DOI: 10.13656/j.cnki.gxkx.2008.02.003
广西科学 Guangxi Sciences 2008, 15(2): 105~ 108, 112

一类 $3p^n$ 阶亚循环群的 4度 Cayley图*

Tetravalent Cayley Graphs on a Kind of Metacyclic Groups with Order $3p^n$

徐尚进,郭松涛,李德雪
XU Shang-jin, GUO Song-tao, LI De-xue

(广西大学数学与信息科学学院,广西南宁 530004)
(School of Mathematics and Information Sciences, Guangxi University, Nanning, Guangxi, 530004, China)

摘要:采用群与图的方法,研究一类 $3p^n$ 阶亚循环群的连通 4度无向 Cayley图.通过决定 Caley图的自同构群得出此类亚循环群是弱 4-CI的,并由此给出 $3p^n$ 亚循环群的连通 4度无向 Cayley图的完全分类,最后证明此类图都正规而且非弧传递.

关键词:有限群 正规 Cayley图 弱 CI性
中图法分类号:O157 文献标识码:A 文章编号:1005-9164(2008)02-0105-04

Abstract A kind of metacyclic groups with order $3p^n$ was researched by using the group-theoretic and graphic methods. Though determining the full automorphism groups of these Cayley graphs, we have that the group is a weak 4-CI group and then determine the complete classification of its connected tetravalent Cayley graphs. Finally, we prove that all these Cayley graphs are normal but no arc-transitive.

Key words finite group, normal Cayley graph, weak CI-property

40多年来人们开始对 Cayley图的同构问题(主要是 CI性)进行研究,现已获得丰富的结果[1~4].比如,文献[5~7]研究了小度数情形,文献[7~11]研究了连通情形.关于 Cayley图正规性问题,自北大徐明曜[1]给出一个等价条件之后,近十多年来一直是群与图方向研究的热点.比如:阶为 2个不同奇素数乘积群的任意度数的 Cayley图正规性问题已完全解决[12]; Baik[13,14]等决定了有限交换群的所有度数不超过 5的非正规的 Cayley图;方新贵,李才恒,徐尚进[15~17]等证明绝大多数非交换单群的连通 3度 Cayley图是正规的.然而围绕 Cayley图 CI性和正规性问题的研究远没有结束.

本文主要采用群与图的方法,研究具有循环 Sylow-子群的 $3p^n$ 阶非交换群的连通 4度无向 Cayley图,其中 $p>3$是素数且 $n\geqslant 2$.由群论知识,这样的群必为亚循环群,其构造如下:

$$G=\langle a,b \mid a^3=b^{p^n}=1, a^{-1}ba=b^r\rangle, \text{其中}, 1<r<p^n, r^3\equiv 1(\bmod p^n). \quad (0.1)$$

若无特殊说明,本文所指的 $3p^n$ 阶亚循环群 G均形如(0.1)式.未定义而引用的概念和记号参见文献[18~20].本文涉及的图都是有限、连通、简单、无向图.

1 相关概念及引理

1.1 相关概念

对于一个图 X,其顶点集和边集分别记作 $V(X)$ 和 $E(X)$. $V(X)$到自身并保持边不变的双射(即置换)全体关于映射的乘法构成一个群,称为图 X的全自同构群,记作 $\mathrm{Aut}(X)$.如果 $\mathrm{Aut}(X)$作用在 $V(X)$,(或 $E(X)$)上传递,则称 X是点(或边)传递图.图 X的每条无向边可产生一对方向相反的有向边,称为 X的弧. X的弧集记作 $\mathrm{Arc}(X)$.显然 $\mathrm{Aut}(X)$可诱导弧集 $\mathrm{Arc}(X)$上的置换作用,如果这个作用是传递的,则称 X是弧传递图.

收稿日期:2008-01-28
作者简介:徐尚进(1959-),男,博士,教授,主要从事群与图的研究工作。
* 广西自然科学基金项目(0542044),广西研究生教育创新计划项目(2007105930701M33)资助。

图 X 的一个顶点 v 的邻域 $X_1(v)$ 是 X 中与顶点 v 相连接的顶点的集合.显然图 X 的全自同构群 $A := \mathrm{Aut}(X)$.关于顶点 v 的稳定子群 A_v 可置换地作用在 $X_1(v)$ 上(不一定忠实).容易证明,X 弧传递当且仅当 X 点传递并且 A_v 在 $X_1(v)$ 上传递.直观地看,弧传递图具有很强的对称性,点传递图次之.于是由图得到的全自同构群在图的对称性研究中扮演着重要的角色.反之,通过群也容易构造出具有一定对称性的图.

