DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.001
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 97~ 98

用素数阶循环图计算经典 Ramsey数的下界*

Lower Bounds for Ramsey Numbers Based on Cyclic Graphs

许晓东[1],黎贞崇[1],罗海鹏[1],苏文龙[2],陈 红[2]
XU Xiao-dong[1], LI Zhen-chong[1], LUO Hai-peng[1], SU Wen-long[2], CHEN hong[2]

(1.广西科学院,广西南宁 530007; 2.梧州学院,广西梧州 543002)
(1. Guangxi Academy of Sciences, Nanning, Guangxi, 530007, China; 2. Wuzhou University, Wuzhou, Guangxi, 543002, China)

摘要: 利用素数阶循环图计算经典 Ramsey下界,得到 3个经典 Ramsey数 $R(3,t)$的新下界: $R(3,35)\geqslant 230$, $R(3,37)\geqslant 242$, $R(3,39)\geqslant 258$.

关键词: Ramsey数 下界 循环图
中图法分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)02-0097-02

Abstract: By constructing cyclic graphs of prime order, we get new lower bounds for three Ramsey numbers $R(3,t)$: $R(3,35)\geqslant 230$, $R(3,37)\geqslant 242$, $R(3,39)\geqslant 258$.

Key words: Ramsey number, lower bound, cyclic graph

对于任意正整数 s和 t,经典 Ramsey数 $R(s,t)$是具有下述性质的最小正整数 n:每个 n阶简单图,或者包含一个有 s个顶点的团,或者包含一个有 t个顶点的独立集.确定 Ramsey数 $R(s,t)$是组合数学中非常困难的问题[1]. 1955年, Greenwood R E与 Gleason A M[2]在确定 Ramsey数 $R(3,3)=6$, $R(3,4)=9$, $R(3,5)=14$, $R(4,4)=18$, $R(3,3,3)=17$的时候,首先构造循环图计算它们的下界,再用递推不等式证明其上界,从而得到历史上第一批 Ramsey数的准确值.后世的学者沿用这种方法,得到一些新的成果.动态综述[3]记录迄今已知的一些经典 Ramsey数的准确值和上下界.

用循环图研究经典 Ramsey数下界的主要困难,是在寻找有效的参数集来构造图和计算图的团数这两个方面都会遇到巨大的运算量.文献 [4~11]利用素数阶循环图研究经典 Ramsey数的下界,能够充分运用有限域的性质提高运算效率.本文在此基础上继续深入研究,构造素数阶循环图,计算得到 3个经典 Ramsey数 $R(3,t)$的新下界.

收稿日期: 2007-11-12
作者简介: 许晓东 (1974-),男,副研究员,主要从事图论研究工作。
* 国家自然科学基金项目(批准号: 60563008)、广西自然科学基金项目 (桂科字 0640037)、梧州学院科研项目 (2007B007)资助。

1 相关定义及引理

给定素数 $p=2m+1\geqslant 5$.对于整数 $s<t$,记 $[s,t]=\{s,s+1,\cdots,t\}$,令 $Z_p=[-m,m]$.

以下除非特别说明,所有模 p整数的运算结果都理解为模 p后属于 Z_p,并用通常的等号“=”表示“模 p相等”.

定义 1 对于集合 $S=[1,m]$的一个 2部分拆 $S=S_1\cup S_2$,记 $A_i=\{x|\ x\in S_i$或 $-x\in S_i\}$,设 p阶完全图 K_p的顶点集 $V=Z_p$,边集 E是 Z_p的所有 2元子集的集且有分拆 $E=E_1\cup E_2$,其中 $E_i=\{\{x,y\}|\ \{x,y\}\in E$且 $x-y\in A_i\}$, $i=1,2$.把 E_i中的边叫做 A_i色的,记 K_n中 A_i色边所导出的子图为 $G_p(A_i)$,其团数记为 $[G_p(A_i)]$.

