DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.002
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 99~ 104

收缩临界 κ 连通图中阶较小端片的基数*

A Result of End with Smaller Cardinality in Contraction Critical κ Connected Graphs

陈新卫[1,2],苏健基[1]
CHEN Xin-wei[1,2], SU Jian-ji[1]

(1.广西师范大学数学科学学院,广西桂林 541004; 2.苏州亦博软件技术学院基础部,江苏苏州 215163)

(1. Department of Mathematics, Guangxi Normal University, Guilin, Guangxi, 541004, China; 2. Department of Basic Caurses, Global Institute of Software Technology, Suzhou, Jiangsu, 215163, China)

摘要:设 G是收缩临界 κ连通图,$\kappa = 4q+ r(0\leqslant r\leqslant 2, q\geqslant 2)$,证明如果 G的原子 A的阶为 $q-1$,则 G中存在另一个与 A不相交的端片 B,使得 $|B|\leqslant q$.

关键词:端片 收缩临界 断片 原子
中图法分类号: O157.5 文献标识码: A 文章编号: 1005-9164(2008)02-0099-06

Abstract In this paper we prove the following result: let G be an contraction-critical k-connected graph, and $k = 4q+ r$ $(0\leqslant r\leqslant 2, q\geqslant 2)$, if G has an atom A with cardinality $q-1$, then G has another end B disjoint from A, such that $|B|\leqslant q$.

Key words end, contraction critical, fragments, atom

对于收缩临界 κ连通图 G, Egawa[1] 证明 G中原子的基数不超过$\frac{\kappa}{4}$,由此推出最小度 $W(G)\leqslant \frac{5\kappa}{4}-1$. 苏健基[2]将 Egawa这一结果推广为: G中存在 2个不相交的断片 A,B,使得 $|A|+|B|\leqslant \frac{\kappa}{2}$. 最近 Kriesell[3]加强了这一结果,得到: G中存在 2个不相交的断片 A,B,使得 $|A|+|B|\leqslant 2[\frac{\kappa}{4}]$.苏健基[2]还证明:如果 $W(G)=\frac{5\kappa}{4}-1$,即 κ能被 4整除,且原子的基数为$\frac{\kappa}{4}$,那么 G有 4个阶为$\frac{\kappa}{4}$的原子,并且猜想在这个结论中原子数目的下界 4有可能改进到 6.这一猜想已被 Kriesell[3]与袁旭东[4]等人分别证明.

本文设 G是收缩临界 κ连通图,$\kappa = 4q+ r(0\leqslant r\leqslant 2, q\geqslant 2)$,在上述文献的基础上,进一步研究阶较小端片的基数,缩小了其基数的范围.文中讨论的图都是有限阶的无向简单图,未经说明的术语与记号参考文献[5].

1 相关概念及引理

设 G是非完全图,$F\subseteq V(G)$,$N(F)$是 $V(G)-F$中与 F相邻的顶点集合,若 $F=\{x\}$,则记为 $N(x)$. $d(x)=|N(x)|$表示点 x在 G中的度,记 $\bar F = V(G)-(F\cup N(F))$.若$|N(F)|=\kappa(G)$且 $\bar F\neq\emptyset$,则称 F为 G的断片,这里 $\kappa(G)$表示 G的连通度.设 $T\subseteq V(G)$,若 $G-T$不连通,则称 T是 G的点割集.当$|T|=\kappa(G)$,则称 T是 G的最小点割集.设 F是 G的断片,记 $T=N(F)$,有时也称 F是 G中的 T-断片.易见 $N(F)=T=N(\bar F)$,且 $\bar F$也是 G的 T-断片,这时称 F与 F是最小点割 T分离 G所得的两个断片.若 F是断片,但 F的任意真子集都不是 G的断片,则称 F为 G的端片.顶点数最少的断片叫原子,原子的阶用 $T(G)$来表示.设 G是 κ连通图,$e\in E(G)$,若收缩边 e后得到的图仍然是 κ连通,则称 e为 G的 κ可收缩边,简称可收缩边.反之则称 e为不可收缩边.

设 B是收缩临界 κ连通图 G的一个固定端片. G中的一个断片 F,如果满足 $N(F)\cap B\neq\emptyset$,那么就称 F为 G的一个 $N(B)$断片.如果 F是 G的一个 $N(B)$

收稿日期: 2007-11-12
作者简介:陈新卫(1978-),男,硕士,主要从事图论研究工作。
* 广西自然科学基金项目(桂科自 0640063)资助。

断片,由于 $N(\bar{F})=N(F)$,因而 $\bar{F}$ 也是 G 的一个 $N(B)$ 断片.若 F 是 G 的 $N(B)$ 断片,但 F 的任意真子集都不是 G 的 $N(B)$ 断片,则称 F 是 G 的 $N(B)$ 端片.

引理 1[6] F,F' 为 G 的 2 个不同的断片,$T=N(F)$,$T'=N(F')$,则

(1) 若 $F\cap F'\neq\emptyset$,则 $|F\cap T'|\geqslant|\overline{F'}\cap T|$,$|F'\cap T|\geqslant|\bar{F}\cap T'|$.

(2) 若 $F\cap F'\neq\emptyset\neq\bar{F}\cap\overline{F'}$,则 $F\cap F'$,$\bar{F}\cap\overline{F'}$ 都是 G 的断片,且 $N(F\cap F')=(T\cap T')\cup(T\cap F')\cup(F\cap T')$,$N(\bar{F}\cap\overline{F'})=(T\cap T')\cup(T\cap\overline{F'})\cup(\bar{F}\cap T')$.

(3) 若 $F\cap F'\neq\emptyset$ 且 $F\cap F'$ 不是断片,则 $F\cap\overline{F'}=\emptyset$ 且 $|F\cap T'|>|\overline{F'}\cap T|$,$|F'\cap T|>|\bar{F}\cap T'|$.

引理 2[6] 设 G 是 κ 连通图,A,T 分别是 G 的一个原子和最小点割,若 $A\cap T\neq\emptyset$,那么 $A\subseteq T$.

引理 3[2] 设 G 是收缩临界 κ 连通图,B 是 G 的一个端片,那么 G 有 4 个 $N(B)$ 断片 F_1,F_2,F_3,F_4,使得 $F_1,F_2,F_3,F_4\cap N(B)$ 两两不交.