设 G 是一个有限群,取 $S\subseteq G\backslash\{1\}$,满足 $S^{-1}=S$(这样的 S 称为 G 的 Cayley 子集),则群 G 关于其 Cayley 子集 S 的 Cayley 图 $X := \mathrm{Cay}(G,S)$ 定义为:

$$\begin{cases} V(X)=G, \\ E(X)=\{(g,sg)\mid g\in G,s\in S\}. \end{cases}$$

由定义易知:(1) G 的单位元 1 的邻域 $X_1(1)=S$;(2) X 连通当且仅当 $G=\langle S\rangle$;(3) 由于 G 的右正则表示 $R(G)\leqslant \mathrm{Aut}(X)$,所以 Cayley 图都是点传递图.

记群 G 的自同构群为 $\mathrm{Aut}(G)$.G 的一个 Cayley 子集 S 如果满足:对使得 $\mathrm{Cay}(G,T)\cong \mathrm{Cay}(G,S)$ 的任何 G 的 Cayley 子集 T 都存在 $\tau\in \mathrm{Aut}(G)$ 使得 $S^{\tau}=T$,则称 S 为 G 的 CI-子集.设 m 是正整数,一个有限群 G 如果它的每个势不超过 m 的 Cayley 生成子集都是 CI-子集,则称 G 为弱 m-CI-群.如果对每个正整数 $m<|G|$,G 都是弱 m-CI-群,则称 G 为弱 CI-群.这时 G 的连通 Cayley 图之间的同构问题可转化为 G 的 Cayley 生成子集在 $\mathrm{Aut}(G)$ 作用下的传递问题,这完全是一个群论问题.

又记 $\mathrm{Aut}(G,S) := \{\tau\in \mathrm{Aut}(G)\mid S^{\tau}=S\}$.易证 $R(G)\mathrm{Aut}(G,S)=R(G)\rtimes \mathrm{Aut}(G,S)\leqslant \mathrm{Aut}(X)$,并且 $R(G)\rtimes \mathrm{Aut}(G,S)=\mathrm{Aut}(X)$ 等价于 $R(G)\trianglelefteq \mathrm{Aut}(X)$[1].此时称 Cayley 图 $X := \mathrm{Cay}(G,S)$ 关于 G 是正规的.这说明正规的 Cayley 图 $X := \mathrm{Cay}(G,S)$ 的全自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 完全被群 G 及其子集 S 所决定,并达到最小的情形 $\mathrm{Aut}(G,S)R(G)$.

设 $V(X)$ 的子集 B 是图自同构群 $\mathrm{Aut}(X)$ 的一个非平凡块,即 $1<|B|<|V(X)|$,并对任意 $\sigma\in \mathrm{Aut}(X)$,$B\cap B^{\sigma}$ 等于 B 或 $\varnothing$.此时 $\mathscr{B}=\{B^{\sigma}\mid \sigma\in \mathrm{Aut}(X)\}$ 构成 $\mathrm{Aut}(X)$ 的一个完全块系,并可定义 X 的关于 $\mathscr{B}$ 的块图,记作 $X/\mathscr{B}$,其中

$$\begin{cases} V(X/\mathscr{B})=\mathscr{B}, \\ E(X/\mathscr{B})=\{\{B,B'\}\mid \text{存在 } v\in B,v'\in B' \\ \qquad \text{使得 } \{v,v'\}\in E(X)\}. \end{cases}$$

显然若 X 连通则块图 $X/\mathscr{B}$ 亦然.由于 X 的图自同构 σ 可诱导 $X/\mathscr{B}$ 上的作用,并且保持 $X/\mathscr{B}$ 的边,所以 X 点传递(或弧传递),则块图 $X/\mathscr{B}$ 也点传递(或弧传递).

