Y(t)=\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i$,$Z(t)=\sum_{i=1}^{N_1^p(t)}Z_i$,$S_1(t)=ct-Y(t)$,$S_2(t)=X(t)-Z(t)$,$S(t)=S_1(t)+S_2(t)$.

$u(u\geqslant 0)$是保险公司的初始资本，保险公司经营 A险种和 B险种.对于 A险种以固定费率收取保费，$N_2(t)$是其索赔计数过程，$Y(t)$表示在 $[0,t]$内保险公司支付 A险种的总索赔额，$S_1(t)$表示 A险种的盈利过程;对于 B险种，$N_1(t)$表示在 $[0,t]$内所收到的总的保单数，$X(t)$表示到时刻 t为止 B险种所收到的总的保费，B险种的索赔过程与保费收取过程有一定的相依关系，该险种的索赔过程是一稀疏过程，$N_1^p(t)$是其索赔计数过程，$Z(t)$表示 $[0,t]$内 B险种的总索赔额，$S_2(t)$表示 B险种的盈利过程;$S(t)$为保险公司总的盈利过程，$U(t)$为保险公司的盈余过程.

设 X_1,Y_1,Z_1的分布函数分别为 $F_1(x),F_2(y)$,$F_3(z)$;期望值分别为μ_1,μ_2,μ_3;定义 X_1的 Laplace变换为 $h_1(r)=E[e^{-rX_1}]=\int_0^{\infty}e^{-rx}dF_1(x)$,定义 Y_1,Z_1的矩母函数分别为 $h_2(r)=E[e^{rY_1}]=\int_0^{\infty}e^{ry}dF_2(y)$,$h_3(r)=E[e^{rZ_1}]=\int_0^{\infty}e^{rz}dF_3(z)$,且假设 $h_1(r)<\infty$,存在 r^*，当 $r\to r^*$时，$h_2(r)\to\infty$,$h_3(r)\to\infty$.所谓发生破产，指存在 $t>0$使得 $U(t)<0$，定义破产时刻 $T=\min\{t:t\geqslant 0,U(t)<0\}$,$\inf\varnothing=\infty$.定义最终破产概率为 $\psi(u)=P(T<\infty|U(0)=u)$，最终生存概率为 $\varphi(u)=1-\psi(u)$.为了保证保险公司的稳定经营，假设保费的收取率大于单位时间期望理赔额，即 $ES(t)=(c+\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_2-\lambda_1 p\mu_3)t>0$，也就是定义正相对安全负荷系数 $\theta=\dfrac{c+\lambda_1\mu_1}{\lambda_2\mu_2+\lambda_1 p\mu_3}-1>0$.

2 几个引理

引理 1 (i) $\lim\limits_{t\to\infty}U(t)=\infty$, a.s.;

(ii) $\lim\limits_{u\to\infty}\varphi(u)=1$, a.s.;

(iii)盈利过程 $S(t)$具有平稳独立增量.

证明 (i)根据强大数定律知

$$\lim_{t\to\infty}\frac{U(t)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{u+ct}{t}+\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i}{N_1(t)}\cdot\frac{N_1(t)}{t}-\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i}{N_2(t)}\cdot\frac{N_2(t)}{t}-\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{i}^{N_1^p(t)}Z_i}{N_1^p(t)}\cdot\frac{N_1^p(t)}{t}=c+\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_2-\lambda_1 p\mu_3>0,$$

故 $\lim\limits_{t\to\infty}U(t)=\infty$, a.s..

(ii)由 (i)知，当 t充分大时 $S(t)>0$，即存在 $T>0$对 $t>T$,$S(t)>0$,而在 T之前只有有限次索赔发生，所以 $\inf\limits_{t<T}S(t)$以概率 1为下界，即当 $U\to\infty$时，$U(t)\to\infty$，故 $\lim\limits_{u\to\infty}\varphi(u)=1$, a.s..

(iii)由文献 [7]易知，$S(t)$具有平稳独立增量.

引理 2 对盈利过程 $S(t)$有 $E[\exp(-rS(t))]=\exp(tg(r))$，其中 $g(r)=-rc+\lambda_1[h_1(r)(p(h_3(r)+1-p)-1)]+\lambda_2(h_2(r)-1)$.