引理 4[2] 设 G 是收缩临界 κ 连通图,B,F 分别是 G 的一个端片和断片,如果 $N(F)\cap B\neq\emptyset$,那么 $|F\cap N(B)|\geqslant \mathrm{T}(G)$.

2 主要结论

定理 1 设 G 是收缩临界 $\kappa=4q+r(0\leqslant r\leqslant 2,q\geqslant 2)$ 连通图,如果 G 的原子 A 的阶为 $q-1$,则 G 中有另一个与 A 不相交端片 B,使得 $|B|\leqslant q$.

证明 以下均设 G 是收缩临界 κ 连通图.由于 $\kappa=4q+r(0\leqslant r\leqslant 2,q\geqslant 2)$,则 $q=[\frac{\kappa}{4}]$.设 A 是 G 的一个阶为 $q-1$ 的原子,取 G 中不同于 A 的一个阶最小的端片 B,假设定理 1 不成立,那么 $|B|\geqslant q+1$. 又由 kriesell 定理[3] 知 $|B|=q+1$.根据引理 3,存在 4 个 $N(B)$ 断片.必然也存在 4 个 $N(B)$ 端片,取 4 个 $N(B)$ 端片 F_1,F_2,F_3,F_4 使得:

(i) $F_1\cap N(B),F_2\cap N(B),F_3\cap N(B),F_4\cap N(B)$ 两两不交.

(ii) $|(F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_4)\cap B|$ 最小 .

断言 1 设 F 是 G 的一个断片.如果 $F\supseteq A$,则 $F=A$.

假设 $F\neq A$,由于 $|A|=q-1$ 且 $F\supseteq A$,则 $|F|\geqslant q$.取含于 $\bar{F}$ 中的一个端片 D,易见 $F\subseteq\bar{D}$,根据引理 3,有 4 个 $N(D)$ 断片 F_1',F_2',F_3',F_4',使得 $F_1'\cap N(D),F_2'\cap N(D),F_3'\cap N(D),F_4'\cap N(D)$ 两两不交.不妨令 $|F_1'\cap N(D)|\leqslant|F_2'\cap N(D)|\leqslant|F_3'\cap N(D)|\leqslant|F_4'\cap N(D)|$,$T_i'=N(F_i')$.根据引理 4 可得 $|F_i'\cap N(D)|\geqslant q(i=1,2,3,4)$,另外 $\sum_{i=1}^{4}|F_i'\cap N(D)|\leqslant|N(D)|=4q+r$,因此 $|F_1'\cap N(D)|\leqslant q$ 且非空.显然 $A\subseteq D$,$|D|\geqslant|B|\geqslant q+1$. (1) 若 $F_1'\cap D\neq\emptyset\neq\bar{F}_1'\cap D$.因为 D 是端片,所以 $F_1'\cap\bar{D}=\emptyset=\bar{F}_1'\cap\bar{D}$(否则由引理 1(2) 知,$F_1'\cap D$,$\bar{F}_1'\cap D$ 均是包含于端片 D 中的断片,与端片的定义相矛盾),进而由引理 1(3) 得到 $|T_1'\cap\bar{D}|<|F_1'\cap N(D)|$,于是 $q\leqslant|F|\leqslant|\bar{D}|=|T_1'\cap\bar{D}|<|F_1'\cap N(D)|\leqslant q$,矛盾. (2) 若 $F_1'\cap D\neq\emptyset=\bar{F}_1'\cap D$.同样地,$D$ 是端片,有 $F_1'\cap D=\emptyset$,由引理 1(3) 得到 $|T_1'\cap\bar{D}|<|F_1'\cap N(D)|\leqslant q$,从而 $|T_1'\cap\bar{D}|\leqslant q-1$.注意 $\bar{D}\geqslant q$,$\bar{F}_1'\cap\bar{D}=\emptyset$,有 $F_1'\cap\bar{D}\neq\emptyset$,再由引理 1(1) 知 $|\bar{F}_1'|=|\bar{F}_1'\cap N(D)|\leqslant|T_1'\cap\bar{D}|\leqslant q-1$,而此时 $A\subseteq\bar{D}$,得到 $\bar{F}_1'$ 是一不同于 A 的原子,这与题设相矛盾. (3) 若 $F_1'\cap D=\emptyset\neq\bar{F}_1'\cap D$.类似地讨论有 $|F_1'|=|F_1'\cap N(D)|\leqslant q$,但是 $A\subseteq D$,因而得到 F_1' 也是一不同于 A 的原子,矛盾. (4) 若 $F_1'\cap D=\emptyset=\bar{F}_1'\cap D$.因为 $|D|=|T_1'\cap D|\geqslant q+1$,且 $|F_1'\cap N(D)|\leqslant q$,则有 $F_1'\cap\bar{D}=\emptyset$(若 $F_1'\cap\bar{D}\neq\emptyset$,根据引理 1(1) 得到 $q\geqslant|F_1'\cap N(D)|\geqslant|T_1'\cap N(D)|=|D|\geqslant q+1$,不成立),于是 $|F_1'|=|F_1'\cap N(D)|\leqslant q$ 是不同于 A 的原子,矛盾.断言 1 成立.

断言 2 $A\subseteq N(B)$.