块图的一个非常有效的应用是 $\mathrm{Aut}(X)$ 非拟本原,即 $\mathrm{Aut}(X)$ 包含非传递且非平凡正规子群 N,此时 N 的轨道即为非平凡块,从而得到以所有 N-轨道为顶点的块图,通常记作 X_N.容易证明 $\mathrm{Val}(X_N)\leqslant \mathrm{Val}(X)$[18].

1.2 相关引理

引理 1.1[18] 有限群的次正规 Hall 子群必然正规.

引理 1.2[21] (Babai) 设 G 是有限群,$S\subseteq G^{\#}$,$X := \mathrm{Cay}(G,S)$,$A := \mathrm{Aut}(X)$,则 S 是 G 的 CI-子集 $\Leftrightarrow \forall\, \sigma\in \mathrm{Sym}(G)$,若 $\sigma^{-1}R(G)\sigma\leqslant A$,必存在 $a\in A$,使得 $\sigma^{-1}R(G)\sigma=a^{-1}R(G)a$.

引理 1.3 设 Cayley 图 $X := \mathrm{Cay}(G,S)$ 的图自同构群 $A := \mathrm{Aut}(X)$ 作用在 $V(X)$ 上非拟本原,即存在 A 的非平凡且非传递正规子群 N,则包含 1 的 N-轨道 $B := 1^N$ 是 G 的子群,并且块图 X_N 是 G 关于其子群 B 和双陪集的并 $D := BSB$ 的陪集图 $\mathrm{Sab}(G,B,D)$.特别,任取 $s\in S\backslash B$,则 $\{B,Bs\}\in E(X_N)$.

引理 1.4 设 $X := \mathrm{Cay}(G,S)$ 是有限群 G 的度数不超过 4 的连通 Cayley 图,则 X 的全自同构群 $A := \mathrm{Aut}(X)$ 关于 G 的单位元 1 的点稳定子群 A_1 的阶不含大于 3 的素因子,即 $|A_1|=2^i3^j$.

引理 1.5 设 G 是含 3 个素因子的有限非交换单群,则 G 及其阶只有如下 8 种情况:

(1) A_5 阶为 $2^2\cdot 3\cdot 5$;

(2) A_6 阶为 $2^3\cdot 3^2\cdot 5$;

(3) $\mathrm{PSL}(2,7)$ 阶为 $2^3\cdot 3\cdot 7$;

(4) $\mathrm{PSL}(2,8)$ 阶为 $2^3\cdot 3^2\cdot 7$;

(5) $\mathrm{PSL}(2,17)$ 阶为 $2^5\cdot 3^2\cdot 17$;

(6) $\mathrm{PSL}(3,3)$ 阶为 $2^4\cdot 3^3\cdot 13$;

(7) $\mathrm{PSU}(3,3)$ 阶为 $2^5\cdot 3^3\cdot 7$;

(8) $\mathrm{PSU}(4,2)$ 阶为 $2^6\cdot 3^4\cdot 5$.

证明参见文献[22].

引理 1.6 群 G 的生成元满足:

(1) $a^ib^j=b^{jr^{2i}}a^i$,$b^ja^i=a^ib^{jr^i}$;

(2) $o(a^ib^j)=3$,

其中 $0<i<3$,$0\leqslant j<p^n$.

引理 1.7 群 G 的自同构 τ 形如:

$$\tau:\begin{cases} a\mapsto ab^i, \\ b\mapsto b^j, \end{cases}$$

其中 $0\leqslant i<p^n$,$(j,p^n)=1$.

引理 1.8 设 $X := \mathrm{Cay}(G,S)$ 是群 G 的连通 4 度无向 Cayley 图,$S=\{s,s^{-1},t,t^{-1}\}$,则

(1) s 与 t 至少有一个是 3阶元,而另一个元的阶只能是 3或 p^n;

(2) 若 $o(s)=3$,则过边 $\{1,s\}$ 恰有一个 3-圈 $[1,s,s^{-1},1]$;

(3) 若 $o(s)\neq 3$, 则过边 $\{1,s\}$ 没有 3-圈.