证明 由独立性及全期望公式，并且 $N_1^p(t)$为 $N_1(t)$的稀疏，则

$$E[e^{-rS(t)}]=E[e^{-r(ct+\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i-\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i-\sum_{i=1}^{N_1^p(t)}Z_i)}]=$$

$$e^{-rct}\cdot E\{E[e^{-r\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i+r\sum_{i=1}^{N_1^p(t)}Z_i}]|N_1(t)\}\cdot E\{E[e^{r\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i}]|N_2(t)\}=e^{-rct}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}E[e^{-r\sum_{i=1}^{N_1(t)}X_i}|N_1(t)=n]\cdot E[e^{r\sum_{i=1}^{N_1^p(t)}Z_i}|N_1(t)=n]\cdot P(N_1(t)=n)\cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}E[e^{r\sum_{i=1}^{N_2(t)}Y_i}|N_2(t)=n]\cdot P(N_2(t)=n)=$$

$$e^{-rct}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(Ee^{-rX_i})^n\cdot\frac{(\lambda_1 t)^n}{n!}e^{-\lambda_1 t}\cdot\sum_{k=0}^{n}E[e^{r\sum_{i=1}^{k}Z_i}]\cdot P(N_1^p(t)=k)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(Ee^{rY_i})^n\cdot\frac{(\lambda_2 t)^n}{n!}e^{-\lambda_2 t}=e^{-rct}\cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(Ee^{-rX_i})^n\cdot\frac{(\lambda_1 t)^n}{n!}e^{-\lambda_1 t}\cdot\sum_{k=0}^{n}(Ee^{rZ_i})^k C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(Ee^{rY_i})^n\cdot\frac{(\lambda_2 t)^n}{n!}e^{-\lambda_2 t}=e^{-rct}\cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(h_1(r))^n\cdot\frac{(\lambda_1 t)^n}{n!}e^{-\lambda_1 t}\cdot(ph_3(r)+1-p)^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(h_2(r))^n\cdot\frac{(\lambda_2 t)^n}{n!}e^{-\lambda_2 t}=$$

$$\mathrm{e}^{\{-rc+\lambda_1[h_1(r)(p(h_3(r)+1-p)-1)]+\lambda_2(h_2(r)-1)\}t}=\mathrm{e}^{tg(r)}.$$

引理 3 $g(r)=0$存在唯一正解 R.

证明 由于

$$g(r)=\lambda_1(1-p)h_1(r)+\lambda_2h_2(r)+\lambda_1ph_1(r)h_3(r)-cr-\lambda_1-\lambda_2,$$

$$g'(r)=\lambda_1(1-p)h_1'(r)+\lambda_2h_2'(r)+\lambda_1ph_1'(r)h_3(r)+\lambda_1ph_1(r)h_3'(r)-c,$$

$$g''(r)=\lambda_1(1-p)h_1''(r)+\lambda_2h_2''(r)+\lambda_1ph_1''(r)h_3(r)+\lambda_1ph_1(r)h_3''(r)+2\lambda_1ph_1'(r)h_3'(r).$$

易知 $g(0)=0, g'(0^+)=-(c+\lambda_1\_{}_1-\lambda_2\_{}_2-\lambda_1p\_{}_3)<0$,而 $g''(r)>0$,所以 $g(r)$ 在 $(0,r^*)$ 内是凸函数,又 $r\to r^*$ 时, $g(r)\to\infty$,所以必存在唯一的正数使得 $g(r)=0$.此时方程 $g(r)=0$的唯一正解记为 R 称之为调节系数.

引理 4 $F_t=\mathrm{e}(S(t),s\leqslant t)$,则 $\{M(t),F_t,t\geqslant 0\}$是鞅,其中 $M(t)=[\exp(-rU(t)-tg(r))]$.