假设 $A\subseteq\bar{B}$,由断言 1,$\bar{B}=A$.由引理 3,类似断言 1 的证明,也能找个一个 $N(B)$ 端片 F_1',使得 $|F_1'\cap N(B)|\leqslant q$.令 T_1' 为相对于断片 F_1' 的最小点割.首先,可证明 $B\subseteq T_1'$.否则,若 $B\cap F_1'\neq\emptyset\neq B\cap F_1'$,则 $F_1'\cap\bar{B}=\emptyset=F_1'\cap\bar{B}$,于是 $T_1'\cap\bar{B}=\bar{B}=A$,由 $B\cap\bar{F}_1'\neq\emptyset$ 及引理 1(3) 得 $|B\cap T_1'|>|F_1'\cap N(B)|$,从而有 $|B|>|B\cap F_1'|+|B\cap T_1'|>|B\cap F_1'|+|F_1'\cap N(B)|=|F_1'|$.注意 F_1' 也是一断片,取含于 F_1' 中的端片 B',而此时 $A\nsubseteq F_1'$,于是 B' 与 A 不相交且 $|B'|<|B|$,这与 B 的取法矛盾.若 $B\cap F_1'\neq\emptyset=B\cap\bar{F}_1'$,则 $\bar{F}_1'\cap\bar{B}=\emptyset$,由此推出 $T_1'\cap\bar{B}=\bar{B}=A$,$q+1\leqslant|\bar{F}_1'|=|\bar{F}_1'\cap N(B)|<|T_1'\cap B|$,所以 $|B|>|F_1'|$,同理与 B 的取法相矛盾.若 $B\cap F_1'=\emptyset\neq B\cap\bar{F}_1'$,可得到 $F_1'\cap\bar{B}=\emptyset$,$|F_1'|=|F_1'\cap N(B)|\leqslant q$,矛盾.因此 $B\subseteq T_1'$. 其次,可证明 $\bar{B}=A\subseteq T_1'$,否则,注意引理 2 要求 A 全在 T_1' 中或者全在某个断片 F_1',$\bar{F}_1'$ 中,不妨设 $A\subseteq F_1'$,则 $A=\bar{B}=\bar{B}\cap F_1'$,$T_1'\cap\bar{B}=\emptyset$,根据引理 1(1) 得到 $|\bar{F}_1'\cap N(B)|\leqslant|T_1'\cap\bar{B}|$ 为空,但由引

理 4知此时 $\bar{F}_1'\cap N(B)$ 非空,从而矛盾,因此 $\bar{B} = A \subseteq T_1'$.于是 $F_1' = F_1'\cap N(B)$,F_1' 是一个与 A 不相交且基数小于等于 q 的断片,这与题设矛盾.断言 2得证.

对于 4个 $N(B)$ 端片 F_1,F_2,F_3,F_4,因为 $|F_i\cap N(B)|\geqslant q(i=1,2,3,4)$,且根据 $N(B)$ 断片的定义,由断言 2,可以取 $F_1 = A$.记 $F_i\cap N(B) = C_i$,其中 $i = 2,3,4$.进一步得到:

断言 3 $F_i\cap B = \varnothing$, $i = 2,3,4$.

若存在某个 $i\in\{2,3,4\}$,使得 $\bar{F}_i\cap B\neq\varnothing$,由于 B 是端片,则 $F_i\cap \bar{B} = \varnothing$,$|T_i\cap B| > |F_i\cap N(B)|$,因而 $|F_i| < |B|$,由 B 的取法知,$A\subseteq F_i$,再由断言 1可得,$F_i = A$,矛盾.断言 3成立.

断言 4 若 $F_i\cap B\neq\varnothing$, $i\in\{2,3,4\}$,则 $|F_i\cap B| = 1$,$|T_i\cap B| = q$,$F_i\cap N(B) = F_i = A$.

若 $F_i\cap B\neq\varnothing$,则 $\bar{F}_i\cap \bar{B} = \varnothing$,由断言 3有 $\bar{F}_i\cap B = \varnothing$,得到 $|\bar{F}_i| = |\bar{F}_i\cap N(B)| < |B|$,因而 $A = F_i$,由 $|B| = q+1$ 可得 $|T_i\cap B| = q$,$|F_i\cap B| = 1$.断言 4成立.

断言 5 至多有一个 $i\in\{2,3,4\}$,使得 $F_i\cap B\neq\varnothing$,且当 $F_i\cap B = \varnothing$ 时,$|C_i|\geqslant q+1$.

假设有 2个 i 满足条件,不妨设为 $F_2\cap B\neq\varnothing\neq F_3\cap B$,由断言 4知,$\bar{F}_2 = \bar{F}_3 = A$,于是 $F_2 = F_3$,从而 $F_2\cap N(B) = F_3\cap N(B)$,矛盾.若 $F_i\cap B = \varnothing$,假设 $|C_i|\leqslant q$,注意 $|T_i\cap B| = |B|\geqslant q+1$,则 $F_i\cap B = \varnothing$,因而 C_i 是一个不同于 A 的阶小于等于 q 的断片,与原假设矛盾.断言 5得证.

根据断言 5,对 $F_i(i = 2,3,4)$ 分两种情形考虑.

情形 1 有一个 F_i,使得 $F_i\cap B\neq\varnothing$.

不妨设 $F_4\cap B\neq\varnothing$,则 $F_2\cap B = \varnothing$,$F_3\cap B = \varnothing$.根据断言 4,有 $\bar{F}_4 = A\subseteq N(B)$,$|T_4\cap B| = q$,$|F_4\cap B| = 1$.令 $F_4\cap B = \{b\}$,记 $C_i = F_i\cap N(B)$,$i = 2,3,4$.由于 $N(B)\supseteq A\cup C_2\cup C_3\cup C_4$,所以 $C_2\cup C_3\subseteq T_4\cap N(B)$,因而 $C_2\cup C_3\subseteq N(A)$,由此得到 $A\subseteq T_2\cap N(B)$,$A\subseteq T_3\cap N(B)$,另外,很显然 $N(b)\cap A = \varnothing$.

断言 6 $C_3\subseteq \bar{F}_2$,$C_2\subseteq \bar{F}_3$.