证明　由 (0.1) 式可得 (1) 成立.设过边 $\{1,s\}$ 有 3-圈 $[1,s,s's,s''s's=1]$, 其中 $s',s''\in S$. 因为 $1=s''s's=s'ss''$, 所以 s,s',s'' 中任 2个元不能互逆. 又由 $S=\{s,s^{-1},t,t^{-1}\}$,则 s,s',s'' 中至少有 2个相同, 而第 3个是前 2个乘积的逆, 因此 s,s',s'' 同属于其中一个生成的循环群,所以 s',s'' 不能取自 $\{t,t^{-1}\}$, 只能 $s'=s''=s$. 说明过边 $\{1,s\}$ 的 3-圈只有 $[1,s,s^{-1},1]$,并且 $o(s)=3$. 于是 (2) 和 (3) 得证.

2　主要结果

记 $X:=\mathrm{Cay}(G,S)$ 为群 G 的连通 4度无向 Cayley图, $A:=\mathrm{Aut}(X)$ 为 X 的图自同构群.

定理 2.1　关于 G 的单位元 1的点稳定子群 A_1 是 2-群,即 $|A_1|=2^j$.

证明　由引理 1.4, $|A_1|=2^i3^j$.往证 $3\nmid |A_1|$.

反证法,如果 $3\mid |A_1|$,则 A_1 中含 3阶元,记为 τ. 往证 $\langle\tau\rangle$ 在 $X_1(1)=S$ 上诱导的作用平凡.由于 $|S|=4$,而 τ 的轨道长只能是 1或 3,所以 τ 至少有一个不动点,记为 s.

还需证明 τ 另有一个异于 s 的不动点,才能得出 τ 点型稳定 $X_1(1)$. 分两种情况:

情况 1 若 $o(s)=3$.

由引理 1.8,过边 $\{1,s\}$ 恰有一个 3-圈 $[1,s,s^{-1},1]$, 则 τ 不动 s,必然也不动这个 3-圈,从而 s^{-1} 是 τ 的另一个不动点.

情况 2 若 $o(s)\neq 3$.

这时 S 中必另含 3阶元,记为 t.仍由引理 1.8,恰有一个 3-圈同时过边 $\{1,t\}$ 和边 $\{1,t^{-1}\}$,而过边 $\{1,s^{-1}\}$ 没有 3-圈,因此 s^{-1} 也是 τ 的 1个不动点.

总之,τ 点型稳定 $S=X_1(1)$, 即对任意 $v\in X_1(1)$, $\tau\in A_v$.由于 A_v 在 $X_1(v)$ 上诱导的置换作用与 A_1 在 $X_1(1)$ 上诱导的置换作用是置换同构的,所以作为 A_v 中的 3阶元,τ 仍然点型稳定 $X_1(v)$. 最后由连通性,得 τ 点型稳定整个 $V(X)=G$, 导致 $\tau=1$, 矛盾.说明 $3\nmid |A_1|$,即 A_1 是 2-群.

定理 2.2　群 G 是弱 4-CI群,并且 G 的连通 4度无向 Cayley图在同构意义下只有 2个.

证明　由弱 4-CI的定义,往证群 G 的势不超过 4且自逆的生成子集 S 都是 CI子集.根据群 G 的结构,只需考虑 $|S|=4$ 的情形.

考虑 G 的连通 4度无向 Cayley图 $X:=\mathrm{Cay}(G,S)$. 由定理 2.1, 知 $A:=\mathrm{Aut}(X)$ 关于 G 的单位元 1的点稳定子群 A_1 是 2-群.又根据置换群理论知 $A=R(G)A_1$, $R(G)\cap A_1=1$,则 $R(G)$ 是 A 的奇阶 Hall子群,必与 A 中同阶 Hall子群都共轭[23],再由引理 1.2, 可得 S 是 CI-子集,从而 G 是弱 4-CI-群.

由引理 1.7容易证明, G 的 4-元 Cayley生成子集的集合在群同构 $\mathrm{Aut}(G)$ 作用下只有 2个轨道,代表元分别为 $\{a,a^{-1},ab,(ab)^{-1}\}$ 和 $\{a,a^{-1},b,b^{-1}\}$,所以 G 的连通 4度无向 Cayley图在同构意义下只有 2个.

引理 2.1　$|\mathrm{Aut}(G,S)|=2$.特别,如果 $|A_1|\leqslant 4$,必然 $A_1=\mathrm{Aut}(G,S)$.