证明 设 $s\leqslant t$ 则 $\{M(s)\}$是 $\{F_s\}$可测的,又因为 $U(t)$是平稳独立增量,于是根据引理3有

$$E[M(t)|F_s]=E[\mathrm{e}^{-rU(t)-tg(r)}|F_s]=E[\mathrm{e}^{-rU(s)-sg(r)-r(U(t)-U(s))-(t-s)g(r)}|F_s]=M(s)E[\frac{\mathrm{e}^{-r(U(t)-U(s))}}{\mathrm{e}^{(t-s)g(r)}}|F_s]=M(s).$$

引理 5 T关于 F_t是停时.

3 主要结果

定理 1 盈余过程 $U(t)$的最终生存概率 $H(u)$满足积分方程

$$H(u)=H(0)+m\int_0^u H(t)\mathrm{d}t-\frac{\lambda_1 q}{c}\int_0^u\int_0^\infty H(t+x)\mathrm{d}F_1(x)\mathrm{d}t-\frac{\lambda_2}{c}\int_0^u\int_0^t H(t-y)\mathrm{d}F_2(y)\mathrm{d}t-\frac{\lambda_1 p}{c}\int_0^u\int_0^\infty\int_0^{t+x}H(t+x-z)\mathrm{d}F_3(z)\mathrm{d}F_1(x)\mathrm{d}t,\quad(1)$$

其中 $m=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{c}$.

$$H(0)=1-\frac{\lambda_1 q}{c}\int_0^\infty F_1(x)(1-H(x))\mathrm{d}x-\frac{\lambda_1 p}{c}\int_0^\infty[1-\int_0^\infty\int_0^{t+x}H(t+x-z)\mathrm{d}F_3(z)\mathrm{d}F_1(x)]\mathrm{d}t-\frac{\lambda_2}{c}\_{}_2.\quad(2)$$

证明 对于盈余过程 $U(t)$在很小的时间区间 $[0,\triangle]$内,分以下5种情况考虑 $H(u)$.由概率乘法公式 $P(AB)=P(A)P(B|A)$则:

(i)在 $[0,\triangle]$内, $N_1(t)$,$N_2(t)$和 $N_1^p(t)$均无跳跃发生,其概率为 $(1-\lambda_1\triangle)(1-\lambda_2\triangle)\times 1$;

(ii)在 $[0,\triangle]$内, $N_1(t)$有一跳跃发生, $N_2(t)$, $N_1^p(t)$均无跳跃发生,其概率为 $\lambda_1\triangle(1-\lambda_2\triangle)\times q$;

(iii)在 $[0,\triangle]$内, $N_2(t)$有一跳跃发生, $N_1(t)$, $N_1^p(t)$均无跳跃发生,其概率为 $\lambda_2\triangle(1-\lambda_1\triangle)\times 1$;

(iv)在 $[0,\triangle]$内, $N_1(t)$,$N_1^p(t)$均有一跳跃发生, $N_2(t)$无跳跃发生,其概率为 $\lambda_1\triangle\times p\times(1-\lambda_2\triangle)$;

(v)在 $[0,\triangle]$内,上述其它情况发生的概率为 $o(\triangle)$或0.

由全概率公式有

$$H(u)=(1-\lambda_1\triangle)(1-\lambda_2\triangle)H(u+c\triangle)+\lambda_1\triangle(1-\lambda_2\triangle)q\int_0^\infty H(u+c\triangle+x)\mathrm{d}F_1(x)+\lambda_2\triangle(1-\lambda_1\triangle)\int_0^{u+c\triangle}H(u+c\triangle-y)\mathrm{d}F_2(y)+\lambda_1\triangle p\times(1-\lambda_2\triangle)\int_0^\infty\int_0^{u+c\triangle+x}H(u+c\triangle+x-z)\mathrm{d}F_3(z)\mathrm{d}F_1(x)+o(\triangle).\quad(3)$$

整理,令 $m=\frac{\lambda_1+\lambda_2}{c}$同时在等式两端同除以 $-c\triangle$,并令 $\triangle\to 0$两端取极限得

$$H'(u)=mH(u)-\frac{\lambda_1 q}{c}\int_0^\infty H(u+x)\mathrm{d}F_1(x)-\frac{\lambda_2}{c}\int_0^u H(u-y)\mathrm{d}F_2(y)-\frac{\lambda_1 p}{c}\int_0^\infty\int_0^{u+x}H(u+x-z)\mathrm{d}F_3(z)\mathrm{d}F_1(x).\quad(4)$$