假设 $C_3\not\subseteq \bar{F}_2$,则 $C_3\cap T_2\neq\varnothing$,取 $x\in C_3\cap T_2$,因而 $T_2\cap F_3\neq\varnothing$.易见 $A\subseteq T_2\cap T_3$.由于 $F_2\cap B = \varnothing = F_3\cap B$,由断言 3可知 $B\subseteq T_2\cap T_3$.(1)若 $F_2\cap F_3\neq\varnothing\neq\bar{F}_2\cap F_3$,则 $F_2\cap\bar{F}_3 = \varnothing = \bar{F}_2\cap\bar{F}_3$,否则 $F_2\cap F_3$ 或 $\bar{F}_2\cap F_3$ 是含于 F_3 且阶比 F_3 小的 $N(B)$ 断片,与 F_3 是 $N(B)$ 端片的取法矛盾.根据引理 1由 $F_2\cap F_3\neq\varnothing\neq\bar{F}_2\cap F_3$ 与 $F_2\cap\bar{F}_3 = \varnothing = \bar{F}_2\cap\bar{F}_3$ 可知 $|F_2\cap T_3|\geqslant|\bar{F}_3| + 1\geqslant q+2$,$|\bar{F}_2\cap T_3|\geqslant|\bar{F}_3| + 1\geqslant q+2$,因此 $|T_3|\geqslant|F_2\cap T_3| + |\bar{F}_2\cap T_3| + |B| + |A|\geqslant 4q+3$,矛盾.(2)若 $F_2\cap F_3\neq\varnothing = \bar{F}_2\cap F_3$,同理可得 $\bar{F}_2\cap\bar{F}_3 = \varnothing$,此时记 $F_4' = \bar{F}_2$,则 F_4' 也是 $N(B)$ 断片,F_1,F_2,F_3,F_4' 满足条件(i),且 $0 = |(F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_4')\cap B| < 1 = |\{b\}|\leqslant|(F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_4)\cap B|$,与 F_1,F_2,F_3,F_4 满足条件(ii)相矛盾.(3)若 $F_2\cap F_3 = \varnothing\neq\bar{F}_2\cap F_3$,则 $F_2\cap\bar{F}_3 = \varnothing$,$|F_2| = |F_2\cap T_3|\geqslant q+1$.如果 $\bar{F}_2\cap F_3$ 是一断片,则 $\bar{F}_2\cap F_3$ 是含于 F_3 且阶比 F_3 小的 $N(B)$ 断片,与 F_3 是 $N(B)$ 端片的取法矛盾.因此 $\bar{F}_2\cap F_3$ 不是一断片,故有 $|T_2\cap F_3|\geqslant|F_2\cap T_3| + 1\geqslant q+2$,而 $|T_2\cap T_3|\geqslant|B| + |A|\geqslant 2q$,所以 $|T_2\cap F_3|\leqslant(4q+r)-(q+2)-2q\leqslant q$,因而 $F_2\cap F_3 = \varnothing$,$F_3$ 是一个不同于 A 且基数不超过 q 的断片,矛盾.(4)若 $F_2\cap F_3 = \varnothing = \bar{F}_2\cap F_3$,记 $F_4' = \bar{F}_2$,则 F_4' 也是 $N(B)$ 断片,F_1,F_2,F_3,F_4' 满足条件(i),且 $0 = |(F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_4')\cap B| < 1 = |\{b\}|\leqslant|(F_1\cup F_2\cup F_3\cup F_4)\cap B|$,与 F_1,F_2,F_3,F_4 满足条件(ii)相矛盾.因此 $C_3\subseteq\bar{F}_2$.同理 $C_2\subseteq\bar{F}_3$.断言 6成立.

断言 7 设 T 是包含 b 的最小割集,则 $B\cup A\subseteq T$.

取相对于 T 的任一断片 F.先证明 $B\subseteq T$.若 $F\cap B\neq\varnothing\neq\bar{F}\cap B$,则 $F\cap\bar{B} = \varnothing = \bar{F}\cap\bar{B}$,得到 $|\bar{B}| = |\bar{B}\cap T| < |\bar{F}\cap N(B)| < |B\cap T|\leqslant q-1$,与断言 2中 $A\subseteq N(B)$ 矛盾.若 $F\cap B\neq\varnothing = \bar{F}\cap B$,则 $\bar{F}\cap\bar{B} = \varnothing$,于是 $|\bar{F}| = |\bar{F}\cap N(B)|\leqslant|B\cap T| - 1\leqslant q-1$,由此推出 $\bar{F} = A$,从而 $N(b)\cap A\neq\varnothing$,但由断言 4知 b 与 A 不相邻,矛盾.若 $F\cap B = \varnothing\neq\bar{F}\cap B$,同理得到矛盾.因此 $B\subseteq T$.再证明 $A\subseteq T$.若否,不失一般性,可以设 $A\subseteq F$.根据断言 1,有 $F = A$,得到 $N(b)\cap A\neq\varnothing$,产生矛盾.所以 $A\subseteq T$.断言 7成立.

断言 8 设 T 是包含 b 的最小点割,且 $T\cap C_2\neq\varnothing$,则 $C_2\subseteq T$.同样若 $T\cap C_3\neq\varnothing$,则 $C_3\subseteq T$.

只需证明前部分结论,后部分证法类似.假设命题结论不成立,不妨设 $x_2\in C_2\cap T$,$y_2\in C_2\cap F$.注意 $y_2\subseteq F\cap F_2$ 非空,则 $F\cap F_2$ 不是断片,否则令 $F\cap F_2 = F^*$,则 $T^* = N(F^*) = (T_2\cap F)\cup(T\cap T_2)\cup(F_2\cap T)$,而 $x_2\in F_2\cap T$,由断言 4与断言 7,可知 $B\subseteq T\cap T_2$,因而 $B\subseteq N(F^*)$,所以 F^* 是一包含于 F_2 中的阶比 F_2 小的 $N(B)$ 断片,与 F_2 是 $N(B)$ 端片相矛盾.因此 $F\cap F_2$ 不是断片,所以 $\bar{F}\cap\bar{F}_2 = \varnothing$.由断言 7知 $B\subseteq T$,注意 $B\cap F_2 = \varnothing = B\cap F_2$,所以 $B\subseteq T\cap T_2$,又由 b 与 A 不相邻,由断言 1知必有

$A\subseteq T\cap T_2$. 若此时 $F_2\cap\bar{F}\neq\emptyset$, 同理有 $\bar{F}_2\cap F=\emptyset$. 由断言 6知 $C_3\subseteq\bar{F}_2\cap T$. 由断言 5知 $|C_2|\geq q+1$, 由引理 1有 $|F\cap T_2|\geq|C_3|+1\geq q+2$, $|\bar{F}\cap T_2|\geq|C_3|+1\geq q+2$, 于是 $|T_2|=|T_2\cap F|+|T_2\cap T|+|T_2\cap\bar{F}|\geq|T_2\cap F|+|B|+|A|+|T_2\cap\bar{F}|\geq(q+2)+(q+1)+(q-1)+(q+2)=4q+4$, 矛盾. 所以有 $F_2\cap\bar{F}=\emptyset$. 记 $F_4'=\bar{F}$, 以 F_1,F_2,F_3,F_4' 代替 F_1,F_2,F_3,F_4, 类似前面的讨论, 与条件 (ii) 矛盾. 断言 8得证.