证明　由定理 2.2,只需考虑 $S=\{a,a^{-1},s,s^{-1}\}$,其中 $s=b$ 或 ab.

设 $1\neq\tau\in\mathrm{Aut}(G,S)$. 则据引理 1.7,当 $s=b$ 时,只能 $a^\tau=a, b^\tau=b^{-1}$;而当 $s=ab$ 时,只能 $a^\tau=ab$, $b^\tau=b^{-1}$. 总之 $o(\tau)=2$,从而 $\mathrm{Aut}(G,S)=\langle\tau\rangle$ 是 2阶群.

如果 $|A_1|\leqslant 4$, 易知 $|R(G)A_1:R(G)\rtimes\mathrm{Aut}(G,S)|\leqslant 2\Rightarrow R(G)\trianglelefteq R(G)\rtimes\mathrm{Aut}(G,S)\trianglelefteq A_1R(G)=A$.由定理 2.1, $R(G)$ 是 A 的 Hall子群,再由引理 1.1, $R(G)\trianglelefteq A\Rightarrow A_1=\mathrm{Aut}(G,S)$.

定理 2.3　(1) A 的正规子群 K 的阶若含 3因子,则 $K\geqslant R(G)$;

(2) A 的正规 p-子群是循环群,并含于 $R(G)$;

(3) A 的极小正规子群是 p 阶循环群;

(4) A 作用在 $V(X)$ 上非拟本原.

证明　(1) 由定理 2.1, $|A|=|A_1|\cdot|R(G)|=2^j3p^n$,只有一个 3因子.若 $3\mid |K|$ 且 $K\trianglelefteq A$,则 K 包含 A 的全部 Sylow 3-子群, 即 $3\mid |K\cap R(G)|$.但 $K\cap R(G)\trianglelefteq R(G)$ 以及 $R(G)$ 的含 3因子的正规子群只能是 $R(G)$ 本身,可得 $R(G)\leqslant K$.

(2) 取 $R(G)$ 的 Sylow p-子群 P,则 P 循环并且也是 A 的 Sylow p-子群, 因此包含 A 的每个正规 p-子群并使之循环.

(3) 设 N 是 A 的极小正规子群,则 N 是特征单群,因而 N 是若干个彼此同构单群的直积.分两种情况考虑.

情况 1 N 可解.

这时 N 是初等交换 q-群 (q 是某素数),作用在 $V(X)=G$ 上的轨道等长,因此 $q\mid |G|$,得 $q=3$ 或 p. 由 (1) 及 $N\ngeqslant R(G)$,得 $q=p$.再由 (2) 得 N 既初等交换又循环只能是 p 阶循环群.

情况 2 N 不可解.

由 $|A|$ 只有一个 3因子, 易知 N 只能是一个非

交换单群的直积,即 N 是非交换单群.再由引理 1.5,知 $p=7$, $N\cong \mathrm{PSL}(2,7)$ 是 168阶单群.但由 $3\mid |N|$ 及(1),得 $R(G)\leqslant N$,导致 $7^2\mid |N|=168$,矛盾.说明情况 2不会发生.

(4) 由(3)可得.

定理 2.4 $|A_1|=|\mathrm{Aut}(G,S)|=2$.因而 X正规,但非弧传递.特别,A是可解群.

证明 由定理 2.2,不妨设 $S=\{a,a^{-1},s,s^{-1}\}$,其中 $s=b$或 ab.由定理 2.3 (3)知 A作用在 $V(X)$ 上非拟本原.令 K是 A的极大非传递正规子群.K的轨道作出的块图记 X_K,则 $\mathrm{Val}(X_K)\leqslant \mathrm{Val}(X)=4$.

包含 1的 K-轨道记为 B,则 B是 G的子群.但是 $K\ngeqslant R(G)$且由定理 2.3(1),知 $3\nmid |K|\Rightarrow 3\nmid |B|$.所以 $|B|=p^j$,其中 $1\leqslant j\leqslant n$.

证明 $j=n$.假设 $j<n$,则 $B=\langle b^{p^{n-j}}\rangle$,且 Ba, Ba^{-1}, Bs, Bs^{-1} 是彼此不同的 4个陪集,并且在块图 X_K 中都与 B相连接,于是 $\mathrm{Val}(X_K)=4$,这说明相邻 2个块的导出子图是完全匹配,进而知 K作用在 B上正则,得 $|K|=|B|=p^j$.