对(4)式,在区间 $[0,t]$上积分得

$$H(t)-H(0)=m\int_0^t H(u)\mathrm{d}u-\frac{\lambda_1 q}{c}\int_0^t\int_0^\infty H(u+x)\mathrm{d}F_1(x)\mathrm{d}u-\frac{\lambda_2}{c}\int_0^t\int_0^u H(u-y)\mathrm{d}F_2(y)\mathrm{d}u-\frac{\lambda_1 p}{c}\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{u+x}H(u+x-z)\mathrm{d}F_3(z)\mathrm{d}F_1(x)\mathrm{d}u.\quad(5)$$

对(5)式进行整理就可以得到(1)式.由于

$$\int_0^t H(u)\mathrm{d}u=\int_0^t H(t-u)\mathrm{d}u,\quad(6)$$

$$\int_0^t\int_0^\infty H(u+x)\mathrm{d}F_1(x)\mathrm{d}u=\int_0^t[1-\int_0^\infty F_1(x)H'(u+x)\mathrm{d}x]\mathrm{d}u=\int_0^t\mathrm{d}u-\int_0^\infty F_1(x)\int_0^t H'(u+x)\mathrm{d}u\mathrm{d}x=\int_0^t\mathrm{d}u-\int_0^\infty F_1(x)[H(t+x)-H(x)]\mathrm{d}x,\quad(7)$$

$$\int_0^t\int_0^u H(u-y)\mathrm{d}F_2(y)\mathrm{d}u=\int_0^t[H(0)F_2(u)-H(u)F_2(0)]\mathrm{d}u+\int_0^t\int_0^u H'(u-y)F_2(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}u=H(0)\int_0^t F_2(u)\mathrm{d}u+\int_0^t F_2(y)[H(t-y)-H(0)]\mathrm{d}y=\int_0^t F_2(y)H(t-y)\mathrm{d}y.\quad(8)$$

将(6)式,(7)式,(8)式代入(5)式整理得

$$H(t)=H(0)+\frac{\lambda_1}{c}\int_0^t H(u)\mathrm{d}u-\frac{\lambda_1 q}{c}[\int_0^t\mathrm{d}u-$$

$$\int_0^\infty F_1(x)[\mathrm{H}(t+x)-\mathrm{H}(x)]\mathrm{d}x] + \frac{\lambda_2}{c}\int_0^t(1-F_2(y))\mathrm{H}(t-y)\mathrm{d}y - \frac{\lambda_1 p}{c}\int_0^t\int_0^\infty\int_0^{u+x}\mathrm{H}(u+x-z)\mathrm{d}F_3(z)\mathrm{d}F_1(x)\mathrm{d}u = \mathrm{H}(0) + \frac{\lambda_1 q}{c}\int_0^t(\mathrm{H}(t-u)-1)\mathrm{d}u + \int_0^\infty F_1(x)[\mathrm{H}(t+x)-\mathrm{H}(x)]\mathrm{d}x] + \frac{\lambda_2}{c}\int_0^t(1-F_2(y))\mathrm{H}(t-y)\mathrm{d}y + \frac{\lambda_1 p}{c}\int_0^t[\mathrm{H}(t-u) - \int_0^\infty\int_0^{u+x}\mathrm{H}(u+x-z)\mathrm{d}F_3(z)\mathrm{d}F_1(x)]\mathrm{d}u. \tag{9}$$

令 $t\to\infty$,由 $\mathrm{H}(\infty)=1$及控制收敛定理得

$$1 = \mathrm{H}(0) + \frac{\lambda_1 q}{c}\int_0^\infty F_1(x)(1-\mathrm{H}(x))\mathrm{d}x - \frac{\lambda_1 p}{c}\int_0^\infty[1-\int_0^\infty\int_0^{t+x}\mathrm{H}(t+x-z)\mathrm{d}F_3(z)\mathrm{d}F_1(x)]\mathrm{d}t - \frac{\lambda_2}{c}{}_{2}. \tag{10}$$

对(10)式进行整理就可以得到(2)式,从而定理1得到证明.