由于 $b\in B\subseteq T_2$, $F_2\cap N(B)=C_2$, 所以 $N(b)\cap C_2\neq\emptyset$. 取 $x_2\in N(b)\cap C_2$ 以及包含 $\{b,x_2\}$ 的最小点割 T, 由断言 7和断言 8知 $B\cup A\cup C_2\subseteq T$. 再由断言 8知此时有 $C_3\subseteq F$ 或 $C_3\subseteq T$ 或 $C_3\subseteq\bar{F}$. 不失一般性, 可设 $C_3\cap F=\emptyset$, 记 $F_4'=\bar{F}$, 以 F_1,F_2,F_3,F_4' 代替 F_1,F_2,F_3,F_4, 类似前面的讨论, 与前述 (ii) 矛盾. 因而情形 1不成立.

情形 2 $F_i\cap B=\emptyset$, 即有 $B\subseteq T_i$, $i=2,3,4$.

在这一情形下, 易见 $|C_i|\geq q+1$, 否则如果 $|C_i|\leq q$, 则有 $F_i\cap\bar{B}=\emptyset$, $F_i=C_i$ 是一阶小于等于 q 的断片, 而 $C_i\cap A=\emptyset$ 与题设矛盾. 因而, 由题设 $r\leq 2$, 得到 $r=2$, $|C_i|=q+1$.

断言 9 $A\subseteq T_i$, $i=2,3,4$.

若否, 可以设 $A\subseteq\bar{F}_2$. 由断言 1, $A=\bar{F}_2$, 因而 $\bar{F}_2\cap\bar{B}=\emptyset$. 如果 $F_2\cap\bar{B}\neq\emptyset$, 因为 $|F_2\cap N(B)|=|T_2\cap B|=|B|=q+1$, $|F_2\cap N(B)|+|T_2\cap N(B)|+|T_2\cap\bar{B}|=|T_2\cap B|+|T_2\cap N(B)|+|T_2\cap\bar{B}|=|T_2|$, 所以 $F_2\cap\bar{B}$ 是一断片, 令 $F_2\cap\bar{B}=F^*$, 则 $A\subseteq\bar{F}^*$, 由断言 1知, $A=\bar{F}^*$, 但此时 $B\subseteq\bar{F}^*$ 矛盾. 于是 $F_2\cap\bar{B}=\emptyset$, $|F_2|=|C_2|=q+1$. 由题设 B 的取法, 可以用 F_2 代替 B, 由断言 2知 $A\subseteq N(B)$. 同样地, 有 $A\subseteq T_2$, 但此时 $A=\bar{F}_2$, 矛盾. 断言 9成立.

断言 10 $C_3\subseteq T_2$ 或 $C_3\subseteq\bar{F}_2$.

由于 $C_2\cap C_3=\emptyset$, 显然, $C_3\subseteq T_2\cup\bar{F}_2$. 若断言不成立, 可设 $x_3\in C_3\cap T_2$, $y_3\in C_3\cap\bar{F}_2$. 则 $y_3\subseteq F_3\cap\bar{F}_2\neq\emptyset$. 注意 F_3 是 $N(B)$ 端片, 类似情形 1下断言 8的证明, 可以推出 $\bar{F}_2\cap F_3$ 不是断片, 因而 $F_2\cap\bar{F}_3=\emptyset$. 此时若 $F_2\cap F_3\neq\emptyset$, 同理 $F_2\cap F_3$ 不是断片, 有 $F_2\cap F_3=\emptyset$, $|F_3|=|F_3\cap T_2|\geq q+1$. 因为 $F_2\cap F_3$, $\bar{F}_2\cap F_3$ 均不是断片, 所以 $|F_2\cap T_3|\geq|T_2\cap\bar{F}_3|+1\geq q+2$, $|\bar{F}_2\cap T_3|\geq|T_2\cap\bar{F}_3|+1\geq q+2$, 注意到 $|T_2\cap T_3|\geq|A|+|B|\geq 2q$, 可以推出 $|T_3|=|F_2\cap T_3|+|T_2\cap T_3|+|\bar{F}_2\cap T_3|\geq 4q+4$, 矛盾. 因此 $F_2\cap F_3=\emptyset$, $|F_2|=|F_2\cap T_3|\geq q+1$, 又因为 $\bar{F}_2\cap F_3$ 不能是断片, 所以 $|T_2\cap F_3|\geq|F_2\cap T_3|+1\geq q+2$. 另外, 不难证明 $|T_2\cap\bar{F}_3|\geq q+1$, 不然则由 $|\bar{F}_3|\geq q+1$, 得到 $|\bar{F}_2\cap\bar{F}_3|\neq\emptyset$, 从而 $q\geq|T_2\cap F_3|\geq|F_2\cap T_3|\geq q+1$, 矛盾. 于是 $|T_2|=|T_2\cap F_3|+|T_2\cap T_3|+|T_2\cap\bar{F}_3|\geq 4q+3$ 与 $\kappa\leq 4q+2$, 矛盾. 断言 10成立.

断言 11 若 $C_3\subseteq\bar{F}_2$, 则 $C_2\subseteq\bar{F}_3$.