按照参数集合 A_1或 A_2(即 S_1或 S_2)把 K_p的边 2-染色,得到 p阶循环图 $G_p(A_i)$.根据 Ramsey数的定义即得 $R([G_p(A_1)]+1,[G_p(A_2)]+1)\geqslant p+1$.

考察 $G_p(A_i)$的团和团数.注意到图 $G_p(A_i)$是顶点可迁的,其团数等于 $G_p(A_i)$中含顶点 0的团的最大阶,因此只须考察含顶点 0的团.根据定义 1知这样的团的其他非零顶点是集合 A_i的元.

引理 1 记图 $G_p(A_i)$中顶点集为 A_i的导出子图为 $G_p[A_i]$,其团数为 $[A_i]$,则有 $[G_p(A_i)]=[A_i]+1$.

于是求 $G_p(A_i)$的团数就转化为求 $G_p[A_i]$的团

数.为了求得 $[A_i]$,引进 A_i 的一个全序.

对于任意 $a\in A_i$,考察顶点 a 的度数 $d_i(a)$.记 $D_i(a)=\{y\in A_i | a-y\in A_i\}$, $d_i(a)=|D_i(a)|$.

由定义 1知 $A_i=-A_i$,故 Z_i 到自身的变换 $f: x \mapsto -x$ 是 $G_p(A_i)$ 的自同构.由此易知 $y\in A_i, y-a\in A_i <=> -y\in A_i, -y+a\in A_i$.故有 $d_i(a)=d_i(-a)$.即 A_i 的二元子集 $\{a,-a\}$ 的两个元的度数相等.易知,二元子集 $\{a,-a\}$ 中有且仅有一个元属于 S_i.当 n 为偶数且 $a=m\in S_i$ 时 $a=-a$,此时二元子集 $\{a,-a\}$ 退化为一元子集 $\{a\}$.为了叙述简便,把 A_i 的二元子集 $\{a,-a\}$ 与退化了的一元子集 $\{a\}$ 都形式地记为 $\{a,-a\}$.

定义 2 设 $x\in S_i$,记

$D_i(x)=\{y\in A_i | x-y\in A_i\}, d_i(x)=|D_i(x)|$.

在 A_i 上的序 $\prec$ 规定如下.设 $a,b\in S_i$,则

(1) A_i 的子集 $\{a,-a\}$ 对于序 $\prec$ 构成区间,并且当 $a\neq -a$ 时 $a\prec -a$.

(2) 对于 A_i 中分属不同子集的元 $x\in\{a,-a\}$ 和 $y\in\{b,-b\}$,规定 $x\prec y$ 当且仅当 $d_i(a)<d_i(b)$,或者当 $d_i(a)=d_i(b)$ 时 $a<b$.

易知序 $\prec$ 是明确定义的,并且 $(A_i,\prec)$ 是全序集.$x\prec y$ 称为 x 前于 y.

引理 2[7] 如果对于任意 $x\in S_i$,都有 $d_i(x)=0$,那么 $[A_i]=1$.

定义 3 全序集 $(A_i,\prec)$ 上的长为 $k(k\geqslant 1)$ 的链 $x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_k$ 称为起点为 x_0 的长为 k 的 A_i 色链,如果对于 $0\leqslant h<j\leqslant k$ 有 $x_h-x_j\in A_i$.起点是 x_0 的链的最大长记为 $l_i(x_0)$.如果起点是 x_0 的长为 $k\geqslant 1$ 的链不存在,就令 $l_i(x_0)=0$.

引理 3[7] $[A_i]=1+\max\{l_i(a) | a\in S_i\}$.