取商群 A/K的极小正规子群 H/K.由 K的选择,知 H在 $V(X)$上传递,则 $3p^n\mid |H|\Rightarrow 3p\mid |H/K|$,说明 H/K 只能是不可解的特征单群.类似定理 2.3(2)情况 2的证明,也得 $p=7$, $H/K\cong \mathrm{PSL}(2,7)$.

此外,由定理 2.3(1)及 $3\mid |H|$ 得 $H\geqslant R(G)$.而由定理 2.3(2),得 $K<R(G)$.实际上 K真包含于 $R(G)$的 p^n 阶循环 Sylow p-子群内,所以 $K<C_{R(G)}(K)\leqslant C_H(K)$.于是 $1<C_H(K)/K \trianglelefteq N_H(K)/K=H/K\cong \mathrm{PSL}(2,7)$,只能 $C_H(K)/K=H/K$,即 $C_H(K)=H\Rightarrow C_{R(G)}(K)=R(G)$,但 $R(G)$不能中心化 K,这一矛盾表明 $j=n$.

于是 $B=\langle b\rangle$, $V(X_K)=\{B,Ba,Ba^{-1}\}$, X_K是一个 3-圈,$\mathrm{Aut}(X_K)\cong D_6$.另外由 K的极大性可推出 $A/K<\mathrm{Aut}(X_K)\Rightarrow |A/K|\mid 6\Rightarrow |A|\mid 6|K|$.

再证明 $|A_1|\leqslant 4$.由定理 2.3,就得 $|A_1|=|\mathrm{Aut}(G,S)|=2$.分两种情况:

情况 1 $s=b$.

这时每个块的导出子图是 1个 p^n-圈,而圈上每点恰有 2条边分别连接另个块.因此相邻个块的导出子图是完全匹配.比如块 B上的点 b^j 分别连接块 Ba 和块 Ba^{-1}的 2条边是 $\{b^j,a^{\pm 1}b^j\}$.

考虑 K诱导在 B上的作用.设 e取自这个作用的核,则 $\forall\ 0\leqslant j<p^n$, e不动 b^j,且不能互换 ab^j 与 $a^{-1}b^j$,因此也不动 ab^j和 $a^{-1}b^j$,只能 $e=1$.说明 K在 B上诱导的作用是忠实的.然而 B的导出子图是一个 p^n-圈,所以 $K<\mathrm{Aut}(B)\cong D_{2p^n}\Rightarrow |A|\mid 6|K|\mid 6|D_{2p^n}|=12p^n$.即得 $|A_1|=|A:R(G)|\leqslant 4$.

情况 2 设 $s=ab$.

这时每个块内无边且相邻 2块的导出子图是 2度的二部图,因而是一个往返于这 2个块的 $2p^n$-圈.事实上过顶点 1恰有 2个无公共边的 $2p^n$-圈:

$C_1:=[1,a^{-1},sa^{-1},a^{-1}(sa^{-1}),(sa^{-1})^2,\cdots,(sa^{-1})^{p^n-1},s^{-1},1]$;

$C_2:=[1,a,s^{-1}a,a(s^{-1}a),(s^{-1}a)^2,\cdots,(s^{-1}a)^{p^n-1},s,1]$.

已知 $e\in A_1$集型稳定块 B.若 e还稳定顶点 1连向其邻域 $S=\{a,a^{-1},s,s^{-1}\}$的任一条边,不失一般性,设这条边为 $\{1,a\}$,则 e必点型稳定圈 C_2,进而也点型稳定另一个圈 C_1,只能 $e=1$.说明 A_1在 S上诱导的作用不仅忠实,而且 $A_1=A_1^S$ 还半正则,即有 $|A_1|=|A_1^S|\leqslant |S|=4$.

参考文献:

[1] Xu M Y. Automorphism groups and isomorphisms of Cayley digraphs[J]. Discrete Math, 1998, 182: 309-319.

[2] Muzychuk M. Adam's conjecture is true in the square-free case[J]. J Combin Theory A, 1995, 72: 118-134.