若否, 设 $C_3\subseteq\bar{F}_2$, $C_2\subseteq T_3$, 即有 $C_2\subseteq F_2\cap T_3\neq\emptyset$, $C_3\subseteq\bar{F}_2\cap F_3\neq\emptyset$. 这时 $\bar{F}_2\cap F_3$ 不是断片, 否则 $\bar{F}_2\cap F_3$ 是 $N(B)$ 断片, 而 $\bar{F}_2\cap F_3$ 又是 F_3 的真子集, 与 F_3 是 $N(B)$ 端片矛盾. 由此可推出 $F_2\cap\bar{F}_3=\emptyset$. 此时若 $\bar{F}_2\cap\bar{F}_3\neq\emptyset$, 同理可推出 $F_2\cap F_3=\emptyset$, 所以 $|F_2|=|F_2\cap T_3|\geq q+1$, 于是 $|T_2\cap\bar{F}_3|\geq|F_2\cap T_3|+1\geq q+2$, 注意 $|T_2\cap T_3|\geq|A|+|B|\geq 2q$, 故 $|T_2\cap F_3|\leq q$, 因而 $\bar{F}_2\cap F_3=\emptyset$, 矛盾. 因此, $\bar{F}_2\cap\bar{F}_3=\emptyset$, $|F_3|=|T_2\cap F_3|\geq q+1$, 由此推得 $|F_2\cap T_3|\geq|T_2\cap\bar{F}_3|+1\geq q+2$, $|F_2\cap T_3|\leq q$, 于是 $F_2\cap F_3=\emptyset$, F_2 是一个与 A 不相交且基数小于等于 q 的断片, 矛盾. 断言 11成立.

断言 12 $F_i\cap F_j=\emptyset$, $2\leq i,j\leq 4$, $i\neq j$.

假设 $F_i\cap F_j\neq\emptyset$, 首先有 $\bar{F}_i\cap\bar{F}_j=\emptyset$, 否则, 因为 $A,B\subseteq T_i\cap T_j$, 则 $F_i\cap F_j$ 是 $N(B)$ 断片. 又因为 F_i,F_j 均是 $N(B)$ 端片, 得到 $F_i\cap F_j=F_i=F_j$, 矛盾. 若 $F_i\cap\bar{F}_j\neq\emptyset$, 则 $\bar{F}_i\cap F_j=\emptyset$, 否则 $\bar{F}_i\cap F_j$ 是含于 F_j 且基数比 F_j 小的 $N(B)$ 断片, 与 F_j 是 $N(B)$ 端片矛盾. 于是 $|\bar{F}_i|=|\bar{F}_i\cap T_j|\geq q+1$. 同理可知 $F_i\cap F_j$ 不是断片, 得到 $|T_i\cap F_j|\geq|F_i|+1\geq q+2$, $|T_i\cap\bar{F}_j|\leq q$, 从而 $q+1\leq|\bar{F}_i\cap T_j|\leq|T_i\cap\bar{F}_j|\leq q$, 矛盾. 于是 $F_i\cap\bar{F}_j=\emptyset$, 类似可导出矛盾. 断言 12成立.

断言 13 $B\subseteq N(A)$.

假设命题结论不成立. 由于 B 是基数为 $q+1$ 的端片, $|A|=q-1$, 所以 $|N(A)\cap B|=q$, $|\bar{A}\cap B|=1$. 设 $\bar{A}\cap B=\{b\}$, 注意 $\{b\}$ 不是原子, 因而 $N(b)=(B-\{b\})\cup(N(B)-A))$.

(1) 取 G 中包含 b 的最小点割 T, 则有 $B\cup A\subseteq T$.

设 F 是 T 断片, 先证明 $B\subseteq T$. 否则, 可设 $B\cap F\neq\emptyset$, 则 $\bar{F}\cap B=\emptyset$. 此时若 $F\cap\bar{B}\neq\emptyset$, 那么 $\bar{F}\cap\bar{B}=\emptyset$, 因而 $q+1=|B|\geq|T\cap B|+2\geq(|F\cap N(B)|+1)+2\geq|T\cap\bar{B}|+3=|\bar{B}|+3\geq(q+1)+3$, 矛盾. 所以 $\bar{F}\cap\bar{B}=\emptyset$, $|\bar{F}|=|\bar{F}\cap N(B)|<|T\cap B|\leq|B|-1=q$, 从而 $|\bar{F}|=q-1$, 故有 $\bar{F}=A$, b 与 A 相邻, 矛盾. 因此 $B\subseteq T$. 如果 $A\not\subseteq T$, 可设 $A\subseteq F$, 由断言 1知 $F=A$, 因而 b 与 A 相邻, 矛盾. 所以 $A\subseteq T$.

(2) 若 T 是包含 $B\cup A$ 的最小点割且 $T\cap C_i\neq\emptyset$,则 $C_i\subseteq T$,其中 $i\in\{2,3,4\}$.

设 F 是 T 断片,$x_i\in T\cap C_i$.若(2)不成立,可以设 $y_i\subseteq F\cap C_i$,则 $F_i\cap F\neq\emptyset\neq F_i\cap T$.因为 $A,B\subseteq T\cap T_i$ 及 F_i 是 $N(B)$ 端片,易见 $F_i\cap F$,$F_i\cap\bar{F}$ 均不能是断片,因此有 $\bar{F}_i\cap\bar{F}=\emptyset$.如果 $F_i\cap\bar{F}\neq\emptyset$,那么 $\bar{F}_i\cap F=\emptyset$,$|\bar{F}_i|=|\bar{F}_i\cap T|\geqslant q+1$,得到 $|T_i|=|T_i\cap F|+|T_i\cap T|+|T_i\cap\bar{F}|\geqslant(q+2)+2q+(q+2)=4q+4$,矛盾.所以 $F_i\cap\bar{F}=\emptyset$,同样,可以推出 $|T|\geqslant 4q+3$,矛盾.

对于 $i\in\{2,3,4\}$,取 $x_i\in N(b)\cap C_i$,又取包含 $\{b,x_i\}$ 的最小点割 T,根据(1)和(2)有 $A\cup B\cup C_i\subseteq T$.取最小点割 T_0,使 T_0 包含 $A\cup B$,$T_0\cap(C_2\cup C_3\cup C_4)\neq\emptyset$ 且 $|F_0|$ 最小,其中 F_0 是 T_0 断片.此时 C_2,C_3,C_4 中只可能有一个属于 T_0,否则,若 $C_2\cup C_3\subseteq T_0$,注意 $|F_0\cap N(B)|\geqslant q+1$,$|\bar{F}\cap N(B)|\geqslant q+1$,则有 $|N(B)|\geqslant|A\cup B\cup C_2\cap C_3|+2(q+1)>\kappa$,矛盾.因而可设 $C_3\subseteq T_0$,$C_2\subseteq F_0$,则 $C_4\subseteq\bar{F}_0$.

(3) $F_0=C_2$,$C_3\subseteq N(C_2)$.