以 $R(3,5)$ 为例来说明引理 1,引理 2,引理 3的用法.给定 $p=13$,令 $S_1=\{1,5\}$.根据引理 2易知 $[G_{13}(A_1)]=2$.为了计算 $G_{13}[A_2]$,由定义 2作全序集 $(A_2,\prec)=\{2,-2,3,-3,4,-4,6,-6\}$,并且有 $D_2(2)=\{y\in A_2 | 2-y\in A_2\}=\{-2,4,-4,6\}$.对 $D_2(2)$ 用回溯法,得到 $G_{13}[A_2]$ 的以 2为起点的第一条长为 2的 A_2 色链 $2\prec -2\prec 4$.此后不存在以 2为起点的更长的 A_2 色的链,即 $l_2(2)=2$.进一步计算表明,在 $G_P[A_2]$ 中对于任意起点 $a\in S_2$,都没有更长的 A_2 色的链,故有 $\max\{l_2(a) | a\in S_2\}=2$. 根据引理 3得 $[A_2]=3$.根据引理 1得 $[G_{13}(A_2)]=4$.根据 Ramsey数的定义得 $R(3,5)\geqslant 14$. 14是 $R(3,5)$ 最好下界.

2 主要结果

定理 1 $R(3,35)\geqslant 230$, $R(3,37)\geqslant 242$, $R(3,39)\geqslant 258$.

证明 为了简便,省略按照上述方法计算团数过程的叙述,只写出整数 n 与参数集 S_1,以及计算得到的 $R(3,t)$ 的新下界.

(1)取素数 $p=229$,令 $S_1=\{1,4,12,14,22,37,42,47,53,62,78,81,87,102,108,110\}$,计算得 $R(3,35)\geqslant 230$.

(2)取素数 $p=241$,令 $S_1=\{1,6,8,20,30,35,37,39,42,54,64,71,75,82,86,98,111,115\}$,计算得 $R(3,37)\geqslant 242$.

(3)取素数 $p=257$,令 $S_1=\{1,3,12,22,36,46,51,56,61,69,75,77,79,84,86,88,93,116\}$,计算得 $R(3,39)\geqslant 258$.

在 CPU为 AMD3600+ 的计算机上完成上述运算的时间约为 15h.

参考文献:

[1] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory with Applications [M]. Great Britain: The Macmillan Press Ltd, 1976.

[2] Greenwood R E, Gleason A M. Combinatorial relations and chromatic graphs [J]. Canadian Journal of Mathematics, 1955(7): 1-7.

[3] Radziszowski S P. Small Ramsey numbers[J/OL]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2006, DS1,# 11: 1-60, http://www.combinatorics.org.

[4] 苏文龙,罗海鹏,李乔.多色经典 Ramsey数 $R(q,q,\cdots,q)$ 的下界 [J].中国科学: A辑, 1999, 29(5): 408-413.

[5] 苏文龙,罗海鹏,李乔.经典 Ramsey数 $R(4,12)$, $R(5,11)$ 和 $R(5,12)$ 的新下界 [J].科学通报, 1997, 42(22): 2460.

[6] 罗海鹏,苏文龙,李乔.经典 Ramsey数 $R(6,12)$, $R(6,14)$ 和 $R(6,15)$ 的新下界 [J].科学通报, 1998, 43(12): 1336-1337.

[7] Su Wenlong, Luo Haipeng, Shen Yunqiu. New lower bounds for classical ramsey numbers $R(5,13)$ and $R(5,14)$ [J]. Applied Mathematics Letters, 1999(12): 121-122.

[8] Luo Haipeng, Su Wenlong, Yunqiu Shen. New lower bounds of ten classical Ramsey numbers[J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2001(24): 81-90.

[9] Luo Haipeng, Su Wenlong, Li Zhenchong. The properties of self-complementary graphs and new lower bounds for diagonal Ramsey numbers [J]. Australasian Journal of Combinatorics, 2002(25): 103-116.

[10] Su Wenlong, Li Qiao, Luo Haipeng, et al. Lower bounds of Ramsey numbers based on cubic residues[J]. Discrete Mathematics, 2002, 250: 197-209.

[11] Luo Haipeng, Su Wenlong, Shen Yunqiu. New lower bounds for two multicolor classical Ramsey numbers [J]. Radovi Matematicki, 2004(13): 15-21.

(责任编辑: 尹 闯)