推论　若 X_1,Y_1,Z_1 均服从参数为 T的指数分布,则 $\mathrm{H}(u)=1+C_1e^{u_1u}$,其中 $C_1=\mathrm{H}(0)-1$, $u_1=\frac{m-\sqrt{m^2+4\mathrm{T}(\mathrm{T}+l)}}{2}$, $l=\frac{\lambda_1q-\lambda_2}{c}$.

证明　若 X_1,Y_1,Z_1 均服从参数为 T的指数分布,即分布函数均可记为 $F(x)=1-e^{-\mathrm{T}x}$,密度函数均可记为 $f(x)=\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}x}$.由(4)式有

$$\mathrm{H}'(u)=m\mathrm{H}(u)-\frac{\lambda_1 q}{c}\int_0^\infty\mathrm{H}(u+x)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}x}\mathrm{d}x-\frac{\lambda_2}{c}\int_0^u\mathrm{H}(u-y)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}y}\mathrm{d}y-\frac{\lambda_1 p}{c}\int_0^\infty\int_0^{u+x}\mathrm{H}(u+x-z)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}z}\mathrm{d}z\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}x}\mathrm{d}x. \tag{11}$$

记 $I_1(u)=\int_0^\infty\mathrm{H}(u+x)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}x}\mathrm{d}x$, $I_2(u)=\int_0^u\mathrm{H}(u-y)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}y}\mathrm{d}y$, $I_3(u)=\int_0^u\mathrm{H}(u-z)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}z}\mathrm{d}z$, $I_4(u)=\int_0^\infty\int_0^{u+x}\mathrm{H}(u+x-z)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}z}\mathrm{d}z\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}x}\mathrm{d}x$.

则(11)式可以写成

$$\mathrm{H}'(u)=m\mathrm{H}(u)-\frac{\lambda_1 q}{c}I_1(u)-\frac{\lambda_2}{c}I_2(u)-\frac{\lambda_1 p}{c}I_4(u). \tag{12}$$

对 $I_1(u),I_2(u),I_3(u),I_4(u)$分别作 $x_1=u+x$, $y_1=u-y$, $z_1=u-z$换元后求关于 u的导数.

$$I_1'(u)=\left(\int_u^\infty\mathrm{H}(x_1)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}(x_1-u)}\mathrm{d}x_1\right)'=\mathrm{T}\int_u^\infty\mathrm{H}(x_1)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}(x_1-u)}\mathrm{d}x_1-\mathrm{T}\mathrm{H}(u)=-\mathrm{T}\mathrm{H}(u)+\mathrm{T}I_1(u),$$

$$I_2'(u)=\mathrm{T}\mathrm{H}(u)-\mathrm{T}\int_0^u\mathrm{H}(y_1)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}(u-y_1)}\mathrm{d}y_1=\mathrm{T}\mathrm{H}(u)-\mathrm{T}I_2(u),$$

$$I_3'(u)=\mathrm{T}\mathrm{H}(u)-\mathrm{T}\int_0^u\mathrm{H}(z_1)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}(u-z_1)}\mathrm{d}z_1=\mathrm{T}\mathrm{H}(u)-\mathrm{T}I_3(u),$$

$$I_4'(u)=\mathrm{T}\int_u^\infty\left(\int_0^{x_1}\mathrm{H}(x_1-z)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}(x_1-u)}\mathrm{d}x_1-\mathrm{T}\int_0^u\mathrm{H}(u-z)\mathrm{T}e^{-\mathrm{T}z}\mathrm{d}z=\mathrm{T}(I_4(u)-I_3(u)).$$