取 $x_2\in N(b)\cap C_2$,又取最小点割 $T\supseteq\{b,x_2\}$,令 F 是一 T 断片,则有 $B\cup A\cup C_2\subseteq T$,同理此时可设 $C_3\subseteq F$,$C_4\subseteq\bar{F}$,即有 $C_2\subseteq F_0\cap T\neq\emptyset$,$C_4\subseteq\bar{F}_0\cap\bar{F}\neq\emptyset$,$C_3\subseteq T_0\cap F\neq\emptyset$,由 $|F_0|$ 最小性的取法,可知 $F_0\cap F=\emptyset$.若此时 $F_0\cap\bar{F}\neq\emptyset$,同理 $\bar{F}_0\cap F=\emptyset$,故有 $|F|=|F\cap T_0|\geqslant q+1$,因为 $F_0\cap F$ 不能是断片,所以 $|F_0\cap T|\geqslant|T_0\cap F|+1\geqslant q+2$,又因为 $\bar{F}_0\cap\bar{F}\neq\emptyset$,所以 $|\bar{F}_0\cap T|\geqslant|T_0\cap F|\geqslant q+1$,而 $A,B\subseteq T_0\cap T$,得到 $|T_0\cap T|\geqslant 2q$,相加得到 $|T|\geqslant 4q+3>\kappa$,矛盾.因而 $F_0\cap\bar{F}=\emptyset$.若 $|F_0|=|F_0\cap T|\geqslant q+2$,则 $|T_0\cap\bar{F}|\geqslant q+2$,$|T_0\cap F|\geqslant q+1$,由此推出 $|T_0|\geqslant 4q+3>\kappa$,矛盾.故 $|F_0|=q+1$,所以 $F_0=C_2$,$C_3\subseteq N(C_2)$.

取 $x_4\in N(b)\cap C_4$,又取最小点割 $T^*\supseteq\{b,x_4\}$,F^* 是 T^* 断片,则 $A\cup B\cup C_4\subseteq T^*$.不失一般性,可设 $C_2\subseteq F^*$.由于 $C_3\subseteq N(C_2)$,所以 $C_3\subseteq(F^*\cup T^*)$,类似地可推出 $|N(B)|>\kappa$,矛盾.

综上所述,$B\subseteq N(A)$.根据题设中 B 的取法,即有以下结论:若 B 是 G 中不同于 A 的断片,且有 $|B|=q+1$,那么 $B\subseteq N(A)$.断言13成立.

断言 **14** $|N(A)\cap F_i|\geqslant q$,$i=2,3,4$.

若 $|N(A)\cap F_i|\leqslant q-1$,因为 $A\subseteq T_i$ 及 $|F_i|\geqslant q+1$,所以 $F_i\cap\bar{A}\neq\emptyset$,$|N(A)\cap F_i|=q-1$.记 $F=F_i\cap\bar{A}$,则 F 是断片,$A\subseteq\bar{F}$,根据断言1,$A=\bar{F}$,但此时 $\bar{F}_i\cap A\subseteq\bar{F}$ 非空,矛盾.断言14成立.

因为 $B\subseteq N(A)$ 及 $|N(A)\cap F_i|\geqslant q$,$\{i=2,3,4\}$,由断言12知,$N(A)\cap F_2$,$N(A)\cap F_3$,$N(A)\cap F_4$ 两两不相交,注意 $B\subseteq T_2\cap T_3\cap T_4$ 及 $B\subseteq N(A)$,所以 $3q\leqslant|N(A)\cap F_2|+|N(A)\cap F_3|+|N(A)\cap F_4|\leqslant|N(A)|-|B|\leqslant 3q+1$,这样必有一个 $|N(A)\cap F_i|=q$,不妨设 $|N(A)\cap F_2|=q$,则 $F_2\cap\bar{A}\neq\emptyset$.这时有 $F_2\cap\bar{B}\neq\emptyset$,否则 $F_2=F_2\cap N(B)=C_2$,于是 $|F_2|=|B|=q+1$,F_2 是一阶为 $q+1$ 的端片,根据 B 的取法,以 F_2 代替 B 进行讨论,由断言13知 $F_2\subseteq N(A)$,从而与 $|N(A)\cap F_2|=q$ 矛盾.由 $F_2\cap\bar{B}\neq\emptyset$ 知 $F_2\cap\bar{B}$ 是一断片.在 $F_2\cap\bar{B}$ 中取一端片 D.显然 $|D|\geqslant q+1$.如果 $|D|=q+1$,以 D 代替 B 进行讨论,知 $A\subseteq N(D)$,$D\subseteq N(A)$.但另一方面,$|N(A)\cap D|\leqslant|N(A)\cap F_2|=q$,矛盾.所以 $|D|\geqslant q+2$.还可以得到:

(1) $A\subseteq N(D)$.

显然 $A\cap D=\emptyset$.如果 $A\nsubseteq N(D)$,则 $A\subseteq\bar{D}$,由断言1知 $A=\bar{D}$,$|A|=|\bar{D}|\geqslant|B|+|\bar{F}_2|\geqslant 2q+2$,矛盾.

取4个 $N(D)$ 端片 F_1',F_2',F_3',F_4',使得 $F_1'\cap N(D)$,$F_2'\cap N(D)$,$F_3'\cap N(D)$,$F_4'\cap N(D)$ 两两不交,由于 $A\subseteq N(D)$,可以令 $A=F_1'$,并使得 $|F_2'\cap N(D)|\leqslant|F_3'\cap N(D)|\leqslant|F_4'\cap N(D)|$,由此推得 $|F_2'\cap N(D)|\leqslant q+1$.

(2) $|F_2'\cap N(D)|=q+1$.