[3] Muzychuk M. On adam's conjecture for circulant graphs[J]. Disc Math, 1997, 167/168: 497-510.

[4] Li C H. Isomorphisms of finite Cayley graphs[D]. Ph D Thesis at University of Western Australia, 1997.

[5] 孙良.无向循环图的同构[J].数学年刊: A, 1988, 9(5): 567-574.

[6] Ma H C. On isomorphisms of Cayley digraphs on dicyclic groups[J]. Austra J of Combin, 1997 (16): 189-194.

[7] 方新贵.有限交换 2-DCI-群的刻画[J].数学杂志, 1988 (8): 315-317.

[8] 黄琼湘. Cayley图的同构分解及弱 DCI-子集的充要条件[J].数学研究与评论, 1998, 18(2): 281-284.

[9] 徐尚进. 3p阶 Frobenius群的非弱 3-DCI性[J].广西科学, 2000, 7(2): 113-117.

[10] 王殿军,胡冠章,徐尚进. 21阶亚循环群的弱 3-DCI性[J].系统科学与数学, 2001 (21): 235-242.

[11] 徐尚进,张翠. 4p阶内 2-闭群的 m-DCI-性[J].广西师范大学学报, 2006 (24): 45-48.

[12] Lu Z P, Xu M Y. On the normality of Cayley graphs of order pq[J]. Australas J Comin, 2003, 27: 81-93.

[13] Young-Gheel Baik, Feng Yanquan, Hyo-Seob Sim, et al. On the normality of Cayley graph of abelian groups[J]. Slgebra Colloq, 1998, 5: 297-304.

(下转第 112页 Continue on page 112)

Proof Suppose $\{V_i\}$ is a collection of Sub-Hom-coassociative coalgebras of a Hom-coassociative coalgebra V. By Theorem 2.1(Ⅰ) we know $V_i^{\perp}$ is an ideal of V^*, so $\sum V_i^{\perp}$ is also an ideal. By Theorem 2.1(Ⅱ), we get $(\sum V_i^{\perp})^{\perp}$ is a Sub-Hom-coassociative coalgebra of V. But according to Proposition 2.4, we have $(\sum V_i^{\perp})^{\perp}=\bigcap V_i^{\perp\perp}=\bigcap V_i$, therefore $\bigcap V_i$ is again a Sub-Hom-coassociative coalgebra.

References

[1] Makhlouf A, Silvestrov S D. Hom-algebra structures[J/OL]. Lie Theory Appl, 2006, 10: 1-11. http://arxiv.org/math/0609501v3.

[2] Montgomery S. Hopf algebras and their actions on rings [C]. United States: AMS Regional Conference Series in Mathematics, 1993.

[3] Sweedler M E. Hopf Algebras[M]. New York: Benjamin, 1969.

(责任编辑: 尹 闯)

(上接第108页 Continue from page 108)

[14] Young-Gheel Baik, Feng Yanquan, Hyo-Seob Sim. The normality of Cayley graphs of finite abelian groups with valency 5[J]. Systems Sci Mth Sci, 2000, 13: 425-431.

[15] Fang X G, Li C H, Wang J, et al. On cubic normal Cayley graphs of finite simple groups [J]. Discrete Math, 2002, 244: 67-75.

[16] Xu S J, Fang X G, Wang J, et al. On cubic s-Arc-transitive Cayley graphs of finite simple groups [J]. European J Combin, 2005, 26: 133-143.

[17] Xu S J, Fang X G, Wang J, et al. 5-Arc transitive cubic Cayley graphs on finite simple groups[J]. European J Combin, 2007, 28: 1023-1036.

[18] 徐明曜. 有限群导引(上,下册)[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[19] 张远达. 有限群构造(上册)[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

[20] Biggs N. Algebraic graph theory[M]. Second Edition. Cambridge UP: Cambridge University Press, 1993.

[21] Babai L. Isomorphism problem for a class of point-symmetric structures[J]. Acta Math Acad Sci Hungar, 1977, 29: 329-336.

[22] Gorenstein D. Finite simple groups[M]. New York: Plenum Press, 1982.

[23] Gross F. Conjugacy of odd order hall subgroups[J]. Bull London Math Soc, 1987, 19: 311-319.

(责任编辑: 尹 闯)