由文献[8]知 $\mathrm{H}(u)$具有可微性,故对(12)式两端关于 u求导,并令 $l=\frac{\lambda_1q-\lambda_2}{c}$得

$$\mathrm{H}''(u)=m\mathrm{H}'(u)-\frac{\lambda_1 q}{c}[-\mathrm{T}\mathrm{H}(u)+\mathrm{T}I_1(u)]-\frac{\lambda_2}{c}[\mathrm{T}\mathrm{H}(u)-\mathrm{T}I_2(u)]-\frac{\lambda_1 p}{c}[\mathrm{T}I_4(u)-\mathrm{T}I_3(u)]=m\mathrm{H}'(u)+l\mathrm{T}\mathrm{H}(u)-\frac{\lambda_1 q}{c}\mathrm{T}I_1(u)+\frac{\lambda_2}{c}\mathrm{T}I_2(u)+\frac{\lambda_1 p}{c}[\mathrm{T}I_3(u)-\mathrm{T}I_4(u)]. \tag{13}$$

对(13)式两端关于 u求导整理得

$$\mathrm{H}'''(u)=m\mathrm{H}''(u)+l\mathrm{T}\mathrm{H}'(u)+m\mathrm{T}^2\mathrm{H}(u)-\frac{\lambda_1 q}{c}\mathrm{T}^2I_1(u)-\frac{\lambda_2}{c}\mathrm{T}^2I_2(u)-\frac{\lambda_1 p}{c}\mathrm{T}^2I_4(u). \tag{14}$$

(14) − (12)× T^2并整理得

$$\mathrm{H}'''(u)-m\mathrm{H}''(u)-(l\mathrm{T}+\mathrm{T}^2)\mathrm{H}'(u)=0. \tag{15}$$

由(15)式知(14)式的特征方程为 $u^3-mu^2-\mathrm{T}(\mathrm{T}+l)u=0$. 解得其特征根为

$$u_0=0,\ u_1=\frac{m-\sqrt{m^2+4\mathrm{T}(\mathrm{T}+l)}}{2},\ u_2=\frac{m+\sqrt{m^2+4\mathrm{T}(\mathrm{T}+l)}}{2}.$$

于是 $\mathrm{H}(u)$可表示为 $\mathrm{H}(u)=C_0+C_1e^{u_1u}+C_2e^{u_2u}$其中 C_0,C_1,C_2为常数.由于当 $u\to\infty$时 $\mathrm{H}(u)=1$,而 $u_1\leqslant0$, $u_2>0$于是 $C_2=0$,但是,如果 $u_1=0$则 $\mathrm{H}(u)$为常数,无实际意义.于是 $u_1<0$, $C_0=1$, $C_2=0$,即

$$\mathrm{H}(u)=1+C_1e^{u_1u}. \tag{16}$$

当 $u=0$时, $\mathrm{H}(0)=1+C_1$,从而 $C_1=\mathrm{H}(0)-1$,于是求出 $\mathrm{H}(u)$的表达式.

定理2　盈余过程 $U(t)$的最终破产概率 $\mathrm{J}(u)$满足 $\mathrm{J}(u)\leqslant e^{-R^*u}$,其中 $R^*=\sup_{r>0}\{r: g(r)\leqslant0\}$.

证明　任意选定 t_0,则 $t_0\wedge T$为有界停时,由有界停时定理[1]及全期望公式得

$$e^{-ru}=M(0)=E[M(t_0\wedge T)]=E[M(t_0\wedge T)|T\leqslant t_0]P(T\leqslant t_0)+E[M(t_0\wedge T)|T>t_0]P(T>t_0)\geqslant E[M(T)|T\leqslant t_0]P(T\leqslant t_0), \tag{17}$$

由于在 $T<\infty$时, $u+S(T)<0$,故

$$P(T\leqslant t_0)\leqslant\frac{e^{-ru}}{E[M(T)|T\leqslant t_0]}\leqslant$$

$$\frac{e^{-ru}}{E[M(e^{-Tg(r)}) \mid T \leqslant t_0]} \leqslant e^{-ru} \sup_{0 \leqslant t \leqslant t_0} e^{tg(r)}, \qquad (18)$$

在(18)式中令 $t_0 \to \infty$,得 $\psi(u) \leqslant \sup_{t \geqslant 0} e^{tg(r)}$. 为了尽可能满足不等式,在限制条件 $\sup_{t \geqslant 0} e^{tg(r)} < \infty$ 下,选择尽可能大的 r 并记为 R^* 显然 $R^* = \sup_{r>0}\{r: g(r) \leqslant 0\}$. 此时我们称 R^* 为 Lundberg 指数,根据调节系数的定义知 R^* 就是 R.