若否,$|F_2'\cap N(D)|\leqslant q$.若 $D\subseteq T_2'$,则 $F_2'\cap\bar{D}=\emptyset$,于是 $|F_2'|=|F_2'\cap N(D)|\leqslant q$,与 $A\cap F_2'=\emptyset$ 矛盾.所以有 $F_2'\cap D\neq\emptyset$ 或 $\bar{F}_2'\cap D\neq\emptyset$.如果 $F_2'\cap D\neq\emptyset$,因为 D 是端片,则有 $\bar{F}_2'\cap\bar{D}=\emptyset$,$|T_2'\cap\bar{D}|\leqslant|F_2'\cap N(D)|-1\leqslant q-1$,又因为 $|\bar{D}|\geqslant q+1$,可以推出 $F_2'\cap\bar{D}\neq\emptyset$,同理有 $F_2'\cap D=\emptyset$,于是 $|\bar{F}_2'|=|\bar{F}_2'\cap N(D)|\leqslant|T_2'\cap\bar{D}|\leqslant q-1$,故 $\bar{F}_2'=A$,进一步得到 $|N(A)\cap\bar{D}|=|T_2'\cap\bar{D}|\leqslant q-1$,但是,由 D 的取法知 $B\subseteq\bar{D}$,而由断言13,有 $B\subseteq N(A)$,因而 $q+1=|B|\leqslant|N(A)\cap\bar{D}|\leqslant|T_2'\cap\bar{D}|\leqslant q-1$,矛盾.所以 $F_2'\cap D=\emptyset\neq\bar{F}_2'\cap D$,同理有 $F_2'\cap\bar{D}=\emptyset$,$|F_2'\cap N(D)|=|F_2'|\leqslant q$,矛盾.所以 $|F_2'\cap N(D)|=q+1$.由 $|F_2'\cap N(D)|=q+1$ 可推出 $|F_3'\cap N(D)|\leqslant q+1$,由(2)类似有 $|F_3'\cap N(D)|=q+1$.同理可得 $|F_4'\cap N(D)|=q+1$.

(3) $F_2'\cap D=\emptyset$.

若否,有 $\bar{F}_2'\cap\bar{D}=\emptyset$,$|T_2'\cap\bar{D}|\leqslant|F_2'\cap N(D)|-1\leqslant q$,又因为 $|\bar{D}|\geqslant q+1$,所以 $F_2'\cap\bar{D}\neq\emptyset$,因而 $\bar{F}_2'\cap D=\emptyset$,$|\bar{F}_2'\cap N(D)|\leqslant|T_2'\cap\bar{D}|\leqslant q$,由此可以推得 $A=\bar{F}_2'$,于是 $q+1=|B|\leqslant$

$|N(A) \cap \bar{D}| = |T_2' \cap \bar{D}| \leqslant q$,矛盾.

(4) $F_2' \cap D = \varnothing$.

若否,若 $F_2' \cap \bar{D} \neq \varnothing$,则 $F_2' \cap D = \varnothing$,由(3)有 $F_2' \cap D = \varnothing$,于是 $q+1 = |N(D) \cap F_2'| \geqslant |T_2' \cap D| = |D| \geqslant q+2$,矛盾.

由(4)知 $|F_2'| = |F_2' \cap N(D)| = q+1$,即 F_2' 是不同于 A 的阶为 $q+1$ 的断片,根据断言13可知,$F_2' = N(D) \cap F_2' \subseteq N(A)$.类似地有 $F_3' = N(D) \cap F_3' \subseteq N(A)$,$F_4' = N(D) \cap F_4' \subseteq N(A)$.注意此时,$F_2'$,$F_3'$,$F_4'$ 两两不交,且 $F_2' \cup F_3' \cup F_4' \subseteq N(D)$,由 $B \subseteq \bar{D}$,所以 $|N(A)| \geqslant |B \cup F_2' \cup F_3' \cup F_4'| = 4q+4$,矛盾.综上所述,情形2不成立.

由断言1~14,可知定理1成立.

参考文献:

[1] Egawa Y. Contractible edges in n-connected graphs with minimum degree greater than or equal to $[\frac{5n}{4}]$[J]. Graphs and Combinatorics, 1991, 7: 15-21.

[2] Su Jianji. On some properties of contraction-critical graphs [M]//Yousef Alavi, Don R Lick, Jiuqiang Liu eds. Combinatorics Graph Theory Algorithms and application. Singapore: World Scientific, 1993: 329-337.

[3] Kriesell M. Closed separator sets[J]. Combinatorica, 2005, 25(5): 575-598.

[4] Yuan Xudong, Li Tingting, Su Jianji. The vertices of lower degree in contraction-critical k-connected graphs[J/OL]. 中国科技论文在线, http://www.paper.edu.cn/ 2005-04-29.

[5] Bondy J A, Murty USR. Graph theory with applications[M]. New York: McMillan, 1976.

[6] Mader W. Eine eigenschaft der atome endlicher graphs [J]. Arch Math, 1971, 22: 333-336.

(责任编辑:尹 闯)

科学家提出期刊评价新标准

美国科学家最近提出一套新的期刊评价标准框架,他们认为新标准能比影响因子更加准确地评价学术期刊质量和影响力。

20世纪60年代由美国科学信息研究所(现在的汤姆森科技信息集团)提出的"影响因子"概念,已经成为学术界权威的期刊评价系统。它的主要依据就是期刊论文引用率的算术平均值(将某一期刊两年内发表的所有论文引用率相加,再除以总的可引用论文数)。该评价方法存在两大主要缺陷。首先,只有当被研究对象是正态分布(贝尔曲线)时,平均数才有充分的意义,论引用率很高的论文会显著影响到这一平均数字,在宽泛的引用范围,平均值会是个很差的衡量尺度;其次,第二大缺陷是不同领域研究论文的引用度往往不同,比如医学和物理学方面的论文常常在发表后不久就得到引用,而经济学和数学方面的成果甚至需要几年几十年来积累引用率,即使是同一领域内的不同期刊也同样存在这种情况。为此科学家们提出了新标准对此进行改进。

新的期刊评价标准是美国西北大学化学与生物工程学的教授及其同事提出的。新的期刊评价标准使用数学模型来刻画某一期刊论文引用数的特征值,即是用每篇论文引用率的对数作为基础数据来反映期刊的影响力。特定期刊中各篇论文引用率的对数能够较好地形成正态分布。随着时间的推移,一篇论文被引用的可能性会下降,它的对数也会趋于稳定。因此就可以利用新开发的数学模型来预测不同期刊论文获得引用"特征值"(即上述的对数)的速度。新标准是让"宽带"的引用次数范围变成"窄带"的,通过更加接近的方法减弱少数高引用率论文的干扰。在这一点上,新标准要优于影响因子。

(据科学网)