定理 3 设 R 为调节系数,则盈余过程 $U(t)$ 的最终破产概率为 $\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]}$.

证明 在(17)式中取 $r = R$ 得

$$e^{-Ru} = E[e^{-RU(T)} \mid T \leqslant t_0]P(T \leqslant t_0) + E[e^{-RU(t_0)} \mid T > t_0]P(T > t_0). \qquad (19)$$

以 I_A 表示集合 A 的示性函数,则

$$0 \leqslant E[e^{-RU(t_0)} \mid T > t_0]P(T > t_0) = E[e^{-RU(t_0)} \mid I_{(T > t_0)}] \leqslant E[e^{-RU(t_0)} \cdot I_{(U(t_0) > 0)}],$$

而 $0 \leqslant e^{-RU(t_0)} \cdot I_{(U(t_0) > 0)} \leqslant 1$. 根据引理 1(1)及控制收敛定理[1]得 $\lim_{t_0 \to \infty} E[e^{-RU(t_0)} \mid T > t_0]P(T > t_0) = 0$, a.s. 故在(19)中令 $t_0 \to \infty$,可得

$$\psi(u) = P(T < \infty) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]}.$$

参考文献:

[1] Rolski T, Schmidli H, Schmidt V, et al. Stochastic processes for insurance and finance [M]. New York: Wiley, 1999.

[2] Gerber H U. 数学风险论导引 [M]. 成世学,严颖,译. 北京:世界图书出版社, 1979.

[3] 蒋志明,王汉兴. 一类多险种风险过程的破产概率 [J]. 应用数学与计算数学学报, 2000, 14(1): 9-16.

[4] 陈占斌,刘再明. 稀疏过程在破产问题中的应用 [J]. 数学理论与应用, 2005, 25(1): 35-38.

[5] 方世祖,罗建华. 双复合 Poisson 风险模型 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2006, 22(2): 271-278.

[6] 邓永录,梁之舜. 随机点过程及其应用 [M]. 北京:科学出版社, 1992.

[7] 何声武. 随机过程引论 [M]. 北京:高等教育出版社, 1996.

[8] 张春生,吴荣. 关于破产概率函数的可微性的注 [J]. 应用概率统计, 2001, 17(3): 267-275.

(责任编辑:尹 闯)

我国发现首例基因变异新生儿糖尿病

一位新生儿糖尿病患者在北京协和医院被检测出 KCNJ11 基因变异,这是国内首位被确诊为因该基因变异而引发新生儿糖尿病的患者。该患者今年 3 岁 7 个月,出生后 42 天因发热、胃口不好等原因前往医院就诊,被查出血尿糖高、尿酮体++,医院一直按 I 型糖尿病对他进行治疗,使用胰岛素,但效果欠佳。该患者到北京协和医院求治。该院内分泌科糖尿病组对患者开展了致病基因筛查,鉴定该患者患有 KCNJ11 基因杂合子激活突变(R201H)引起的新生儿糖尿病,并对其进行了口服药物替代胰岛素治疗。目前该患者血糖稳定,空腹及餐后血糖基本控制在正常范围。

新生儿糖尿病是由于不同基因变异引起的特殊类型糖尿病,是指出生后 6 个月内发病的糖尿病,是一种少见的特殊类型糖尿病,临床上分为永久性新生儿糖尿病和短暂性新生儿糖尿病。此病由一些特殊基因突变所致。短暂性新生儿糖尿病可以缓解并终止治疗,但患者成年后可能复发。永久性新生儿糖尿病需要终身治疗。近年来,国际糖尿病界对新生儿糖尿病的病因研究取得了重大进展,发现由某些基因突变导致的该病,如杂合子激活的 KCNJ11 变异和 ABCC8 变异的新生儿糖尿病。用胰岛素治疗这类疾病并不是最好的选择,有些患者改用口服降糖药物进行治疗效果更好。